Espérance de vie contre espérance des flux

dans le cas des RENTES VIAGERES de montants inégaux :

l'exemple de la loterie-tontine de 1743

Georges GALLAIS-HAMONNO*
Georges.gallais-hamonno@univ-orleans.fr

Nicolas ZAMFIRESCU**
zamfi@labomath.univ-orleans.fr

Communication proposée pour les
19èmes Journées Internationales d'Economie
Monétaire et Bancaire
GDR Economie monétaire et financière
Lyon, 6 et 7 JUIN 2002

ASSURANCE

Version provisoire

*Professeur à l'Université d'Orléans et Directeur de recherche au LEO (UMR 6586)
Faculté de Droit, Economie et Gestion, BP 6739, 45067 Orléans CEDEX 2
**Enseignant-chercheur à l'Université d'Orléans et chercheur au LEO (UMR 6586)
Département de Mathématiques, BP 6759, 45067 Orléans CEDEX 2

Espérance de vie contre espérance des flux

dans le cas des RENTES VIAGERES de montants inégaux :

l'exemple de la loterie-tontine de 1743

Résumé

A partir d'une analyse de la loterie-tontine de 1743, ayant pour but de mesurer l'espérance du coût pour l'émetteur, nous sommes amenés à contester la validité de la méthode « classique » de tarification des rentes viagères fondée sur le principe de la durée de vie moyenne.

Pour calculer le taux actuariel émetteur nous sommes amenés à nous poser la question de la détermination des cash-flows liés aux lots de rentes viagères de montants différents. Dans un premier temps nous calculons, par simulation de la loterie-tontine, les taux actuariels émetteurs suivant la méthode de la « vie moyenne » puis, à partir d'une seconde séries de simulations utilisant la loi de mortalité, celle de la « moyenne des flux » liés aux rentes viagères. Une comparaison de ces résultats nous permet de mettre en lumière l'existence, d'une part, d'un « risque de montant » que courent, peut être sans le savoir, les compagnies d'assurance sur la vie qui emploieraient la méthode de la « vie moyenne » pour leurs calculs et, d'autre part, d'un risque « caché » pour l'émetteur, que l'on pourrait baptiser « risque Jeanne Calment », qui serait celui de se trouver confronté à des taux extrêmes.

*Les auteurs remercient M. Benoît Hassan, étudiant en MST Finance pour l'aide apportée dans le domaine informatique lors d'un stage effectuer au LEO

Introduction

L'ingénierie financière du 18ème siècle n'avait rien à envier à celle de notre époque en ce qui concerne l'originalité et la complexité des « packages » proposés aux épargnants.

Un cas emblématique semble être celui de la « loterie-tontine » qui combinait à la fois trois techniques : la loterie, les emprunts tontiniers et la rente viagère.

Indépendamment de l'aspect « curiosité historique », l'analyse de la loterie-tontine de 1743 nous amène à contester la validité de la méthode « classique » de tarification des rentes viagères fondée sur le principe de la durée de vie moyenne.

Après avoir présenté les spécificités techniques de cette loterie-tontine (Section 1), nous expliquons la méthode employée et déterminons la distribution des taux actuariels émetteurs suivant la méthode de la « vie moyenne » (Section 2). Les résultats obtenus sont analysés et comparés à ceux issus d'une utilisation de la loi de mortalité et des flux moyens pour le calcul de ces mêmes taux actuariels (Section 3).

La « valeur ajoutée » de cette étude est la mise en lumière d'un « risque de montant » que courent, peut être sans le savoir, les compagnies d'assurance sur la vie qui emploieraient la méthode de la « vie moyenne » pour leurs calculs.

Section 1. Le cas d'espèce historique : la loterie-tontine de 1743.

L'année 1740 voit recommencer les guerres européennes. Le décès de l'empereur d'Autriche Charles VI ouvre la guerre de succession d'Autriche. Marie-Thérèse voit ses droits contestés par tous les princes européens et l'occasion semble venue pour la France de prendre sa revanche sur le traité d'Utrecht. Mal lui en prend car, à partir de 1743, alliée à la seule Espagne, la France doit faire face à une grande coalition constituée de l'Autriche, l'Angleterre, Le Hanovre, la Hollande, la Sardaigne et la Saxe[1].

Le Contrôleur général Orry finance cette guerre en utilisant les différents modes d'emprunts publics, parmi lesquels une formule tout à fait curieuse, la « *loterie-tontine* ».

[1] Grâce aux victoires du Maréchal de Saxe, dont Fontenoy en 1745, la paix est signée en 1748 à Aix-la-Chapelle.

§ 1.1.. La loterie-tontine de janvier 1743

En janvier 1743, Orry ouvre une loterie de 9 millions de livres[2], composée de 30 000 billets de 300 livres. Il y a 9 000 billets gagnants dont : 4 000 reçoivent un lot en espèces allant de 100 000 livres (environ 1.524.500 euros) à 500 livres (environ 7.622 euros) et 5 000 reçoivent des rentes purement viagères, allant de 4 000 livres (60.980 euros) à 36 livres (549 euros) (Le détail des lots est donné dans le tableau ci-dessous). *Les 21 000 billets perdants bénéficient d'un lot de consolation : une rente tontinière composite de 15 livres avec un accroissement de moitié*, l'autre moitié revenant à l'État[3]..

Tableau 1

Lots des loteries-tontine de 1743

Lots en espèces		Lots en rentes viagères	
Nombre	Montant (Livres)	Nombre	Montant (Livres)
1	100 000	1	4 000
1	50 000	1	3 000
2	30 000	1	2 000
4	20 000	2	1 000
7	15 000	5	900
10	10 000	10	800
20	5 000	15	500
30	3 000	25	300
40	2 000	40	200
235	1 000	50	100
300	800	100	80
850	600	150	70
2 500	500	200	60
		400	50
		1 000	40
		3 000	36
4000	**3 000 000**	**5 000**	**250 000**

Source : *Édit* de création, *loc.cit.*

La rente tontinière est une variante de la rente viagère dans laquelle les arrérages dus par l'Etat, au lieu de s'arrêter au décès du tontinier, continuent à être versés et sont répartis entre les survivants de sa classe d'âge. Cette « tontine de 1743 » possède deux particularités. D'une part elle est « composite » en ce sens que seulement la moitié des arrérages est reversée par l'Etat aux survivants de la classe d'âge. D'autre part le montant de la rente (très faible en l'occurrence) n'est pas une fonction inverse de l'âge des souscripteurs.

