RESUME

La liquidité d'un marché financier est normalement définie comme la capacité de ce marché à ne pas montrer de fortes variations du prix d'équilibre en réponse à des ordres nouveaux des intervenants sur ce marché. Ceci est d'habitude relié à l'importance du « *noise trading* » sur ce marché. Nous étudions ici un autre facteur de la liquidité : la réponse du prix d'équilibre à des aléas de marché (*noise trading*, variabilité de l'offre de titres) ou à des changements dans les anticipations peut être fortement amplifiée si les intervenants utilisent des modèles de *Value At Risk* (*VAR*), qui limitent la probabilité d'une perte en capital catastrophique. La généralisation de l'usage de ces modèles peut expliquer la diminution apparente de la liquidité des marchés d'actifs risqués (obligations privées, actions des entreprises technologiques, marchés émergents…).

ABSTRACT

MARKET LIQUIDITY AND *VALUE AT RISK*

The liquidity of financial markets is normally defined as the capacities for the markets not to exhibit large price changes as a response to new orders from market participants, which is usually related to the importance of noise trading on the markets. We examine here another factor of liquidity: the response of the equilibrium price to market disturbances or to changes in expectations may be amplified if market participants use *Value At Risk* (*VAR*) models to limit the probability of a large capital loss. The generalization of the use of such models can explain the apparent reduction of liquidity on the markets for risky assets (corporate bonds, IT stocks, emerging markets…).

JEL Classification : G 11 ; G 14.

INTRODUCTION

A plusieurs reprises (après la crise mexicaine de la fin 1994, au moment de la crise russe et de la crise des hedge funds en 1998, à nouveau pendant l'automne 2000), les primes de risque se sont accrues globalement sur les marchés financiers (affectant les titres des pays émergents, les marchés boursiers, les emprunteurs privés…). Ceci est aussi arrivé à la fin de l'année 1999, avec les inquiétudes liées à l'an 2000, mais il s'agit bien sûr d'une situation différente.

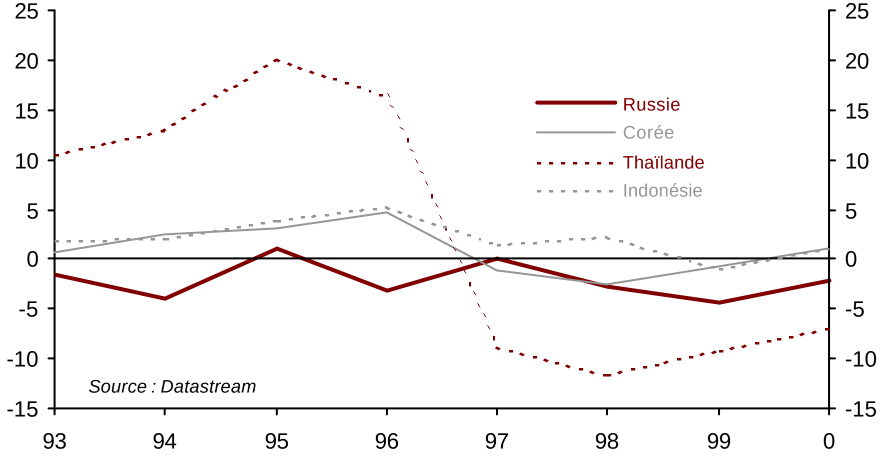
Les crises sont à plusieurs reprises parties des **pays émergents**. Le **graphique 1** montre les spreads pour les emprunts Bradys : ils augmentent violemment au début de 1995 et au second semestre 1998. Après la crise de 1995, ils sont revenus à leur niveau antérieur, pas après celle de 1998, et ils augmentent à nouveau à l'automne 2000. La crise de 1994-1995 débute en Amérique Latine, mais demeure localisée et contenue.

Graphique 1
Spread Brady

La crise de 1997-98 commence par une crise de change en Thaïlande, qui se transmet ensuite aux autres pays asiatiques. Elle a aussi des justifications économiques fondamentales dans les pays asiatiques d'où elle part : déficits extérieurs, dette extérieure élevée, au moins en Thaïlande et en Indonésie.

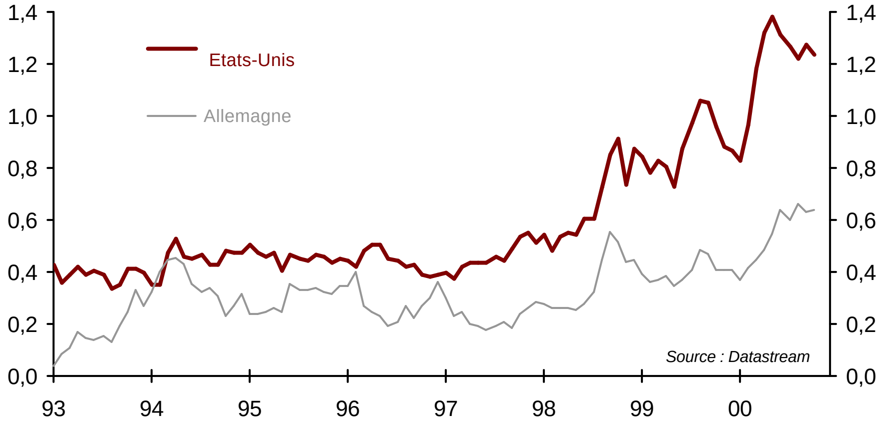
Le déroulement de la crise de 97-98 est beaucoup plus inquiétant que celui de la crise de 94-95 : les capitaux internationaux sortent massivement des pays atteints **(graphique 2)** ; il y a transmission aux autres émergents et surtout, **à la différence de la crise de 94-95, celle de 97-98 se transmet aux pays avancés.**

Graphique 2
Flux de capitaux en % du PIB

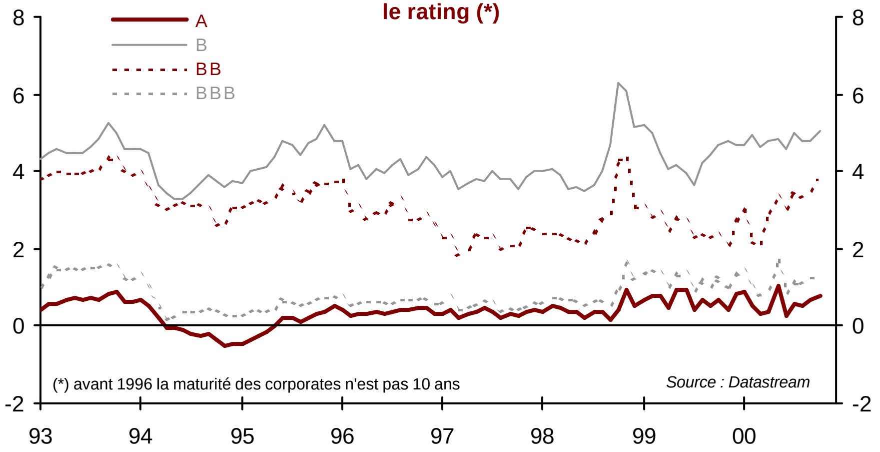


On observe une hausse brutale des écarts de taux entre les emprunteurs publics et les emprunteurs privés aux États-Unis et en Europe ; une chute des indices boursiers et de la valorisation boursière **(graphiques 3 – 4 – 5).**

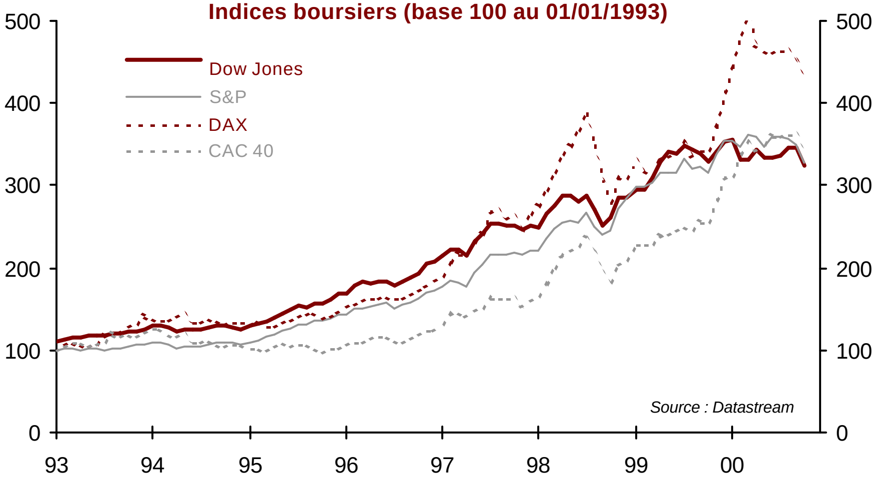
Graphique 3
Etats-Unis et Allemagne : spread swaps - taux emprunts d'Etat



Graphique 4
Etats-Unis : spread vis-à-vis des taux de swap, suivant le rating (*)

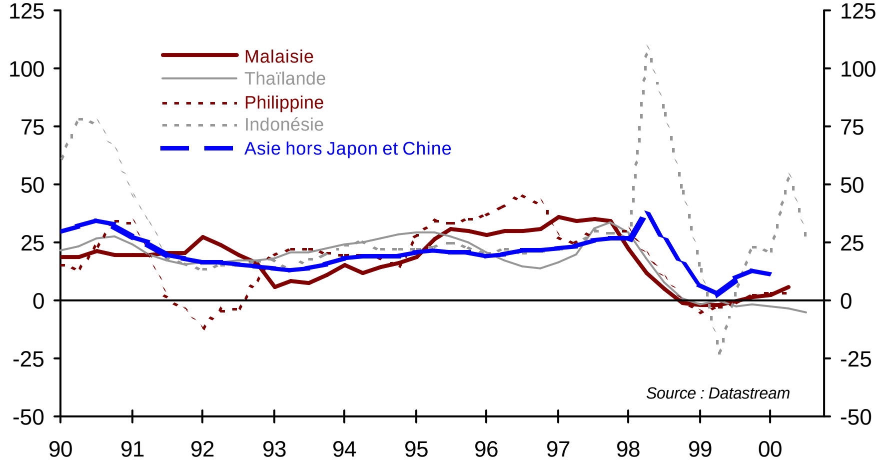


Graphique 5
Indices boursiers (base 100 au 01/01/1993)