Cette loterie est un gros succès puisqu'elle doit être close en moins d'un mois. Malgré leur dextérité, les commis des bureaux de souscriptions n'arrivent pas à arrêter à temps ces dernières et 275 billets sont souscrits en plus ! (Le succès a été tellement rapide que les

[2] « A la louche » on peut admettre l'équivalence d'*une* livre du 18ème siècle avec 100 FRF soit 15.24 euros

[3] "*Édit du Roy pour l'établissement d'une Loterie Royale Et création de rentes tant viagères qu'en forme de Tontine*", Versailles, janvier 1743. [B.N. : F 23625 (68)].

provinciaux et les étrangers n'ont pas eu le temps de réagir : à leur intention une seconde loterie-tontine exactement identique est ouverte en février[4])

Ce succès semble logique car cette loterie-emprunt est peu rentable pour l'État. Au départ il rétrocède aux gagnants 3 millions de livres sur les 9 reçus. Et les 6 autres millions donnent lieu soit à des rentes viagères, soit à des rentes tontinières[5].

Le tableau ci-dessous présente, à partir des documents disponibles[6], l'état des souscripteurs « perdants », c'est à dire ceux qui ont reçu la rente tontinière en consolation.

Tableau 2

Résultats de la loterie-tontine de janvier 1743 (6e tontine)

[Souscription de 30 275 billets de 300 LL : 9 000 lots gagnants et 21 275 lots de consolation : 15 LL de rente tontinière avec un accroissement de moitié]

Classe	ÂGE	Billets tontiniers			Hypothèses sur l'émission totale	
		Nb. de billets Souscrits*	SOUSCRIP -TIONS	ARRÉRAGES Livres	Nb. total de billets souscrits (1)	Nb. de billets par souscripteur (2)
1	0-5	1 206	531	18 090	1 716	2.271
2	5-10	2 110	1 527	31 650	3 003	1.382
3	10-15	2 570	1 756	38 550	3 657	1.464
4	15-20	1 880	1 191	28 200	2 675	1.579
5	20-25	2 000	1 261	30 000	2 846	1.586
6	25-30	1 498	1 052	22 470	2 132	1.424
7	30-35	1 971	1 164	29 565	2 805	1.693
8	35-40	1 962	1 270	29 430	2 792	1.545
9	40-45	2 042	1 295	30 630	2 906	1.577
10	45-50	1 525	859	22 875	2 170	1.775
11	50-55	724	423	10 860	1 030	1.712
12	55-60	1 190	465	17 850	1 694	2.559
13	60-65	388	129	5 820	552	3.008
14	65-70	149	50	2 235	212	2.980
15	Plus de 70	60	24	900	85	2.500
Total		**21 275**	**12 997**	**319 125**	**30 275**	

Sources : *Édits* de janvier 1743 [B.N. : F 23625 (68)]et de février 1743 [B.N. : F 23625 (75)] ; compilation de la *liste des Rentes Viagères..., op. cit.* [B.N. = LF 80-2 (1749)].

(1) Estimation du nombre de billets souscrits par classe : nombre de billets tontiniers souscrits par classe x (Nb. total de billets souscrits/Nb. de billets tontiniers)

(2) Estimation du nombre de billets par souscripteur : même ratio que celui des billets tontiniers

* Après retrait des titres ayant gagné un lot en espèces ou en rente viagère.

[4] *Édit du Roy pour l'établissement d'une seconde Loterie Royale et création de Rentes, tant viagères qu'en forme de Tontine*, Versailles, février 1743, Registré en Parlement le 8 mars 1743, 8 p. [B.N. : F 23625 (75) à (78)].

[5] Le lecteur intéressé par les aspects historiques et actuariels des « tontines » est invité à lire : G. Gallais-Hamonno et J. Berthon « Un financement public original au 18ème siècle : les emprunts tontiniers » à paraître *in* Volume I, « *Trois siècles d'histoire financière française* » (G. Gallais-Hamonno et alii ed.), Comité pour l'Histoire Economique et Financière de la France, 2003

[6] En effet, les documents disponibles ne concernent que les tontiniers et nous ignorons le nombre de lots en espèces ou en rentes viagères reçus par les différentes classes d'âge.

Ce qui est curieux à propos de cette loterie-tontine comportant des lots en rentes viagères et tontinières est qu'elle a été émise par l'Etat alors que celui-ci n'avait pas à sa disposition de loi de mortalité (cette dernière n'a été publiée qu'en 1746 par Antoine Deparcieux) et donc était dans l'incapacité d'évaluer le risque et le coût sous-tendu par cette opération.

Il nous a paru donc intéressant de calculer le coût actuariel à l'émission de la loterie (ce qu'auraient « dû » faire les commis du Contrôleur général) en utilisant la loi de mortalité de Deparcieux.

§ 1.2.. La table de mortalité de Deparcieux

En 1746, un membre de l'Académie Royale de Marseille, Antoine Deparcieux publie un ouvrage de 132 pages : « *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine* [7]». Antoine Deparcieux y présente la première table de mortalité française, calculée sur la base des décès effectifs des souscripteurs des deux premiers emprunts tontiniers, celui de 1689 et celui de 1696 ! La source de ses données est évidente : les listes annuelles de décès nominatifs établis par les syndics onéraires de chacune des classes. Comme ces listes ne précisent pas l'âge du rentier à la souscription, Deparcieux ne peut pas calculer l'âge moyen réel des souscripteurs. Son problème essentiel est donc celui de déterminer le « centre de classe », c'est à dire l'âge auquel l'ensemble des rentiers d'une classe sont censés avoir souscrit et sur la base duquel l'âge des décédés ainsi que leur durée de survie seront mesurés. Pour ce faire, l'auteur fait une analyse socio-psycho-économique étonnamment moderne.

Pour la première classe, les enfants jusqu'à cinq ans, il suppose qu'ils ont en moyenne *3 ans* au 1er janvier 1690, afin de tenir compte de la très forte mortalité infantile à l'époque, car dit-il : « Il y a moins à compter sur la vie d'un enfant de deux ans »[8].

---

[7] BN : V 7332 pour l'édition de 1746 ; V 7331 (1) et V7331 (2) (dans le même volume) pour l'édition de 1760 qui comprend en outre les *Objections* (16 pages de réponses à deux lettres ouvertes de critiques méthodologiques d'un certain sieur Thomas) et les *Additions à l'Essai* (32 pages et 1 tableau). En fait l'*Essai* lui-même ne fait que 97 pages car les 32 premières pages sont constituées par une partie intitulée : « Des rentes à terme ou annuités ». Cette partie constitue le premier « manuel » d'actuariat en langue française. Y sont démontrées (en livres, sols et deniers) et tabulées les principales formules actuarielles en usage aujourd'hui.

[8] Il a dramatiquement raison. Smart sur Londres trouve 586 décès jusqu'à trois ans sur 1280 personnes de tous milieux, soit un taux de 46 % ! La situation est un peu meilleure pour la bourgeoisie hollandaise étudiée par Kerseboom : 370 décès sur 1400 individus, soit un taux de 26 %.

Pour les autres classes (5-10, 10-15,...) qui vont de cinq en cinq ans, Deparcieux choisit un centre de classe un peu inférieur au centre « arithmétique », (7 ans et demi, 10 ans et demi,...) parce qu'il suppose un comportement opportuniste. Deparcieux pense que les souscripteurs qui avaient 4 ans et demi, 9 ans et demi,... au moment de la publication des édits, ont attendu 4 mois pour passer leur contrat de constitution (sous réserve de la date de clôture) afin d'être parmi les plus jeunes de la classe supérieure plutôt que d'être parmi les plus vieux de la classe inférieure ! C'est pourquoi Antoine Deparcieux choisit un âge un peu inférieur à l'âge arithmétique : 5 ans, 7 ans, 12 ans, 17 ans et ainsi de suite[9]. Sur ces bases, il calcule sa table de mortalité qui est présentée en annexe.

La première colonne, nombre « *de morts à chaque âge* », peut se lire directement comme un pourcentage (en divisant par 10) puisqu'il présente ses calculs sur la base de 1000 enfants souscrivant à trois ans. La seconde colonne mesure « *les personnes vivant à chaque âge* » : le nombre de vivants à l'âge précédent moins le nombre de morts à l'âge étudié. La troisième colonne donne la « *vie moyenne* » (en années et mois), à chaque âge ; en termes plus modernes, il s'agit de « l'espérance de vie » quand on atteint un âge donné [10].

Tous les calculs qui suivent utilisent cette *Table de mortalité* de Deparcieux. Nous faisons l'hypothèse, habituelle en économie, du « comme si » : tout se passe comme si l'Etat émetteur connaissait cette Table qui détermine les deux séries de cash-flows auxquelles il doit faire face :

- les cash-flows liés aux rentes tontinières qui sont payées tant que la classe d'âge a un représentant en vie (en l'occurrence, selon Deparcieux, jusqu'à 94 ans et demi)[11], cash-flows qui vont en diminuant puisque seule la moitié des arrérages des décédés est reversée aux survivants ;
- les cash-flows liés aux rentes viagères qui doivent être payées tant que les gagnants sont en vie.

---

[9] A. Deparcieux est parfaitement conscient de l'aléa moral que comporte un tel emprunt. « *Un nombre quelconque de Rentiers viagers doit en général mourir moins vite qu'un pareil nombre d'autres personnes prises indistinctement* » (p. 61). Parce que les souscripteurs seront ceux qui pensent être de *« bonne constitution »*. « *Les souscripteurs ne sont pas pour l'ordinaire, ni les grands Seigneurs, ni les misérables, dont la santé est souvent minée dans un âge peu avancé, les premiers par leurs excès, les autres par leur misère* », (p. 62).

[10] Contrairement à ce qu'on imagine l'espérance de vie de la bourgeoisie du 17e siècle est assez élevée. Faible au départ (48 ans à 3 ans), elle décroît lentement et donne des âges théoriques de décès élevés : 60 ans à 20 ans, 67 ans à 40, 70 ans à 50, et 74 ans à 60 ans. Au 17e siècle comme aujourd'hui il faut survivre !

[11] Les héritiers des souscripteurs décédés ont droit à la rente (tontinière ou viagère) de l'année du décès au *prorata temporis*. En pratique nous supposons que tous les décès ont lieu le 30 juin ce qui implique que la moitié de la rente viagère et le quart de la rente tontinière (soit 3 livres et 15 sols) sont payés aux héritiers.

Section 2. Calcul du coût émetteur en utilisant la vie moyenne.

Il est parfaitement évident que le calcul du taux actuariel émetteur passe par la détermination en premier lieu de ces deux types de cash-flows.

Si la détermination des cash-flows liés aux rentes tontinières, qui sont d'un montant égal de 15 LL, ne pose aucun vrai problème « mécanique » (en utilisant la table de Deparcieux on détermine le nombre de souscripteurs décédés par année et par classe d'âge, décès que l'on transforme en nombre de « titres tontiniers morts » en utilisant le Tableau 2[12], titres auxquels on applique la règle de report aux survivants de la classe d'âge jusqu'à l'extinction du dernier) il n'en est pas de même pour les cash-flows liés aux rentes viagères.

En effet, les lots en rentes viagères sont d'un montant très inégal (cf Tableau 1) et les cash-flows liés à ces rentes viagères ne sont payés que tant que les gagnants sont en vie. Il s'en suit, s'agissant d'une loterie, que les cash-flows payés par l'Etat dépendront du hasard de la distribution des montants et du nombre de rentes viagères aux seins des classes d'âge et de la durée de vie de ces rentes. Suivant le hasard de la distribution des lots en rentes viagères aux seins des classes d'âge et la méthode retenue pour la détermination de leurs durée de vie, sachant cette répartition, on obtient non pas un seul taux actuariel émetteur mais une série de tels taux.