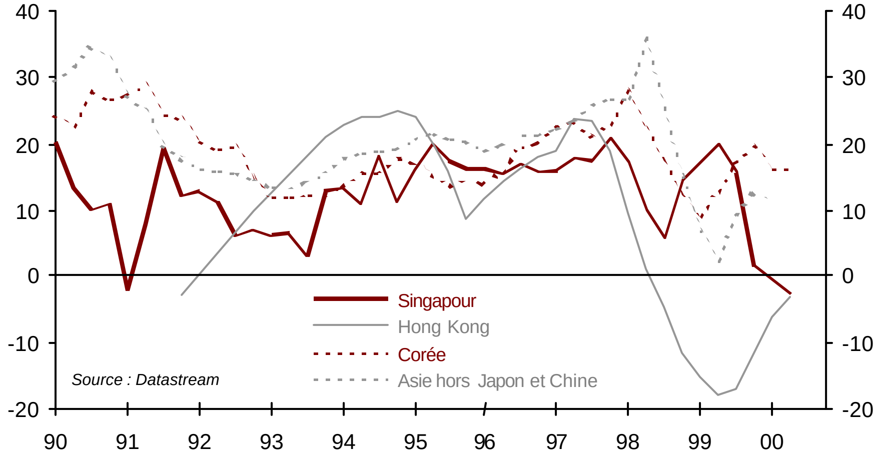


Il s'agit clairement en 1998 **d'une crise globale de liquidité :** il y a effondrement de la distribution de crédit en Asie **(graphiques 6 a-b),** faillite des fonds spéculatifs aux États-Unis (comme LTCM), d'où transmission de la crise aux banques des pays de l'OCDE qui avaient prêté aux pays émergents et aux fonds spéculatifs.

Graphique 6 a
Crédit privé en Asie (GA en %)

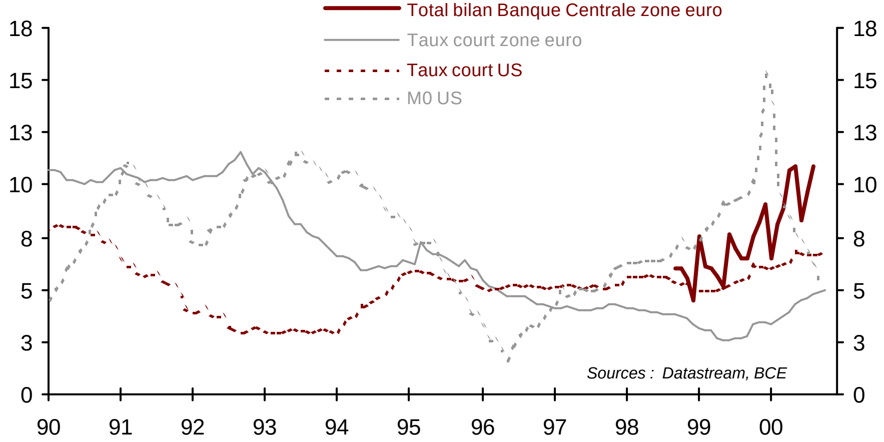


Graphique 6 b
Crédit privé en Asie (GA en %)



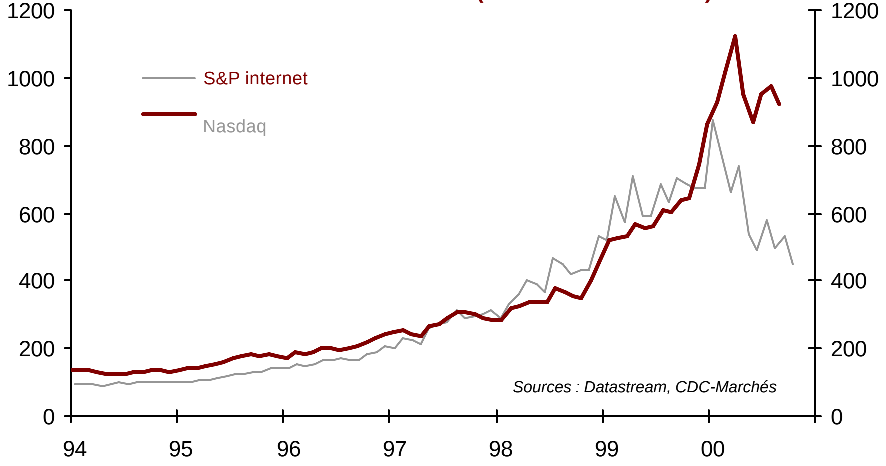
Les autorités monétaires des pays de l'OCDE ont montré leur capacité à réagir au risque de crise de liquidité dans les banques : l'expansion de la base monétaire, aussi bien dans la zone qu'aux États-Unis, et la baisse des taux courts, même si elle est un peu tardive en Europe, ont eu un rôle stabilisateur évident **(graphique 7).**

Graphique 7
Etats-Unis - zone euro : taux court et M0 (GA en %)



Passons à la troisième crise des emprunteurs à risque : celle qui se déclenche en février 2000 sur les marchés d'actions des valeurs technologiques. Le **graphique 8** montre le recul des cours boursiers pour ces valeurs : 50% de baisse pour les valeurs liées à Internet du Standard and Poor's.

Graphique 8
Etats-Unis : indice boursier (base 100 au 01/01/95)



Cette crise des valeurs technologiques dans les pays de l'OCDE a eu des effets de diffusion : recul des Bourses émergentes, comme on l'a vu plus haut ; réouverture des spreads de taux sur les pays émergents ; des spreads swaps/emprunts d'Etat aux États-Unis et en Europe. **Comme la crise des émergents de 1997-98, la crise de certaines valeurs technologiques en 2000 a diffusé ses effets à d'autres marchés. Une hausse des primes de risque sur un marché, explicable pour des raisons locales, se diffuse à beaucoup d'autres marchés.**

Cependant, malgré des similitudes en apparence, les crises de 1998 et de 2000 sont différentes ; en **1998 c'est une crise de liquidité bancaire** avec la défaillance des emprunteurs qui menace la solvabilité des banques prêteuses et à laquelle les Banques Centrales sont bien armées pour répondre en prêtant des liquidités peu chères aux banques commerciales. En 2000, c'est une **crise de liquidité sur les marchés financiers** : actions des sociétés technologiques, obligations d'entreprises, marchés boursiers émergents.

Lorsque les détenteurs de ces titres essaient de les vendre, leurs prix reculent énormément ; ceci a été particulièrement impressionnant pour les « *high yielders* », les titres a rendement élevé, pour lesquels la liquidité de marché a pratiquement disparu. Les Banques Centrales ne peuvent pas apporter facilement de remède à ce type de crise de liquidité, sauf à intervenir directement sur les marchés de titres, ce qu'elles ne veulent pas faire en général.

Dans la littérature, **la liquidité de marché financier** est définie comme étant forte si une transaction réalisée par un intervenant sur le marché ne modifie pas beaucoup le prix d'équilibre. Ceci sera le cas si le « bruit de marché » résultant par exemple du comportement des « *noise traders* »[1] est très important.

Si c'est le cas, les variations du prix d'équilibre ne donnent presque pas d'information aux intervenants non informés sur l'information privée dont disposent les informés (voir **Encadré**). Dans un marché illiquide, avec un bruit de marché faible, toute transaction réalisée par les informés révèle aux non informés ce que savent les informés[2]. Dans le cas intermédiaire, les actions des informés donnent aux non informés une information imparfaite sur les connaissances des informés[3]

Nous utiliserons une autre piste pour décrire la perte de liquidité des marchés financiers pendant l'année 2000 : le rôle de plus en plus important des contraintes sur la taille des positions risquées que peuvent prendre les intervenants sur les marchés financiers.

---

[1] De Long, Schleifer, Summers, Waldmann (1990), Shleifer-Summers (1990).
[2] Grossman-Stiglitz (1980) ; Grundy-Nichols (1989) ; Kyle (1985) ; Leland (1992).
[3] Ceci rend ambigu l'effet sur le bien-être de l'interdiction d'intervention sur les marchés des initiés : Leland (1992) ; ceci peut aussi accroître la taille des crises financières, puisque les non informés confondent le résultat des actions des informés et celui des aléas de marché, Gennotte, Leland (1990).

Ceci résulte, pour nous, en particulier de la généralisation de l'usage des modèles de *Value At Risk* (*VAR*). Les investisseurs calculent avec ces modèles le risque de perte qu'ils peuvent subir compte tenu de leurs positions, et peuvent limiter l'exposition au risque pour limiter la probabilité de perdre une fraction insupportable de leur richesse. Mais la conséquence de l'utilisation générale des modèles de *VAR* est la réduction de la liquidité : lorsque certains investisseurs veulent vendre, les autres ne peuvent pas acheter parce qu'ils sont contraints par les limites d'exposition au risque qui viennent des modèles de *VAR* (ce que nous appelerons simplement plus loin contraintes de *VAR*). Pour chaque intervenant qui est contraint, la contrainte de *VAR* réduit le risque, mais si l'utilisation des modèles de *VAR* accroît la variabilité des prix d'équilibre des actifs financiers, elle peut réduire globalement le bien-être pour l'ensemble des intervenants.

Encadré
Liquidité de marché : le modèle usuel

Il y a sur le marché trois types d'intervenants :

– les informés, qui disposent d'un signal bruité *S* du revenu futur *R* de l'actif risqué ;
– les non informés, qui n'observent que les prix de marché ;
– les « *noise traders* » qui expriment une demande aléatoire.

La proportion des informés est $?$, celle des non informés est $1-?$.