Dans un premier temps nous allons retenir, comme critère de durée de vie d'un lot en rente viagère appartenant à une classe d'âge, la durée de vie moyenne de cette classe, déterminée à partir de la table de Deparcieux.

§ 2.1. Les données

Les tableaux précédents et ainsi que de la table de mortalité de Deparcieux, donnée en annexe, sont notre unique source ce qui oblige à trois hypothèses :

[12] Un problème lié aux arrondis, que nous avons dû résoudre, est apparu ici : à cause du nombre non entier de titres supposé être détenu par souscripteur, le nombre de titres morts par année n'était pas entier et les arrondis ne se sont pas compensés ; on a pu ainsi observer des cas, lors des simulations, où le nombre total arrondi des titres morts à la fin différait de celui souscrit au départ.

1. La répartition du nombre total de billets retenu par classe (lots en espèces, en rentes viagères et en rentes tontinières) est celui estimés à partir de la répartition historique[13].
2. Le nombre de souscriptions représente aussi le nombre de souscripteurs[14] (hypothèse qui revient à supposer que les souscripteurs n'ont pas souscrit dans plusieurs divisions à la fois au sein d'une même classe)
3. Le nombre de billets détenu par un souscripteur d'une classe d'âge est celui estimé à partir de celui observé en moyenne pour les billets tontiniers (ratio du nombre des billets souscrits par le nombre des souscriptions de la classe)

Nous retiendrons donc pour nos calculs les données des deux dernières colonnes du Tableau 2. et considérerons comme fixes les nombres totaux de billets souscrits par classe d'âge donnés dans ce tableau.

§ 2.2. La méthode de simulation de la loterie

Pour tenir compte des caractères aléatoires de la loterie, de la distribution des lots au sein de chaque classe, par nature et montant, et des cash-flows qui en résultent nous avons simulé cette loterie-tontine à l'aide de tirages au hasard des lots et de leur répartition aléatoire dans les classes.

2.2.1. Tirage au sort des lots

Le principe de la loterie est dupliqué : les 30 275 billets vendus sont attribués au hasard aux 15 classes. Un second tirage au hasard attribue aléatoirement, et par montant, d'abord les lots en espèces et ensuite les lots en rentes viagères (les lots en tontines en résultent comme différence entre le nombre de lots par classe et celui des lots en espèces additionné de celui en rentes viagères)

---

[13] Comme seule est connue la répartition des billets tontiniers (cf Tableau 2) nous sommes obligés de supposer que les différents lots ont été attribués *au prorata* de la taille de chaque classe.

[14] Nous ignorons aussi, ce qui est plus gênant pour notre propos, le nombre de souscripteurs. Dans un but marketing, des sous-groupes appelés « divisions » sont crées dans chaque classe d'âge afin de permettre aux souscripteurs de diversifier leurs « chances de survie » par rapport à leurs co-tontiniers et les inciter à effectuer plusieurs « souscriptions » rendant ainsi plus facile et plus rapide la vente de la totalité de l'émission.

2.2.2. Calcul des cash-flows correspondants.

Pour chaque classe on regroupe le montant des lots en rentes viagères et en rentes tontinières, la loi de mortalité intervenant de deux manières différentes :

- Pour les cash-flows des rentes tontinières le taux de décès annuel (rapport du nombre de décès en année t sur le nombre de vivants en fin d'année $t-1$ de la table de Deparcieux) détermine le nombre de tontiniers morts durant l'année t dans chaque classe d'âge. Ce nombre détermine à son tour le nombre de billets tontiniers « morts » dans chaque classe en utilisant la dernière colonne du Tableau 2. Ceci nous permet enfin de calculer la part de l'arrérage total qui est conservé par l'Etat et la part qui est reportée sur les survivants de la classe. Chaque classe s'éteint quand le dernier survivant meurt à 94 ans et demi. Les cash-flows annuels par classe, correspondant aux rentes tontinières, sont obtenus en additionnant la part des arrérages reportés sur les survivants et les rentes tontinières qui leur sont dues.

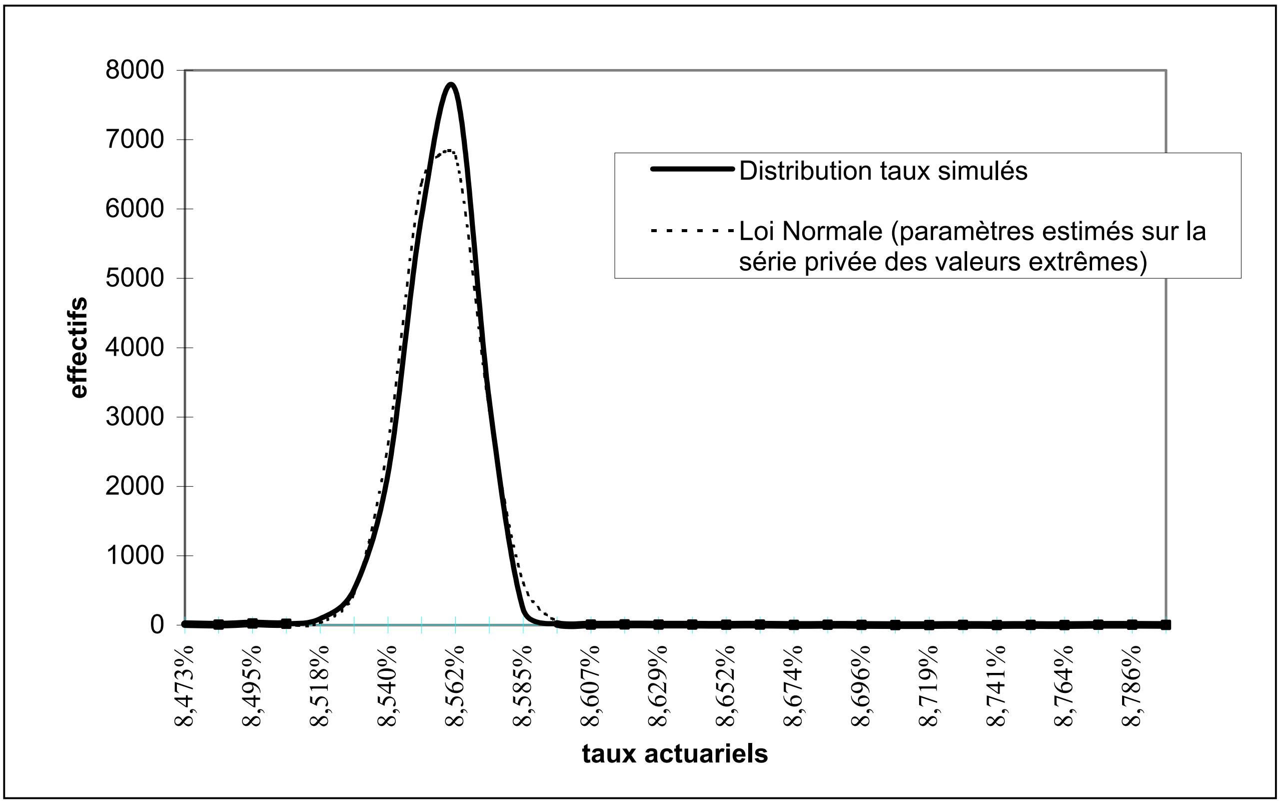
- Pour les cash-flows des rentes viagères, le calcul « classique » a été adopté, qui consiste à ce que l'Etat verse la totalité du montant des rentes viagères attribué à la classe pendant « la durée de vie moyenne » (et la moitié la dernière année). Cette « durée de vie moyenne » est celle calculée par Deparcieux pour l'âge de chaque centre de classe.

Enfin, ces deux séries de cash-flows annuels sont additionnées pour les 15 classes et le taux actuariel de rendement est calculé pour chaque simulation de cette loterie-tontine.

§ 2.3. Les résultats.

Le tableau ci-dessous ainsi que le Graphique 1 synthétisent la distribution des taux actuariels à l'émission obtenus à partir de **20 000 simulations**.

Moyenne	0,08552278	**Test du χ^2 d'adéquation à une loi normale**	
écart-type	0,00014168	Moyenne et écart type estimés à partir de	**m =** 0,08551949
Skewness	3,29153125	la série privée de 54 valeurs extrêmes	**σ =** 0,00011757
Kurtosis	54,8915192	Probabilité de se tromper en rejetant l'adéquation	**P = " 0 "** (pour Excel)



Classes	Effectifs observés	Probabilité Loi Normale	Effectifs théoriques
0,08472964	15	9,26E-12	2,E-07
0,08484139	8	4,03E-09	8,E-05
0,08495314	22	7,26E-07	1,E-02
0,0850649	18	5,45E-05	1,09
0,08517665	93	1,72E-03	34,35
0,0852884	515	0,022908	458,15
0,08540016	2176	0,130386	2607,72
0,08551191	5903	0,319249	6384,97
0,08562366	7708	0,337900	6758,00
0,08573542	3230	0,154651	3093,01
0,08584717	227	0,030475	609,50
0,08595892	16	2,57E-03	51,32
0,08607068	6	9,15E-05	1,83
0,08618243	9	1,37E-06	0,03
0,08629419	8	8,57E-09	2,E-04
0,08640594	7	2,22E-11	4,E-07
0,08651769	5	2,38E-14	5,E-10
0,08662945	7	0	0,E+00
0,0867412	2	0	0
0,08685295	4	0	0
0,08696471	2	0	0
0,08707646	1	0	0
0,08718821	0	0	0
0,08729997	2	0	0
0,08741172	1	0	0
0,08752347	3	0	0
0,08763523	1	0	0
0,08797051	11	0	0

On constate que la distribution des taux actuariels est asymétrique et est caractérisée par une très, très forte Kurtosis et par un grand nombre de valeurs extrêmes. On trouve **18 taux** au-delà de la moyenne plus ***quatorze*** fois l'écart type (si l'échantillon avait été gaussien, en utilisant la loi du *sup* des X_i , on trouve que la probabilité de trouver, sur un échantillon de longueur 20 000, au moins une valeur au–delà de ce seuil, , est « ***nulle*** » pour Excel). Ces remarques rendent inutile un test de « normalité », test que nous avons effectué quand même pour satisfaire à une certaine habitude en matière de simulations par tirage au sort.

Après réflexion, les résultats trouvés à l'aide de ces simulations, concernant la distribution des taux actuariels émetteur, ne sont pas surprenants. En effet, la méthode utilisée de la vie moyenne et le paiement durant toute cette période de la totalité des montants des rentes viagères attribuées à une classe pour le traitement rentes viagères, ne prend pas en compte le fait que les montants de ces rentes sont extrêmement différents. Les taux extrêmes obtenus proviennent de tirages qui ont attribué «les gros lots » soit à la classe ayant la durée de vie moyenne la plus longue (en l'occurrence la 2ème classe) soit à la dernière, qui disparaît « en bloc », suivant la vie moyenne, huit ans plus tard.

Section 3. Calcul du coût émetteur en utilisant la loi de mortalité.

Le problème doit être traité différemment : au lieu d'utiliser la durée de vie moyenne pour déterminer les flux, moyenne qui ne rend pas compte de la distribution dont elle provient, il faut utiliser la loi de mortalité complète pour les calculer. Certes, il vaut mieux pour l'Etat que les gros lots de rentes viagères soient reçus par la 15ème classe plutôt que par la 1ère ou la seconde mais, quelle que soit la classe, il se peut que l'Etat ne soit obligé de les payer, à la limite, que pendant une demi année seulement, si le décès des « gros gagnants » est « prématuré », ou , bien au contraire, pendant très longtemps si ces souscripteurs vivent très au-delà de la vie moyenne de leur classe d'âge.