La demande d^I des informés est :

$$(1)\quad d^I = \frac{E^I(R)-(1+r)P}{?Var^I(R)}$$

R est le revenu futur de l'actif risqué, P son prix d'équilibre ; $E^I(R)-(1+r)P$ est l'excès anticipé de revenu de l'actif risqué ; r est le rendement sans risque ; I indice l'espérance E et la variance *Var* conditionnelle à l'information des informés. **A priori,** en l'absence de toute autre information, tous les intervenants supposent que le revenu R suit :

$$(2)\quad R \approx N\left(\overline{R}, u^2\right) \text{ (distribution à priori)}$$

On suppose que le signal dont disposent les initiés est tel que :

$$(3)\quad S = R + e$$

où $e \approx N\left(0, s^2\right)$, est le bruit du signal et n'est pas corrélé avec R. Ceci implique que (calcul usuel de moments conditionnels) :

$$(4)\quad \begin{cases} E^I(R) = \overline{R}\dfrac{s^2}{s^2+u^2} + S\dfrac{u^2}{s^2+u^2} \\ Var^I(R) = \dfrac{u^2 s^2}{s^2+u^2} \end{cases}$$

La demande d^N des non informés est :

$$(5)\quad d^N = \frac{E^N(R)-(1+r)P}{?Var^N(R)}$$

les non informés n'observent que le prix d'équilibre P, pas le signal S.

L'équilibre du marché de l'actif risqué s'écrit :

$$(4)\quad ?d^I + (1-?)d^N + d = A$$

A est l'offre d'actifs risqués, d la demande aléatoire des *noise-traders*.

$$(5)\quad d \approx N(0, z^2)$$

soit encore :

$$(4')\quad ?\left(\frac{s^2\overline{R} + u^2 S - (1+r)P(s^2 + u^2)}{u^2 s^2}\right) + (1-?)d^N + d = A$$

Les non informés connaissent $?, 1-?, r, ?, s^2, A, u^2, \overline{R}.$ L'observation du prix d'équilibre P les informe donc sur $\frac{?S}{?s^2} + d.$ Si $d = 0$ (pas de *noise-traders*), le prix les informe complètement sur le signal S des informés (Grossman-Stiglitz). Dans le cas général, le prix informe d'autant moins sur S que :

- $?$ est petit (peu d'informés)
- s^2 est grand (le signal est imprécis)
- z^2 est grand (le « bruit de marché » a une forte variance).

On a :

$$E(R|P) = E\left(R|S + \frac{?s^2 d}{?}\right) + E\left(R|R + e + \frac{?s^2 d}{?}\right)$$

$$(6)\quad = \overline{R}\,\frac{s^2 + \left(\frac{?s^2}{?}\right)^2 z^2}{u^2 + s^2 + \left(\frac{?s^2}{?}\right)^2 z^2} + \left(S + \frac{?s^2 d}{?}\right) \bullet \frac{u^2}{u^2 + s^2 + \left(\frac{?s^2}{?}\right)^2 z^2}$$

Si la variance z^2 de d (bruit de marché) est très grande, $E(R|P) = \overline{R}$: l'observation du prix ne donne aucune information sur le signal qu'ont reçu les initiés (forte liquidité). Si z^2 est petit, $E(R|P) \approx E(R|S)$ (faible liquidité).

La littérature de finance[4] a parfois envisagé une autre piste pour expliquer la faible prise de risque : les investisseurs (épargnants) surpondérent, par rapport aux probabilités objectives, les évènements qui leurs sont défavorables. De ce fait, naturellement, ils réduisent les risques « négatifs », conduisant à un faible rendement. Notre modélisation, à partir des modèles de *Value At Risk*, nous semble mieux correspondre à la pratique des intervenants des marchés financiers. Il est bien documenté[5] que la généralisation des modèles de *Value At Risk* (*VAR*) a réduit l'exposition au risque des intermédiaires financiers mais aussi des investisseurs. Nous nous demandons ici ce qu'à été l'effet de cette généralisation sur l'évolution des prix d'équilibre sur les marchés financiers et sur leur volatilité. Il a aussi été avancé[6] que c'est l'impossibilité pour les « spéculateurs » d'obtenir des financements à court terme qui réduisait la liquidité des marchés. Ceci correspond sans doute au cas des petits intervenants, pas des grands investisseurs.

Nous étudierons trois questions :

– si les investisseurs différent par leur degré d'aversion pour le risque, seuls les moins adverses au risque subissent la contrainte de *VAR* ; quel est l'effet sur la volatilité du prix d'équilibre de l'actif financier et sur le bien-être de l'utilisation des modèles de *VAR* et par le fait qu'ils contraignent les investisseurs ayant le moins d'aversion pour le risque ?

– les crises de liquidité sur les marchés, comme celle de 2000, sont liées à une révision à la hausse de l'anticipation du niveau de risque : les résultats des entreprises technologiques, la situation économique des pays émergents sont, à certain moment, considérés comme plus incertains qu'auparavant. Nous examinons les effets d'une situation où la révision à la hausse de la variabilité anticipée du rendement futur des actifs risqués fait apparaître les contraintes liées à l'utilisation des modèles de *VAR* ;

[4] Chauveau-Nalpas (1998) ; Benartzi-Thaler (1995) ; Gul (1991).
[5] Jackson (1995), Jackson-Maude-Perraudin (1998), Milne-Whalley (1999), montrent que l'adoption des modèles de *Value At Risk* pour les banques a réduit leur prise de risque, les a rendues plus prudentes.
[6] Artus (1999)

– finalement, nous introduisons des investisseurs informés et des non informés. Lorsque les informés sont contraints par l'utilisation des modèles de *VAR*, ils réagissent moins à leur information privée, et de ce fait, transmettent moins d'information aux non informés. Le bien-être de ceux-ci peut donc être réduit par deux causes : une plus grande variabilité des prix d'équilibre des actifs, une information extraite de l'observation de ces prix de moins bonne qualité. Cependant, si l'information obtenue par les non informés en l'absence de contrainte, pesant sur les informés, due aux modèles de *VAR*, était de mauvaise qualité, réduire l'utilisation de cette information si les contraintes de *VAR* sont actives peut être efficace.

1 – Le comportement des investisseurs

Nous supposons l'organisation suivante : il y a N investisseurs, présentant de l'aversion pour le risque, et de richesses initiales identiques, qui peuvent investir soit dans un actif sans risque, de rendement r, soit dans un actif risqué, dont le prix d'équilibre est P et qui fournit dans le futur, le revenu aléatoire R.

$$(1)\quad R \approx N\left(\overline{R}, s^{2} P^{2}\right)$$

(Pour simplifier les expressions, nous supposons que la variance de R est proportionnelle à P^2). Les investisseurs ont une fonction d'utilité de leur richesse future ; ils ont tous la richesse initiale W_0, et diffèrent par leur aversion pour leur risque. L'investisseur i choisit d'investir une fraction de sa richesse initiale $1-a$ dans l'actif sans risque, a_i dans l'actif risqué. Sa richesse future est donc :

$$(2)\quad W_i = (1-a_i)W_0(1+r) + a_i W_0 \frac{R}{P}$$

puisqu'il achète $\frac{a_i W_0}{P}$ actifs risqués.

L'utilité de sa richesse future est :

$$(3)\quad U_i = \frac{W_i^{1-?_i}}{1-?_i}\ ;\ ?_i > 0\ ;\ \text{plus } ?_i \text{ est grand,}$$

plus l'aversion relative pour le risque est grande.

L'espérance de l'utilité peut s'écrire, après différenciation au second ordre :

$$(4)\quad E(U_i) \approx \frac{\overline{W_i}^{1-?_i}}{1-?_i} - \frac{1}{2}\, ?_i \overline{W_i}^{-?_i-1} (a_i W_0)^2 s^2$$

où $\overline{W_i} = (1-a_i)W_0(1+r) + a_i W_0 \frac{\overline{R}}{P}$ est l'espérance de W_i d'où la condition d'optimalité par rapport à a_i :

$$(5)\quad \left(\frac{\overline{R}}{P} - (1+r)\right)\left(1 + \frac{1}{2}\, ?_i \frac{(?_i + 1)}{\overline{W_i}^2} (a_i W_0)^2 s^2\right) = ?_i a_i \frac{W_0}{\overline{W_i}} s^2$$

ce qui implique, au premier ordre[7].

$$(5')\quad a_i \cong \frac{\frac{\overline{R}}{P} - (1+r)}{?_i s^2}$$

La part de l'actif risqué croît avec l'excès de rendement anticipé de cet actif, décroît avec le degré d'aversion pour le risque et la variabilité du niveau de l'actif risqué.

L'offre d'actif risqué inclut une composante aléatoire e :

$$(6)\quad S = \overline{S} + e$$

$e \approx N(0, z^2)$. e est indépendant de R et **l'équilibre du marché de l'actif** risqué s'écrit :

$$(7)\quad \overline{S} + e = W_0 \sum_{i=1}^{N} \frac{\frac{\overline{R}}{P} - (1+r)}{?_i s^2}$$

[7] En supposant que $\frac{\left(\frac{\overline{R}}{P} - (1+r)\right)^2}{s^2}$ est négligeable ; a_i est homogène à $\frac{\left(\frac{\overline{R}}{P} - (1+r)\right)}{s^2}$

d'où, pur le prix d'équilibre :

$$(8)\ \ P = \frac{\overline{R}}{1 + r + \frac{s^2}{G}\frac{\overline{S}+e}{W_0}}$$

$$\text{où } \ G = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{?_i}$$

Le prix d'équilibre est d'autant plus faible que la variance s^2 du revenu est grande, que l'offre d'actif risqué $\overline{S}+e$ est faible, que G, qui est la moyenne de l'inverse des degrés d'aversions pour le risque est petit (si G est petit, les degrés d'aversion pour le risque $?_i$ sont grands).

(8) implique pour la variance de P.

$$(9)\ \ Var(P) \cong \left[\frac{\overline{R}s^2}{G(1+r)^2 W_0}\right]^2 z^2$$

Si l'aversion moyenne pour le risque est faible, G est grand, et la variance de P est petite ; si la variance s^2 du revenu futur de l'actif risqué est petite, son prix dépend peu de l'offre $\overline{S}+e$ de cet actif, et la variance de P est petite.

2 – *Value At Risk* et aléas d'offre

Nous supposons que, en plus de l'aversion relative pour le risque habituelle $(?_i)$, les N investisseurs ont une limite pour les pertes qu'ils peuvent subir mesurée par un modèle de *Value At Risk* (*VAR*). Leur revenu futur W_i ne doit pas descendre, avec une probabilité supérieure à $\prod$, en dessous du niveau $W_0(1+r)(1-h)$; $h \geq 0$ est la perte maximale supportable (avec probabilité $\prod$) par rapport à la richesse obtenue dans le cas d'un investissement entièrement sans risque.