§ 3.1. La procédure de double simulation.

Pour rendre compte de la loi de mortalité et des « décès des rentes viagères et de leur montant » avec le temps, nous avons procédé à une simulation plus complexe.

Le démarrage est le même que précédemment : attribution aléatoire des billets et de leurs gains aux 15 classes.

Dans chaque cas de figure ainsi obtenu, on utilise ensuite la loi de mortalité pour simuler, à l'intérieur de chaque classe, les décès dans le temps des souscripteurs (dont on connaît les lots). Cette simulation de décès détermine *une* série possible de cash-flows de rentes viagères. Pour tenir compte du caractère aléatoire des décès et donc des flux, cette simulation «interne », à une distribution aléatoire **donnée** de billets, est effectuée ***1 000 fois***. A partir de ces 1 000 séries de flux on détermine la série de cash-flows moyens par configuration. On ajoute la série des rentes tontinières à cette espérance des flux relatifs aux rentes viagères, on calcule le taux actuariel correspondant à la configuration, et on recommence.

En résumé, pour les rentes viagères, on a remplacé l'espérance de vie d'une classe par l'espérance des flux générés par la loi de mortalité de cette classe.

§ 3.2. Les résultats

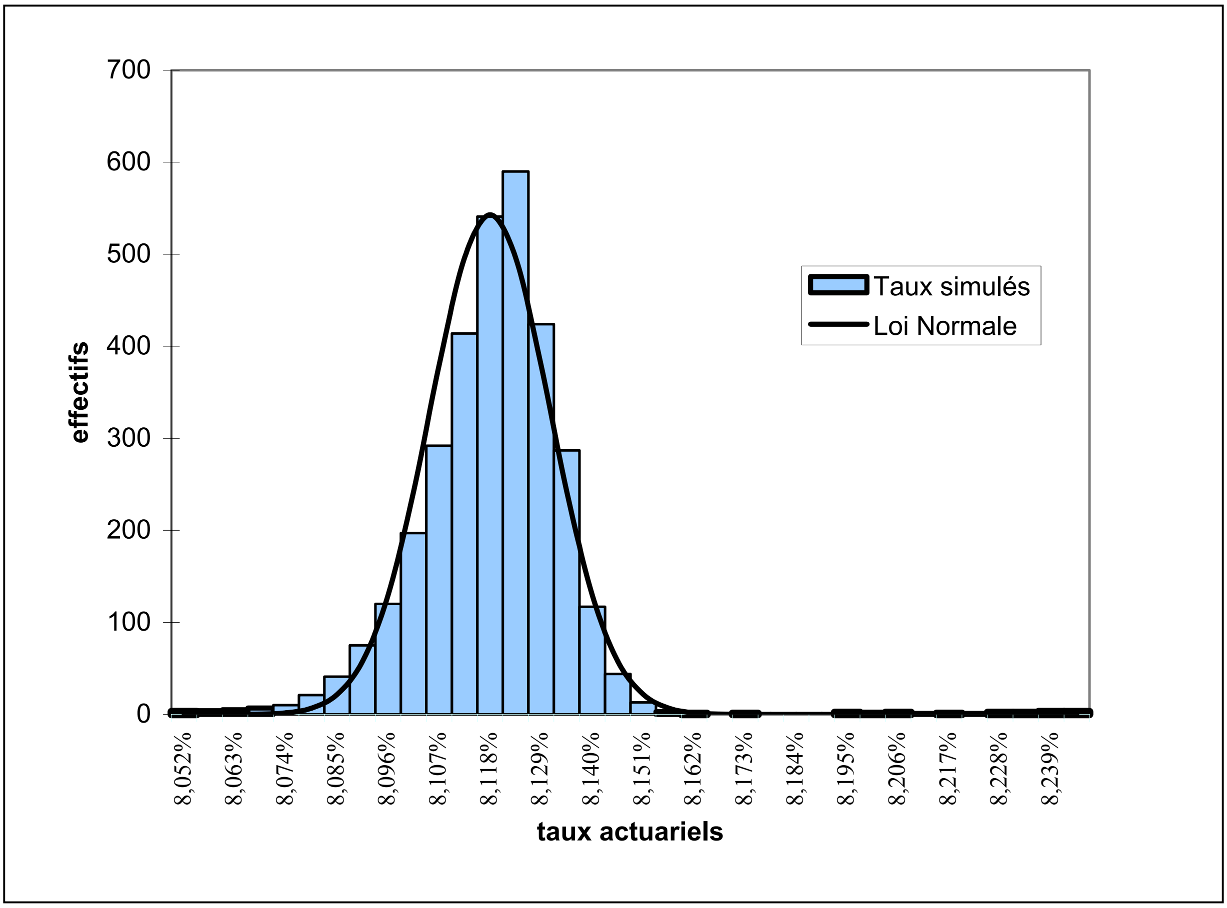
Les tableaux ci-dessous et le Graphique 2 présentent les résultats des 3 216 simulations complètes[15].

Moyenne	0,08116295	**Test du χ^2 d'adéquation à une loi normale**	
écart-type	0,00021761	Moyenne et écart type estimés de la loi Normale	**m** = 0,0811592
Skewness	0,83780579	après avoir enlevé 11 valeurs extrêmes	**σ** = 0,0001501
Kurtosis	10,57084	Probabilité de se tromper en rejetant l'adéquation	**P** = 5,329E-52

Distribution des 3 216 taux actuariels à l'émission obtenus par simulation calculés en utilisant l'espérance des flux des rentes viagères