L'investisseur i subit donc la contrainte :

$$(10)\ \text{Proba}\left[(1-a_i)W_0(1+r)+a_iW_0\frac{R}{P}<W_0(1+r)(1-h)\right]<\Pi$$

soit encore :

$$(10')\ \text{Proba}\left[a_i\left(\frac{R}{P}-(1+r)\right)<-h(1+r)\right]<\Pi$$

$\frac{R}{P}$ peut s'écrire :

$\frac{R}{P}=\frac{\overline{R}}{P}+s?$ où $? \approx N(0,1)$ ce qui permet encore de réécrire (10') comme :

$$(10'')\ \text{Proba}\left[? < \frac{-h(1+r)}{a_i s}-\frac{1}{s}\left(\frac{\overline{R}}{P}-(1+r)\right)\right]<\Pi$$

Plus a_i augmente, plus la valeur maximum pour $?$ augmente, et plus l'inégalité (10'') devient difficile à satisfaire.

Notons a_i^* la valeur de a_i telle que, pour des valeurs données des autres variables, (10'') est satisfaite à l'égalité.

Si a_i donné par (5') est inférieur à, a_i^* l'investisseur i n'est pas contraint par la *Value At. Risk* (*VAR*), et choisit a_i. Si a_i donné par (5') est supérieur à a_i^*, il choisit a_i^*. Notons $?$ tel que $\text{Proba}\,(? < ?)=\Pi$. a_i^* s'écrit :

$$(11)\ a_i^*=\frac{\frac{h(1+r)}{s}}{-?-\frac{1}{s}\left(\frac{\overline{R}}{P}-(1+r)\right)}$$

Puisque Π est petit $\left(\Pi << \frac{1}{2}\right)$, $? < 0$. Cependant, si $-\,?-\frac{1}{s}\left(\frac{\overline{R}}{P}-(1+r)\right)<0$, il n'y a jamais de contrainte liée à la *VAR*. Ceci arrive pour des valeurs très élevées de e, telles que l'offre d'actif risque est très grande, et $\frac{\overline{R}}{P}-(1+r)$ très grand. Nous faisons l'hypothèse que ces cas peuvent être ignorés.

Nous ordonnons les N investisseurs par ordre de degré d'aversion pour le risque $?_i$ décroissant, ce qui correspond à des valeurs de a_i données par (5) croissantes. Pour une valeur donnée de e (l'aléa d'offre d'actif risqué), les $M(e)$ premiers investisseurs ont un a_i inférieur à a_i^* et utilisent donc a_i donné par (5'), 0, les $N-M(e)$ suivants doivent utilisé a_i^*. L'équilibre du marché de l'actif risqué s'écrit [8]:

$$
(12)\quad \begin{cases}
(N-M(e))W_0 \dfrac{\dfrac{h(1+r)}{s}}{-\,?-\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{\overline{R}}{P}-(1+r)\right)} \\
+\displaystyle\sum_{1}^{M(e)} W_0 \dfrac{\left(\dfrac{\overline{R}}{P}-(1+r)\right)}{?_i s^2} = \overline{S}+e \\
\dfrac{\dfrac{\overline{R}}{P}-(1+r)}{?_{M(e)} s^2} = \dfrac{\dfrac{h(1+r)}{s}}{-\,?-\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{\overline{R}}{P}-(1+r)\right)}
\end{cases}
$$

[8] Nous supposons que *N* est grand, et que $M(e)$ est défini par l'égalité $a_{M(e)} = a_i^*$, ceci n'assure pas, en toute rigueur, que $M(e)$ soit entier, mais nous supposons qu'on peut travailler comme s'il y avait un continuum pour les $?_i$.

Les $M(e)$ premiers investis seurs (d'aversion pour le risque forte) demandent une quantité $a_i W_0$ d'actif risqué avec $a_i < a_i^*$; les $N - M(e)$ suivants (d'aversion pour le risque faible) une quantité $a_i^* W_0$.

Dans le cas général, la résolution de (12) est très compliquée, et nécessite de plus de préciser le lien entre $?_M$ et M.

Nous préférons donc examiner **les deux cas polaires :**

– $M(e) \approx N$: ceci veut dire que pratiquement aucun investisseur n'est contraint ; $\frac{1}{?_{M(e)}}$ est donc grand (l'aversion pour le risque est faible en $M(e)$, ce qui signifie que même les investisseurs à faible aversion pour le risque c'est-à-dire avec a_i élevé, réalisent leurs plans d'investissement librement). Ceci correspond par exemple au cas où $|?|$ est petit $(? < 0)$: une forte probabilité $\prod$ de perte de la fraction h de la richesse est acceptée. On retrouve alors l'équilibre (7) – (8) – (9) de la section précédente ;

– $M(e) \approx 0$: pratiquement tous les investisseurs sont contraints ; $\frac{1}{?_{M(e)}}$ est petit : l'aversion pour le risque est forte en $M(e)$: même si les investisseurs avec a_i petit sont contraints par le *VAR*. Ceci correspond par exemple au cas où $(?)$ est grand ($?$ est très négatif) : la probabilité $\prod$ est très petite.

Dans ce cas, l'équilibre du marché de l'actif risqué s'écrit :

$$(13) \quad \frac{\frac{h(1+r)}{s}}{-\,?-\frac{1}{s}\left(\frac{\overline{R}}{P}-(1+r)\right)} = \frac{(\overline{S}+e)}{NW_0}$$

soit encore :

$$(14)\quad \frac{\overline{R}}{P}-(1+r)=s(-\ ?)-h(1+r)\frac{NW_0}{\overline{S}+e}\cong s(-\ ?)-\frac{h(1+r)NW_0}{\overline{S}}+\frac{h(1+r)NW_0 e}{\overline{S}^{2}}$$

Il faut comparer (14) à l'expression similaire dans le cas où la contrainte de *VAR* ne joue pas (voir (7).

$$(15)\quad \frac{\overline{R}}{P}-(1+r)=\frac{s^{2}(\overline{S}+e)}{GW_0}$$

Puisque la contrainte de *VAR* joue pour tous les investisseurs, on a :

$$(15')\quad \frac{h(1+r)}{(-\ ?)s-\left(\frac{\overline{R}}{P}-(1+r)\right)}<G\,\frac{\frac{\overline{R}}{P}-(1+r)}{Ns^{2}}$$

pour la valeur de l'excès de rendement qui correspond au cas sans contrainte, d'où :

$$(15'')\quad \frac{h(1+r)NW_0}{\overline{S}}<(-\ ?)s-\frac{s^{2}\overline{S}}{GW_0}$$

où encore : $\frac{s^{2}\overline{S}}{GW_0}<(-\ ?)s-\frac{h(1+r)NW_0}{\overline{S}}$

Ceci montre sans ambiguïté qu'en moyenne, **l'excès de rendement anticipé de l'actif risqué est plus élevé lorsqu'il y a contrainte de *VAR*,** puisque, exante, chaque investisseur veut détenir moins d'actif risqué.

Par contre**, l'effet de la contrainte de *VAR* sur la variabilité du prix** ou, de manière équivalente, du rendement anticipé est ambigu. Elle accroît cette variabilité si :

$$(15''')\quad \frac{h(1+r)NW_0}{\overline{S}}>\frac{s^{2}\overline{S}}{GW_0}$$

ce sur quoi (15'') ne donne aucune indication. Si s^{2} est petit (faible variabilité du revenu de l'actif risqué), la demande d'actif risqué réagit beaucoup à l'excès de rendement dans le cas sans contrainte, et la contrainte de *VAR* accroît alors la variabilité du prix.

3 – *Value At Risk* et variabilité anticipée du revenu de l'actif risqué

Nous supposons ici que le choc consiste en une hausse de s^2, la variance (anticipée) du revenu procuré par l'actif risqué. C'est probablement ce type de choc qui survient dans les crises : les intervenants des marchés réalisent brutalement que « les actifs risqués sont très risqués ».

Pour simplifier, nous n'introduisons pas ici d'aléa d'offre d'actif risqué $(e = 0)$. **En l'absence de contrainte de *VAR*,** (8) montre donc qu'on a :

$$(16)\quad \begin{cases} P = \dfrac{\overline{R}}{1 + r + \dfrac{s^2 \overline{S}}{GW_0}} \\ \dfrac{\overline{R}}{P} - (1 + r) = \dfrac{s^2 \overline{S}}{GW_0} \end{cases}$$

Une hausse de s^2, de s^2 à s_1^2, provoque donc une baisse de prix et une hausse de l'excès de rendement anticipé de l'actif risqué.

Nous **introduisons maintenant les contraintes liées à la *VAR***, en supposant que lorsque la variance du revenu de l'actif risqué est s^2, aucun investisseur n'est contraint. Ceci implique que :

$$(17)\quad ?_i > \frac{(-\,?)s\overline{S}}{GNW_0 h(1+r)} \; \forall_i$$

: l'aversion pour le risque ? est suffisamment forte, même pour les investisseurs qui ont l'aversion pour le risque la plus faible, pour que la part des actifs risqués dans le portefeuille soit inférieure à celle qui satisfait la contrainte de *VAR* (compte tenu de la faible valeur initiale de s).

Lorsque la variabilité du revenu futur de l'actif risqué est révisée à la hausse $\left(s_1^2 > s^2\right)$, nous supposons que (18) n'est plus vérifiée pour tous les investisseurs.

Comme précédemment, nous les rangeons par aversion relative pour le risque $?_i$ décroissante (par valeur croissante de $\frac{1}{?_i}$ donc de a_i). Les M premiers choisissent toujours a_i (la part de l'actif risqué) librement, les $N-M$ suivants sont contraints.

L'équilibre du marché de l'actif risqué s'écrit :

$$(18)\quad \frac{\frac{\overline{R}}{P}-(1+r)}{s_1^2}\sum_{i-1}^{M}\frac{1}{?_i}$$

$$+(N-M)\frac{\frac{h(1+r)}{s_1}}{-?-\frac{1}{s_1}\left(\frac{\overline{R}}{P}-(1+r)\right)}=\frac{\overline{S}}{W_0}$$

et M est déterminé par :

$$(19)\quad \frac{\frac{R}{P}-(1+r)}{?_M s_1^2}=\frac{\frac{h(1+r)}{s_1}}{-?-\frac{1}{s_1}\left(\frac{\overline{R}}{P}-(1+r)\right)}$$

(18) conduit au premier ordre à :

$$(20)\quad \left(\frac{\overline{R}}{P}-(1+r)\right)\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{?_I}+\frac{s_1}{(-?)}(N-M)h(1+r)=s_1^2\,\frac{\overline{S}}{W_0}$$

au lieu de :

$$(20')\left(\frac{\overline{R}}{P}-(1+r)\right)\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{?_i}=\frac{s_1^2\overline{S}}{W_0}$$

si la contrainte de *VAR* n'était pas active.

La prime de risque définie par (20) est plus grande que celle définie par (20’) si :

$$(21)\quad \frac{s_1^{2}\bar{S}}{W_0}\sum_{i=M+1}^{N}\frac{1}{?_i} > G\frac{s_1}{(-?)}(N-M)h(1+r)$$

Or (19) montre que, au premier ordre :

$$(22)\quad \frac{1}{?_M} > \frac{h(1+r)}{s_1(-?)}\bullet\frac{GW_0}{\bar{S}}$$

de ce fait :

$$\sum_{i=M+1}^{N}\frac{1}{?_i} > (N-M)\frac{1}{?_M} > \frac{(N-M)h(1+r)}{s_1(-?)}\frac{GW_0}{\bar{S}}$$

et (21) est vérifiée : **lorsqu’une hausse de la variabilité anticipée du rendement futur de l’actif risqué aboutit à ce que les investisseurs ayant l’aversion pour le risque la plus forte soient contraints par la VAR, l’excès de rendement anticipé de l’actif risqué s’accroît plus que si la contrainte de VAR ne jouait pour aucun investisseur : la chute de prix liée à la hausse de la variabilité du rendement (de s^2 à s_1^2) est amplifiée par l’existence de contraintes de VAR.**

4 – Extraction d’information par les non informés

Nous supposons ici qu’il y a deux types d’intervenants :

– - les **informés** reçoivent un signal bruité I de la réalisation du rendement futur de l’actif risqué :

$$(23)\quad I = \frac{R}{P} + f$$

où $f \approx N\left(0, P^2\right)$; f est indépendant de R et e

– les **non informés** ne reçoivent pas ce signal, et utilisent donc la distribution de probabilité a priori de $\frac{R}{P}\left(\frac{R}{P} \approx N\left(\frac{\overline{R}}{P}, s^2\right)\right)$ Pour simplifier, nous supposons que les informés et les non informés ont tous la même aversion pour le risque ?, et nous distinguons **deux cas selon que les informés subissent ou non la contrainte de *VAR*.**

a – Absence de contrainte

La demande d'actif risqué par les informés est alors :

$$(24)\ aW_0^I = \frac{E^I\left(\frac{R}{P}\right) - (1+r)}{?Var^I\left(\frac{R}{P}\right)}$$

où E^I représente l'espérance mathématique conditionnelle à l'information reçue par les informés ; Var^I la variance conditionnelle.

$$(25)\ E^I\left(\frac{R}{P}\right) = \frac{\overline{R}}{P}\frac{ß^2}{ß^2 + s^2} + I\frac{s^2}{ß^2 + s^2}$$

: si le signal I est très imprécis ($ß^2$ très grand), on retrouve $E^I\left(\frac{R}{P}\right) = \frac{\overline{R}}{P}$.

On a aussi :

$$(26)\ Var^I\left(\frac{R}{P}\right) = \frac{ß^2 s^2}{ß^2 + s^2}$$

Les non informés expriment une demande d'actif risqué (en part de leur richesse initiale W_0) qui est :

$$(27)\ a^N = \frac{E^N\left(\frac{R}{P}\right) - (1+r)}{?Var^N\left(\frac{R}{P}\right)}$$

et l'équilibre du marché de l'actif risqué s'écrit :

$$(28)\ ?a^I + (1-?)a^N = \frac{\overline{S}+e}{W_0}$$

$?$ est la proportion des informés dans l'ensemble des investisseurs, $(1-?)$ la proportion des non informés.

Les non informés observent le prix d'équilibre P et connaissent leur propre demande a^N, ainsi que $?, ß^2, s^2, \overline{S}, z^2, ?, \overline{R}, r$ et le mode de formation de la demande des informés.

L'observation du prix d'équilibre P (en fait de $\frac{\overline{R}}{P}$), est équivalent à celle de :

$$(29)\ \frac{?}{?ß^2} I - \frac{e}{W_0}$$

ce qui implique, pour les moments utilisés par les non-initiés :

$$E^N\left(\frac{R}{P}\right) = E\left(\left(\frac{R}{P}\right) \middle| \frac{?}{?ß^2}\left(\frac{R}{P}+f\right) - \frac{e}{W_0}\right)$$

$$(30) = E\left(\frac{R}{P} \middle| \frac{R}{P} + f - \frac{?ß^2}{?W_0} e\right)$$

$$= \frac{\overline{R}}{P} \bullet \frac{ß^2 + \left(\frac{?ß^2}{?W_0}\right)^2 z^2}{s^2 + ß^2 + \left(\frac{?ß^2}{?W_0}\right)^2 z^2} + \left(I - \frac{?ß^2}{?W_0} e\right) \bullet \frac{s^2}{s^2 + ß^2 + \left(\frac{?ß^2}{?W_0}\right) z^2}$$

Si la variance z^2 de l'aléa de marché est très grande, on voit que $E^N\left(\frac{R}{P}\right) = \frac{\overline{R}}{P}$ l'observation du prix d'équilibre ne donne aucune information supplémentaire sur le rendement futur de l'actif, au travers du signal reçu par les informés (c'est le cas de marché très liquide décrit dans l'introduction).

On a aussi :

$$(31)\ Var^N\left(\frac{R}{P}\right) = \frac{s^2\left(ß^2 + \left(\frac{?ß^2}{?W_0}\right)^2 z^2\right)}{s^2 + ß^2 + \left(\frac{?ß^2}{?W_0}\right)^2 z^2}$$

Si z^2 (variance de e) est petit, $Var^N\left(\frac{R}{P}\right)$ devient identique à $Var^I\left(\frac{R}{P}\right)$.
Si z^2 est grand, $Var^N\left(\frac{R}{P}\right) = s^2$, puisque les non informés n'apprennent rien en observant les prix de marché.

Finalement, l'équilibre s'écrit :

$$(32)\quad ?\frac{ß^2\frac{\overline{R}}{P} + s^2 I - \left(ß^2 + s^2\right)(1+r)}{?ß^2 s^2} + (1-?)\frac{\left(ß^2 + \tilde{?}^2 z^2\right)\frac{\overline{R}}{P} + s^2\left(I - \tilde{?}e\right) - \left(s^2 + ß^2 + \tilde{?}^2 z^2\right)(1+r)}{?s^2\left(ß^2 + \tilde{?}^2 z^2\right)} = \frac{\overline{S} + e}{W_0}$$

où $\tilde{?} = \frac{?ß^2}{?W_0}$

Une hausse de l'aléa d'offre e a comme second effet (outre l'effet direct sur l'offre) de réduire l'anticipation de rendement de l'actif risqué formé par les non informés, puisqu'elle réduit le prix d'équilibre, ce qui est confondu par les non informés avec un signal I défavorable reçu par les informés.

b – Contrainte active

Nous nous plaçons dans le cas où a^I entraîne un risque de perte catastrophique trop élevé pour les informés. Nous supposons que ce n'est jamais le cas pour les non informés : la qualité de leur information étant inférieure, ils demandent moins d'actif risqué que les informés.

La contrainte de VAR pour les informés s'écrit :

$$(32)\ \text{Proba}^I\left(a^I\left(\frac{R}{P}-(1+r)\right)<-h(1+r)\right)<\Pi$$

où Proba^I est probabilité conditionnelle à l'information détenue par les informés, c'est-à-dire le signal I.

On a vu plus haut que $\frac{R}{P}$, conditionnellement à I, suit une loi normale d'espérance $E^I\left(\frac{R}{P}\right)$ (voir (25)) et de variance $Var^I\left(\frac{R}{P}\right)$.

La demande d'actif risqué (relativement à la richesse) par les informés devient alors (voir (11)).

$$(33)\quad a_*^I=\frac{\dfrac{h(1+r)}{s^I}}{-\ ?-\dfrac{1}{s^I}\left(E^I\left(\dfrac{R}{P}\right)-(1+r)\right)}$$

$$\text{où } s^I=\left(Var^I\left(\frac{R}{P}\right)\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{ß^2 s^2}{ß^2+s^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et a_*^I est inférieur à a^I de (26).

L'équilibre du marché de l'actif risqué s'écrit donc :

$$? \frac{h(1+r)}{-?s^{I} - \left(\frac{ß^{2}}{ß^{2}+s^{2}} \frac{\overline{R}}{P} + I \frac{s^{2}}{ß^{2}+s^{2}} - (1+r) \right)} + (1-?)a^{N} = \frac{\overline{S}+e}{W_{0}} \qquad (34)$$

Puisque la contrainte de *VAR* est active, ceci signifie que a_{*}^{I} est petit, donc que $(-?)$ est grand $(? < 0)$. Ceci nous permet de réécrire (34) comme :

$$\frac{?h(1+r)\left(1 + \frac{1}{(-?)s^{I}} \left(\frac{ß^{2}}{ß^{2}+s^{2}} \frac{\overline{R}}{P} + I \frac{s^{2}}{ß^{2}+s^{2}} - (1+r) \right) \right)}{(-?)s^{I}} + (1-?)a^{N} = \frac{\overline{S}+e}{W_{0}} \qquad (35)$$

ce qui montre que les non informés observent :

$$\frac{?h(1+r)I}{?^{2} ß^{2}} - \frac{e}{W_{0}} \qquad (36)$$

ce qui est l'équivalent de (29).

Pour que la contrainte de *VAR* morde, il faut qu'en moyenne :

$$\frac{\frac{\overline{R}}{P} - (1+r)}{?s^{I}} > \frac{h(1+r)}{(-?)} \qquad (37)$$

donc que $\frac{1}{?}$ soit grand.