Classes	Effectifs observés	Probabilités Loi Normale	Effectifs théoriques	Classes	Effectifs observés	Probabilités Loi Normale	Effectifs théoriques
8,052%	3	4,73929E-07	2,E-03	8,151%	13	0,006727764	21,636
8,058%	4	3,32957E-06	0,011	8,157%	3	0,002100928	6,757
8,063%	5	2,18349E-05	0,070	8,162%	1	0,000548461	1,764
8,069%	7	0,000119692	0,385	8,168%	0	0,000119692	0,385
8,074%	10	0,000548461	1,764	8,173%	1	2,18349E-05	0,070
8,080%	21	0,002100928	6,757	8,179%	0	3,32957E-06	0,011
8,085%	41	0,006727764	21,636	8,184%	0	4,24377E-07	0,001
8,091%	75	0,018010829	57,923	8,190%	0	4,5208E-08	1,E-04
8,096%	120	0,040309829	129,636	8,195%	2	4,02483E-09	1,E-05
8,102%	197	0,075425337	242,568	8,201%	1	2,99443E-10	1,E-06
8,107%	292	0,117996671	379,477	8,206%	2	1,86158E-11	6,E-08
8,113%	414	0,154339905	496,357	8,212%	1	9,67004E-13	3,E-09
8,118%	541	0,168789892	542,828	8,217%	1	4,19664E-14	1,E-10
8,124%	590	0,154339905	496,357	8,223%	1	0	0
8,129%	424	0,117996671	379,477	8,228%	2	0	0
8,135%	287	0,075425337	242,568	8,234%	2	0	0
8,140%	117	0,040309829	129,636	8,239%	3	0	0
8,146%	44	0,018010829	57,923	8,245%	3	0	0

[15] Comme on s'en doute, le temps de calcul pour effectuer ces simulations a explosé : on passe de 20 000 simulations, dans le cas de l'utilisation de la vie moyenne, à 3 216 000, dans le cas de l'utilisation de l'espérance des flux.



On constate que la distribution est moins asymétrique et que la Kurtosis, bien que toujours très élevée à cause d'une vingtaine de grandes valeurs, passe de près de 55 à « seulement » 10.5.

Evidemment dans ce cas aussi la normalité est rejetée avec un risque de se tromper pratiquement nul (5,329 E-52).

Enfin un test d'égalité des moyennes nous amène à rejeter l'homogénéité des taux actuariels moyens obtenus par ces deux méthodes avec un risque de se tromper « nul » (risque « 0 » de se tromper pour Excel)[16].

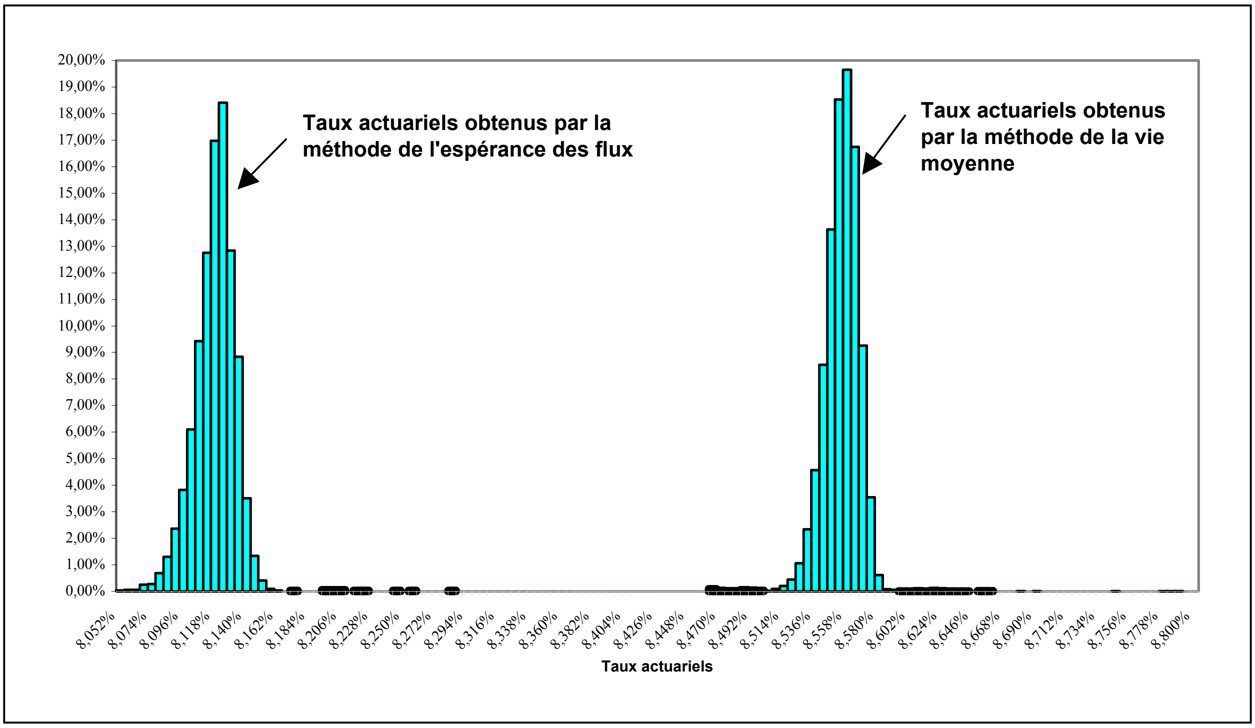
D'ailleurs un simple coup d'œil au graphique ci-dessous permet de se persuader de la différence notable de résultats obtenus par les deux méthodes.

---

[16] Ceci est nullement étonnant dû à la longueur des échantillons (20 000 et 3 216) ; la distance normalisée entre ces taux moyens est égale à 1 099 ce qui, grâce au Théorème Limite Central, sous l'hypothèse H_0 d'égalité des espérances, nous donne un seuil de risque de se tromper en rejetant H_0 égal à 1 – F(1099) !!!! où F est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Comparaison des distributions des taux actuariels à l'émission

obtenus par les deux méthodes



Concernant la distribution des taux actuariels à l'émission obtenus en utilisant l'espérance des flux des rentes viagères, on peut conjecturer que celle-ci provient d'un « mélange » de lois normales et d'une loi de Poisson, mélange induit par une combinaison de deux phénomènes.