Nous supposons donc que $\frac{1}{?} > \frac{h(1+r)}{?^2}$: ceci **implique que, dans le cas où la contrainte de *VAR* joue, les non informés observent une variable (36) où le signal des informés a un poids plus faible que lorsque cette contrainte ne joue pas.** Ceci résulte de ce que, **lorsque la contrainte de *VAR* joue, les informés peuvent moins réagir à leur information privée.**

L'équilibre du marché de l'actif risqué s'écrit donc :

$$? \frac{h(1+r)\left(1+\frac{1}{(-?)s^I}\left(\frac{ß^2}{ß^2+s^2}\frac{\overline{R}}{P}+I\frac{s^2}{ß^2+s^2}-(1+r)\right)\right)}{(-?)s^I}$$

$$(38)\ +(1-?)\frac{\left(ß^2+?^2z^2\right)\frac{\overline{R}}{P}+s^2\left(I-?e\right)-\left(s^2+ß^2+?^2z^2\right)(1+r)}{?s^2\left(ß^2+?^2z^2\right)}$$

$$=\frac{\overline{S}+e}{W_0}$$

$$\text{où } ?=\frac{?^2ß^2}{?h(1+r)W_0} > ?$$

Puisque le poids mis sur I dans (36) par les non informés est faible, leur capacité à extraire de l'information est limitée, ce qui implique que leur demande d'actif risqué a^N dépend moins de I (le coefficient est $\frac{1}{ß^2+?^2z^2}$ au lieu de $\frac{1}{ß^2+?^2z^2}$) que dans le cas précédent ou la contrainte de *VAR* n'apparaissaît pas ; le poids mis sur le l'espérance non conditionnelle $\frac{\overline{R}}{P}$ du rendement de l'actif risqué est plus grand.

c – Comparaison des variabilités du prix d'équilibre de l'actif risqué

Dans les deux cas (contrainte de *VAR* non active ou active), l'équilibre du marché de l'actif risqué peut s'écrire) :

$$(39)\ A\frac{R}{P}=B-CI+De$$

avec :

- **sans contrainte de *VAR***

(39 A)
$$A = \frac{1}{?s^2} \; ; \; C = \frac{?}{?ß^2} + \frac{1-?}{?\left[ß^2 + ?^2 z^2\right]} \; ; \; D = \frac{1}{W_0} + \frac{(1-?)?}{?\left(ß^2 + ?^2 z^2\right)}$$
$$B = (A+C)(1+r) + \frac{\overline{S}}{W_0}$$

- **avec contrainte de *VAR* :**

(39 B)
$$A = \frac{?h(1+r)}{s^2 ?^2} + \frac{1-?}{?s^2}$$
$$C = \frac{?h(1+r)}{?^2 ß^2} + \frac{1-?}{?\left(ß^2 + ?^2 z^2\right)}$$
$$D = \frac{1}{W_0} + \frac{(1-?)?}{?\left(ß^2 + ?^2 z^2\right)}$$
$$B = (A+C)(1+r) + \frac{\overline{S}}{W_0}$$

Rappelons que :

$$\frac{h(1+r)}{?^2} < \frac{1}{?}$$

$$? = \frac{?^2 ß^2}{?h(1+r)W_0} > ? = \frac{?ß^2}{?W_0}$$

$$\begin{cases} \dfrac{R}{P} = \dfrac{\overline{R}}{P} + s? \;\; \text{avec}\, ? \approx N(0,1) \\ I = \dfrac{R}{P} + f \;\; \text{avec}\, ? \approx N\left(0,\, ß^2\right) \\ e \approx N\left(0, z^2\right) \end{cases}$$

R, f et e étant indépendants.

(39) peut donc se réécrire :

$$(40)\ (A+C)\frac{\overline{R}}{P}=(A+C)(1+r)+\frac{\overline{S}}{W_0}-Cs?-Cf+De$$

On a donc :

$$(41)\ E\left(\frac{\overline{R}}{P}-(1+r)\right)=\frac{\overline{S}}{(A+C)W_0}$$

et :

$$(42)\ Var\left(\frac{\overline{R}}{P}\right)(A+C)^2=C^2s^2+C^2ß^2+D^2z^2$$

Sans ambiguïté, lorsque la contrainte de VAR est active, A et C sont plus petits que lorsqu'elle ne l'est pas : à la fois les informés et les moins informés, lorsque la contrainte de VAR est active, réagissent moins aux variations du rendement anticipé de l'actif risqué : les premiers sont contraints, et les seconds, obtenant moins d'information de l'observation du prix, utilisent une variance conditionnelle plus grande pour le rendement qui réduit leur réactivité ; ceci implique que **l'excès de rendement anticipé de l'actif risqué s'accroît lorsque les informés sont soumis à une contrainte de *VAR*.**

On peut aussi montrer d'abord que $\frac{C}{A+C}$ est plus petit avec contrainte de VAR que sans. $\frac{C}{A+C}$ mesure l'effet des aléas qui affectent le signal reçu par les informés ($?$ et f, puisque $I=\frac{\overline{R}}{P}+s?+f$) sur le rendement anticipé de l'actif risqué $\frac{\overline{R}}{P}$. C est petit lorsque la contrainte de VAR est active : les informés réagissent peu au signal qu'ils reçoivent ($\frac{?h(1+r)}{?^2ß^2}$ se substitue à $\frac{?}{?ß^2}$, voir (39 A) et (39 B)) ; les non informés ont une faible capacité à extraire de l'information de l'observation du prix d'équilibre $\left(\frac{1-?}{?ß^2+?^2z^2}\text{ se substitue à }\frac{1-?}{?(ß^2+??^2z^2)}\right)$. De ce fait, **la contrainte de *Value At Risk* réduit la variabilité du prix d'équilibre en réponse aux aléas qui affectent le signal dont disposent les informés.**

- $\frac{D}{A+C}$ est plus grand lorsque la contrainte de *VAR* est active si :

$$(43)\quad \frac{?}{s^{2}}+\frac{?}{ß^{2}}+\frac{1-?}{ß^{2}+\tilde{?}^{2}z^{2}}>\frac{(1-?)^{2}}{?}\frac{ß^{2}}{s^{2}\left(ß^{2}+\tilde{?}^{2}z^{2}\right)}$$

On voit que le sens de cette inégalité dépend des proportions d'informés et de non informés. Regardons les deux situations extrêmes. **Si $?$ est grand,** ($?\approx 1$, il y a surtout des informés), avec contrainte de *VAR*, la réaction des informés aux chocs est très faible, puisqu'ils sont contraints, et la réponse du prix P aux aléas d'offre e est grande.

Si $1-?$ **est grand** ($?\approx 0$, il y a très peu d'informés) que les informés soient contraints ou non ne change rien à l'équilibre (dans (43), $?\approx 0$ et $\tilde{?}=+\infty$ puisque $\tilde{?}=\frac{?ß^{2}}{?W_{0}}$).

Supposons que $?=\frac{1}{2}$ (même proportion d'informés et de non informés). (43) se réécrit :

$$(44)\quad \frac{1}{s^{2}}+\frac{1}{ß^{2}}+\frac{1}{ß^{2}+\tilde{?}^{2}z^{2}}>\frac{\frac{1}{2}ß^{2}}{s^{2}\left(ß^{2}+\tilde{?}^{2}z^{2}\right)}$$

Si $ß^{2}$ (variance du bruit du signal) est petit, $\tilde{?}^{2}$ est petit, et (44) est vérifié : le mécanisme dominant est alors le recul du dynamisme des informés lorsqu'il y a contrainte.

Si $ß^{2}$ est grand, (44) est aussi vérifié, puisque, même si le signal est peu utile, l'activité des informés est réduite : **dans tous les cas, la contrainte de *Value At Risk* accroît la variabilité du prix d'équilibre en réponse aux aléas d'offre (aux aléas de marché) en réduisant la réactivité des informés.**

5 – Bien-être

Il nous reste à examiner les effets sur le bien-être de l'utilisation de modèles de *Value At Risk* par certains investisseurs. L'espérance d'utilité de l'investisseur i est donnée par :

$$(45)\quad \begin{aligned} &\overline{U}_i = \frac{\overline{W}_i^{\,1-?_i}}{1-?_i} - \frac{1}{2}\;?_i\overline{W}_i^{\,-?_i-1}W_0^2 Var\left[\left(\frac{R}{P}-(1+r)\right)a_i\right] \\ &\text{où } \overline{W}_i = W_0(1+r)+W_0 E\left[\left(\frac{R}{P}-(1+r)\right)a_i\right] \end{aligned}$$

$\overline{W}_i$ est l'espérance (non conditionnelle) de la richesse de l'investisseur i et $\frac{R}{P}$ est la réalisation du rendement de l'actif risqué. On a :

$\frac{R}{P} = \frac{\overline{R}}{P} + s?$ où $? \approx N(0,1)$ et $\frac{\overline{R}}{P}$ varie avec l'aléa d'offre $e\left(e \approx N\left(0, z^2\right)\right)$ selon le type d'équilibre, $?$ et e sont indépendants.

a – VAR et aléa d'offre

Nous nous plaçons ici dans le cas de la **section 2,** en conservant les deux cas polaires : aucun investisseur contraint par la *VAR*, tous les investisseurs contraints.

Lorsque aucun investisseur n'est contraint, on a :

$$(46\text{ A})\quad \begin{cases} a_i = \dfrac{\dfrac{\overline{R}}{P}-(1+r)}{?_i s^2} = \dfrac{\overline{S}+e}{W_0 G ?_i} \\ \dfrac{\overline{R}}{P}-(1+r) = \dfrac{s^2\left(\overline{S}+e\right)}{GW_0} \end{cases}$$

Lorsque tous les investisseurs sont contraints, on a :

$$(46\text{ B})\quad \begin{cases} a_i = \dfrac{\overline{S} + e}{NW_0} \\ \dfrac{\overline{R}}{P} - (1+r) = s(-\,?) - \dfrac{h(1+r)NW_0}{\overline{S}} + \dfrac{h(1+r)NW_0 e}{\overline{S}^{2}} \end{cases}$$

Pas de contrainte de *VAR*

Puisque :

$$(47\text{ A})\quad a_i\left(\frac{R}{P} - (1+r)\right) = \frac{s^{2}\left(\overline{S} + e\right)^{2}}{G^{2}W_0^{2}\,?_i} + \frac{s\,?\left(\overline{S} + e\right)}{W_0\,G?_i}$$

On a[9] :

$$(48\text{ A})\quad \begin{cases} E\left[\left(a_i\left(\dfrac{R}{P} - (1+r)\right)\right)\right] = s^{2}\,\dfrac{\overline{S}^{2} + z^{2}}{W_0^{2}G^{2}\,?_i} \\ Var\left[\left(a_i\left(\dfrac{R}{P} - (1+r)\right)\right)\right] \approx \left(\dfrac{2s^{2}\overline{S}}{G^{2}W_0^{2}\,?_i}\right) z^{2} + \left(\dfrac{s\overline{S}}{W_0\,G?_i}\right)^{2} \end{cases}$$

Contrainte de *VAR*

Puisque :

$$(47\text{ B})\quad \begin{aligned} a_i\left(\frac{R}{P} - (1+r)\right) &= \frac{\overline{S}}{NW_0}\left(s(-\,?) - \frac{h(1+r)NW_0}{\overline{S}}\right) \\ &+ \frac{e}{NW_0}\left(s(-\,?) + \frac{h(1+r)NW_0 e}{\overline{S}^{2}}\right) + s\,?\left(\frac{\overline{S} + e}{NW_0}\right) \end{aligned}$$

---

[9] Comme dans tout ce qui suit, pour simplifier, on supposera que $\left(\dfrac{e}{W_0}\right)^{2}$ et $\dfrac{e?}{W_0}$ sont négligeables.

On a :

$$(49\text{ B})\quad E\left[a_i\left(\frac{R}{P}-(1+r)\right)\right]=\frac{\overline{S}}{NW_0}s\,(-\,?)-\frac{h(1+r)NW_0}{\overline{S}}+\frac{h(1+r)}{\overline{S}^{\,2}}z^2$$

et

$$Var\left[a_i\left(\frac{R}{P}-(1+r)\right)\right]=\left(\frac{s\,(-\,?)}{NW_0}\right)^2 z^2+\left(\frac{s^{\,2}\overline{S}}{NW_0}\right)^2$$

et nous savons que :

$$s\,(-\,?)-\frac{h(1+r)NW_0}{\overline{S}}>\frac{s^{\,2}\overline{S}}{GW_0}$$

Pour l’investisseur « moyen », $?_i=\frac{N}{G}$.

Ceci montre que si :

$$(50)\quad \frac{h(1+r)NW_0}{\overline{S}}>\frac{s^{\,2}\overline{S}}{GW_0}$$

(inégalité que nous avons déjà rencontrée plus haut, voir (15’’’), et qui est vérifiée si la variance de l’aléa de revenu $s^{\,2}$ n’est pas trop grande, ce que nous supposerons), alors l’espérance de $a_i\left(\frac{R}{P}-(1+r)\right)$ est plus grande avec contrainte de *VAR*, et puisque $s\,(-\,?)>\frac{2s^{\,2}\overline{S}}{GW_0}$ dans ce cas, la variance de $a_i\left(\frac{R}{P}-(1+r)\right)$ est aussi plus grande.

Les variations de l’espérance et de la variance de $a_i\left(\frac{R}{P}-(1+r)\right)$(notées *dE* et *VAR*) dues à l’apparition de la contrainte de *VAR* sont données par :

$$dE = \frac{\bar{S}}{NW_0}\left(s(-\,?) - \frac{h(1+r)NW_0}{\bar{S}} - \frac{s^2\bar{S}}{GW_0} \right)$$

$$(51)\quad + \frac{z^2}{\bar{S}NW_0}\left(\frac{h(1+r)NW_0}{\bar{S}} - \frac{s^2\bar{S}}{W_0 G} \right) > 0$$

$$dVar = \frac{z^2}{N^2W_0^2}\left(\left(s(-\,?)\right)^2 - \left(\frac{2s^2\bar{S}}{GW_0} \right)^2 \right) > 0$$

La variation du bien-être est proportionnelle à $dE - \frac{1}{2}\frac{N}{G}dVar$.

On se rappelle que $|?|(?<0)$ est grand, ce qui implique que la contrainte de *VAR* est active ; ceci conduit à la conclusion suivante : si (50) est vérifiée (variabilité du revenu de l'actif risqué pas trop grande, ce qui implique que, sans contrainte de *VAR*, la demande d'actif risqué répond suffisamment aux variations du rendement anticipé), et **si la variabilité de l'aléa d'offre (z^2) est assez grande, le fait que la contrainte de *VAR* soit active réduit le bien-être moyen de l'investisseur moyen.**

Si z^2 est très petit, seule la hausse de l'espérance d'excès de rendement importe.

b – VAR et non informés

Nous nous plaçons ici dans le cadre de la **section 4** et nous nous demandons comment le bien-être des non informés est affecté par le fait que les informés sont contraints par la *VAR*. Lorsque la contrainte de *VAR* ne joue pas, on a :

$$(52)\quad a_N = \frac{\left(ß^2 + \tilde{?}^2 z^2\right)\frac{\bar{R}}{P} + s^2\left(I - \tilde{?}e\right) - \left(s^2 + ß^2 + \tilde{?}z^2\right)(1+r)}{?s^2\left(ß^2 + \tilde{?}^2 z^2\right)}$$

pour la demande a_N d'actif risqué des non informés, avec $\tilde{?} = \frac{?ß^2}{?W_0}$. Lorsque la contrainte de *VAR* pèse sur les informés, l'expression de a_N est identique en remplaçant $\tilde{?}$ par $? = \frac{?^2\ ß^2}{?h(1+r)W_0} > \tilde{?}$.

Le rendement anticipé de l'actif risqué résulte de :

$$(53)\quad (A+C)\frac{\overline{R}}{P} = (A+C)(1+r) + \frac{\overline{S}}{W_0} - C(s? + f) + De$$

(voir (40)) où $f \approx N(0, \text{ß}^2)$ est le bruit qui affecte le signal I des informés.

L'espérance de bien-être des non informés est donné par :

$$(54)\quad \overline{U}_N = \frac{\overline{W}_N^{1-?}}{1-?} - \frac{1}{2}\, ?\overline{W}_N^{-?-1} W_0^2 Var\left[\left(\frac{R}{P}\right) a_N\right]$$

$$\text{où}\quad \begin{cases} \overline{W}_N = W_0(1+r) + W_0\left[E\left(\frac{R}{P}\right) a_N\right] \\ \frac{R}{P} = \frac{\overline{R}}{P} + s? \end{cases}$$

et où $\frac{\overline{R}}{P}$ est donnée par (53), A, C et D étant différents selon que la contrainte de *VAR* est active ou non.

On peut réécrire

$$(55)\quad \begin{cases} \frac{R}{P} - (1+r) = \frac{\frac{\overline{S}}{W_0}}{A+C} + \frac{A}{A+C} s? - \frac{C}{A+C} f \\ + \frac{D}{A+C} - e = \frac{\overline{R}}{P} - (1+r) + s? \\ a_N = \left[\frac{\left(\frac{\overline{R}}{P} - (1+r)\right)(s^2 + \text{ß}^2 + ?^2 z^2) + s^2(s? + f - ?e)}{?s^2(\text{ß}^2 + ?^2 z^2)}\right] \end{cases}$$

où $? = ?$ ou $?$.

Sans contrainte de *VAR* :

$$A = \frac{1}{?s^2} ; C + \frac{?}{?ß^2} + \frac{1-?}{?\left(ß^2 + ?^2 z^2\right)}$$

$$D = \frac{1}{W_0} + \frac{(1-?)?}{?\left(ß^2 + ?^2 z^2\right)}$$

Avec contrainte de *VAR* :

$$A = \frac{?h(1+r)}{s^2 ?^2} + \frac{1-?}{?s^2}$$

$$C = \frac{?h(1+r)}{ß^2 ?^2} + \frac{1-?}{?\left(ß^2 + ?z^2\right)}$$

$$D = \frac{1}{W_0} + \frac{(1-?)?}{?\left(ß^2 + ?^2 z^2\right)}$$

$\frac{C}{A+C}$ est plus petit et $\frac{D}{A+C}$ est plus grand avec contrainte de *VAR*.

Si $?$ est très grand (ce que nous supposons pour simplifier) $C \to 0$ avec contrainte de *VAR*, $A \to \frac{1-?}{?s^2}$, $D \to \frac{1}{W_0}$ et $a_N \to \frac{\frac{\overline{R}}{P} - (1+r)}{?s^2}$ (la demande d'actif risqué sans information).

On a :

(56)

$$a_N\left(\frac{R}{P}-(1+r)\right)=\left(\frac{\frac{\overline{S}}{W_0}}{A+C}+\frac{A}{A+C}s?\ -\frac{C}{A+C}f+\frac{D}{A+C}e\right)\bullet$$

$$\frac{1}{?s^{2}\left(\text{ß}^{2}+?^{2}z^{2}\right)}\bullet\left[\begin{array}{l}\frac{\frac{S}{W_0}}{A+C}\left(s^{2}+\text{ß}^{2}+?^{2}z^{2}\right)+\left(s?\ +f\right)\left(s^{2}-\left(s^{2}+\text{ß}^{2}+?^{2}+z^{2}\right)\frac{C}{A+C}\right)\\+e\left(\frac{D}{A+C}\left(s^{2}+\text{ß}^{2}+?^{2}z^{2}\right)-?s^{2}\right)\end{array}\right]$$

Comme on l'a vu plus haut, la contrainte de *VAR* (qui réduit $A+C$) accroît l'espérance de l'excès de rendement ainsi que la moyenne de a_N. Mais il faut aussi tenir compte des liens entre les aléas qui affectent a_N et ceux qui affectent $\frac{R}{P}-(1+r)$.

On obtient :

(57)

$$E\left[a_N\left(\frac{R}{P}-(1+r)\right)\right]=\left(\frac{\frac{\overline{S}}{W_0}}{A+C}\right)^{2}\frac{\left(s^{2}+\text{ß}^{2}+?^{2}z^{2}\right)}{?s^{2}\left(\text{ß}^{2}+?^{2}z^{2}\right)}$$

$$+\frac{\frac{A}{A+C}\left(s^{2}+\text{ß}^{2}+?^{2}z^{2}\right)\frac{C}{A+C}}{?s^{2}\left(\text{ß}^{2}+?^{2}z^{2}\right)}s^{2}$$

$$-\frac{\frac{C}{A+C}\left(s^{2}-\left(s^{2}+\text{ß}^{2}+?^{2}z^{2}\right)\frac{C}{A+C}\right)}{?s^{2}\left(\text{ß}^{2}+?^{2}z^{2}\right)}\text{ß}^{2}=\frac{\frac{Dz^{2}}{A+C}\left(-\frac{D}{A+C}\left(s^{2}+\text{ß}^{2}+?^{2}z^{2}\right)+?s^{2}\right)}{?s^{2}\left(\text{ß}^{2}+?^{2}z^{2}\right)}$$

et :

(58)

$$Var\left[a_N\left(\frac{R}{P}-(1+r)\right)\right]=\left[\begin{array}{l} ?^2\left(s^2-\left(s^2+\text{ß}^2+?^2z^2\right)\frac{C}{A+C}\right)^2 \\ +?^2\left(s^2+\text{ß}^2+?^2z^2\right)\left(\frac{A}{A+C}\right)^2 \end{array}\right]s^2$$

$$+\text{ß}^2\left[?^2\left(s^2-\left(s^2+\text{ß}^2+?^2z^2\right)\right)\left(\frac{C}{A+C}\right)^2+?^2\left(s^2+\text{ß}^2+?^2z^2\right)^2\left(\frac{C}{A+C}\right)^2\right]$$

$$+z^2\left[?^2\left(-\frac{D}{A+C}\left(s^2+\text{ß}^2+?^2z^2\right)+?s^2\right)^2+?^2\left(s^2+\text{ß}^2+?^2z^2\right)^2\left(\frac{D}{A+C}\right)^2\right]$$

$$\text{où } ?=\frac{\frac{\overline{S}}{W_0}}{A+C}\,\frac{1}{?s^2\left(\text{ß}^2+?^2z^2\right)}$$

Prenons un par un les trois aléas :

- **Aléas** $s?$ **sur le revenu futur** (variance s^2) ; sans contrainte de *VAR*, les non initiés bénéficient de l'information tirée des interventions des informés et ceci accroît l'espérance de leur revenu $\left(E\left(a_N\left(\frac{R}{P}-(1+r)\right)\right)\text{croît avec} s^2, s^2>\frac{C}{A+C}\left(s^2+\text{ß}^2+?^2z^2\right)\right)$; avec contrainte de *VAR*, cet effet disparaît, ce qui réduit l'espérance du revenu des informés ; parallèlement, la disparition de l'effet de $?$ sur a_N réduit la variance du revenu (le premier terme du coefficient de s^2 dans (55) disparaît).

- **Aléa** f **sur le signal des initiés** (variance ß^2) ; sans contrainte de VAR, cet aléa réduit l'espérance de revenu des non informés, puisque, si par exemple $f>0, \frac{R}{P}-(1+r)$ diminue et a_N augmente.

La contrainte de *VAR* fait disparaître (à la limite quand $?\to+\infty$), l'effet de cet aléa à la fois sur le rendement d'équilibre $(C\to 0)$ et sur la structure de portefeuille des non informés. On a donc à la fois une hausse de l'espérance de $a_N\left(\frac{R}{P}-(1+r)\right)$ et une baisse de sa variance.

- **Aléa e sur l'offre d'actif risqué** (variance z^2) sans contrainte de *VAR* une hausse de e accroît le rendement d'équilibre de l'actif risqué et réduit la demande d'actif risqué par les non informés $\left(\tilde{?}s^2 > \frac{D}{A+C}\left(s^2+ß^2+\tilde{?}^2z^2\right)\right)$ puisque le signal utilisé par les non informés est $I-\tilde{?}e$ qui décroît avec e. Si la contrainte de *VAR* est active, au contraire a_N croît avec e, puisque le signal n'est plus utilisé, et que $\frac{\overline{R}}{P}-(1+r)$ croît avec e. Ceci accroît l'espérance de revenu des non informés (quand $? \to +\infty, E\left(a_N\left(\frac{R}{P}-(1+r)\right)\text{croît avec}\, z^2, \text{voir (57)}\right)$. On voit aussi sur (58) que, quand $?$ augmente, $?\left(s^2+ß^2+?^2z^2\right)$ diminue, ce qui reflète la baisse de la valeur moyenne de a_N quand la contrainte de *VAR* devient active ; il en résulte une baisse de la variance du revenu des non informés.

Résumons dans le tableau ci-dessous.

Effets d'une contrainte de *VAR* active sur les informés

Aléa dominant	Espérance du revenu des non informés	Variance du revenu des non informés	Effet sur le bien-être des non informés
Aléa de revenu $s?$	-	-	?
Aléa sur le signal des informés f	+	-	+
Aléa sur l'offre d'actif risqué e	+	-	+

Ceci montre, comme il est naturel, que la réduction de la réactivité des informés en raison **de la contrainte de *Value At Risk* accroît le bien-être des non informés dans tous les cas où les aléas rendent plus imprécise l'extraction d'information par les non informés** à partir de l'observation du prix d'équilibre des actifs risqués.

Si f (bruit qui affecte le signal des informés) ou e (aléa sur l'offre d'actifs risqués ou *noise trading*) ont une variante forte, le fait que la contrainte de *VAR* empêche les non informés d'utiliser l'évolution des prix d'équilibre pour obtenir de l'information sur le signal reçu par les informés accroît le bien-être des non informés puisque ce signal est de mauvaise qualité ou que la capacité à l'interpréter est limitée.

SYNTHÈSE

Nous avons obtenu les résultats suivants, quant aux effets de l'utilisation des modèles de *Value At Risk* par les investisseurs ou par une catégorie d'investisseurs :

- **cette utilisation accroît**, toutes choses égales par ailleurs, **l'excès de rendement anticipé des actifs risqués, et accroît,** sous des hypothèses raisonnables, **la variabilité de leur prix d'équilibre**. Ceci est dû à la réduction de la réactivité aux variations des rendements anticipés qui est due à la présence de contrainte liée à l'utilisation des modèles de *VAR* par les investisseurs les moins adverses au risque. Sous ces mêmes hypothèses, **le bien-être de l'investisseur moyen est réduit ;**

- **cette utilisation accroît la chute du prix d'équilibre des actifs risqués lorsque les investisseurs révisent à la hausse la variabilité de leur revenu futur.** Ceci correspond à l'impression que la **liquidité de marché** s'effondre lorsque la perception du risque s'accroît. En fait, une hausse de l'anticipation de variance du rendement des actifs risqués, comme celle qui a eu lieu en 1998 et en 2000 aux États-Unis, implique que de nombreux investisseurs doivent réduire leur détention d'actifs risqués, en raison de l'utilisation des modèles de *VAR*, d'où la chute du prix de ces actifs ;

- s'il y a deux catégories d'investisseurs, les informés et les non informés, et si les premiers seulement peuvent être contraints par l'utilisation de modèles de *VAR* parce que leur demande d'actifs risqués est plus forte que celle des seconds, le fait qu'ils soient contraints par cette utilisation réduit la capacité des non informés à obtenir de l'information, au travers de l'observation des prix d'équilibre des actifs risqués, sur les rendements futurs de ces actifs.

Ceci réduit normalement le bien-être des non informés si les informés avaient une information assez précise et assez précisément transmise aux marchés sur ces rendements futurs, le réduit dans les autres cas. Systématiquement, le fait que les informés soient contraints, fait baisser en moyenne le prix d'équilibre des actifs risqués.

Ce qui précède montre que si **l'utilisation des modèles de *Value At Risk* réduit la détention d'actions risqués de certains investisseurs ou de tous les investisseurs, on aura l'impression que les marchés de ces actifs deviennent**

moins liquides : les prix des actifs risqués baissent en moyenne leur réaction aux aléas de marché est accrue.

Le seul effet favorable de l'utilisation des modèles de *VAR* apparaît lorsque ceux qui les utilisent communiquaient au marché des informations brouillées ou difficilement utilisables. La moindre activité de ces investisseurs réduit alors la perturbation des marchés que leurs opérations impliquaient lorsqu'ils n'étaient pas contraints par les modèles de *VAR*.

RÉFÉRENCES

Artus P. (1999): «Pourquoi la volatilité est-elle restée forte sur tous les marchés financiers après la crise de l'été 1998 ? » *Document de Travail*, n° 1999-13/FI, octobre.

Benartzi S., Thaler R. (1995): «Myopic Loss Aversion and the Equity Premium Puzzle" » *Quarterly Journal of Economics*, 110, pp. 73-92.

Chauveau Th., Nalpas N. (1998): «L'altération prudente des probabilités comme solution à l'énigme de la prime de risque », *Document de Travail*, *Caisse des Dépôts et Consignations*, n°1998-04/FI, décembre.

De Long J.B., Schleifer A., Summers L.H., Waldmann R.J. (1990): «Noise Trader Risk in Financial Markets », *Journal of Political Economy*, 98, pp. 703-738.

Gennotte G., Leland H. (1990): «Market Liquidity, Hedging and Crashes », *The American Economic Review*, décembre, pp. 999-1021.

Grossman S., Stiglitz J.E. (1980): « On the Impossibility of Informationally Efficient Markets », *American Economic Review*, 70, 3, pp. 39-408.

Grundy B., Mc Nichols M. (1989): « Trade and the revelation of information through prices and direct disclosure », *Review of Financial Studies*, 2, pp. 495-526.

Gul F. (1991) : « A Theory of Disappointment Aversion », *Econometrica, 59*, 3 pp. 667-686.

Jackson P. (1995): « Risk Measurement and Capital Requirements for Banks », Bank of England Quarterly Bulletin, May, pp. 177-184.

Jackson P., Maude D., Perraudin W. (1998): «Bank Capital and Value At Risk», *Bank of England Working Paper* n° 79, mai.

Kyle A.S. (1985): « Continuous auctions and insider trading », *Econometrica*, pp. 1315-1335.

Leland H.E. (1992): « Insider Trading : Should it be prohibited ? », *Journal of Political Economy*, 100, 4 août pp. 859-887.

Milne A., Whalley A.E. (1999): « Bank Capital and Risk-Taking », *Bank of England Working Paper* n° 90, janvier.

Shleifer A., Summers L.H. (1990): « The Noise trader Approach to Finance », *Journal of Economic Perspectives*, 4 n° 2, spring, pp. 19-33.