D'une part, un coté « accidentel » pour l'émetteur : la dispersion aléatoire des lots comportant les montants de rentes viagères peut conduire à ce que toutes les rentes les plus élevées tombent dans la classe à l'étendue de vie la plus longue ou, au contraire, la plus courte. Dans le premier cas, l'accident pour l'émetteur[17] , peu probable, mais possible, serait que, les souscripteurs des rentes viagères les plus élevées décèdent en dernier (dans notre cas, un souscripteur de 3 ans, qui aurait gagné les deux rentes de 4 000 livres et 3 000 livres[18], meure à 94 ans et demi ! deux autres souscripteurs, toujours de 3 ans, ayant gagné les lots de rentes viagères de 2 000 et 1 000 livres meurent à 93 ans et demi, etc, etc[19]).

[17] accident que l'on pourrait appeler « phénomène Jeanne Calment »
[18] dans la première classe les souscripteurs ont souscris pour deux lots et demi en moyenne
[19] Un calcul des taux actuariels émetteurs les plus défavorables (et les plus favorables) est en train d'être effectué par les auteurs.

D'un autre coté un phénomène lié à l'étendue de vie des différentes classes qui conduirait, « hors cas accidentels extrêmes », à un mélange de loi normales.

Schématiquement on peut considérer qu 'il existe trois groupes :

- les « jeunes » dont la durée de vie va d'une demi-année (décès la première année) à 94 ans et demi (même si leur durée de vie moyenne est de 48 ans)
- les « adultes » dont la durée de vie va également d'une demi-année pour un maximum de 94 ans et demi moins leur âge à la souscription.
- Les « anciens » dont la durée maximale théorique est de 22 ans

Si cette conjecture était vérifiée[20], cela permettrait à l'émetteur de déterminer des seuils de risque, des probabilités de coût, de tarifications tenant compte des risques, etc.

Conclusion

L'objectif de cette étude était de mesurer l'espérance du coût pour l'émetteur[21].

Cette étude montre qu'il n'est pas indifférant, pour ce calcul, d'utiliser, pour déterminer les cash-flows liés aux rentes viagères, l'espérance de vie ou l'espérance des flux.

« Non prévu au programme », l'utilisation si habituelle de la vie moyenne pour tarifer les rentes viagères révèle un risque « caché » pour l'émetteur qui peut se trouver confronté à des taux extrêmes. Une solution technique, même si elle paraît peu acceptable sous l'angle du marketing, serait celle de tenir compte, en plus de la durée de vie moyenne, des montants engagés de façon non proportionnelle. Un capital élevé devrait générer une rente viagère plus faible que celle d'un capital plus petit pour tenir compte du risque de montant – risque qui pourrait être baptisé « risque Jeanne Calment »

[20] Des tests sont menés actuellement par les auteurs
[21] coût élevé pour l'époque, qu'il soit déterminé par la méthode « espérance de vie » ou celle « espérance des flux »)

Annexe

Table de Deparcieux

Ages	Morts de chaque âge	Personnes vivantes à chaque âge	Vie moyenne Ans	Mois	Probabilité de décès
3	30	1000	47	8	3,00%
4	22	970	48	1	2,27%
5	18	948	48	3	1,90%
6	15	930	48	2	1,61%
7	13	915	48	0	1,42%
8	12	902	47	8	1,33%
9	10	890	47	4	1,12%
10	8	880	46	10	0,91%
11	6	872	46	3	0,69%
12	6	866	45	8	0,69%
13	6	860	44	11	0,70%
14	6	854	44	2	0,70%
15	6	848	43	6	0,71%
16	7	842	42	10	0,83%
17	7	835	42	2	0,84%
18	7	828	41	6	0,85%
19	7	821	40	10	0,85%
20	8	814	40	3	0,98%
21	8	806	39	7	0,99%
22	8	798	39	0	1,00%
23	8	790	38	5	1,01%
24	8	782	37	9	1,02%
25	8	774	37	2	1,03%
26	8	766	36	7	1,04%
27	8	758	35	11	1,06%
28	8	750	35	4	1,07%
29	8	742	34	8	1,08%
30	8	734	34	1	1,09%
31	8	726	33	5	1,10%
32	8	718	32	10	1,11%
33	8	710	32	2	1,13%
34	8	702	31	6	1,14%
35	8	694	30	11	1,15%
36	8	686	30	3	1,17%
37	7	678	29	7	1,03%
38	7	671	28	11	1,04%
39	7	664	28	2	1,05%
40	7	657	27	6	1,07%
41	7	650	26	9	1,08%
42	7	643	26	1	1,09%
43	7	636	25	4	1,10%
44	7	629	24	7	1,11%
45	7	622	23	11	1,13%
46	8	615	23	2	1,30%
47	8	607	22	5	1,32%
48	9	599	21	9	1,50%
49	9	590	21	1	1,53%
50	10	581	20	5	1,72%
51	11	571	19	9	1,93%
52	11	560	19	1	1,96%
53	11	549	18	6	2,00%
54	12	538	17	10	2,23%
55	12	526	17	3	2,28%
56	12	514	16	8	2,33%
57	13	502	16	0	2,59%
58	13	489	15	5	2,66%
59	13	476	14	10	2,73%
60	13	463	14	3	2,81%
61	13	450	13	9	2,89%
62	14	437	13	0	3,20%
63	14	423	12	5	3,31%
64	14	409	11	10	3,42%
65	15	395	11	3	3,80%
66	16	380	10	8	4,21%
67	17	364	10	1	4,67%
68	18	347	9	7	5,19%
69	19	329	9	1	5,78%
70	19	310	8	8	6,13%
71	20	291	8	2	6,87%
72	20	271	7	9	7,38%
73	20	251	7	4	7,97%
74	20	231	6	11	8,66%
75	19	211	6	6	9,00%
76	19	192	6	1	9,90%
77	19	173	5	9	10,98%
78	18	154	5	4	11,69%
79	18	136	5	0	13,24%
80	17	118	4	8	14,41%
81	16	101	4	5	15,84%
82	14	85	4	1	16,47%
83	12	71	3	10	16,90%
84	11	59	3	6	18,64%
85	10	48	3	2	20,83%
86	9	38	2	11	23,68%
87	7	29	2	8	24,14%
88	6	22	2	4	27,27%
89	5	16	2	0	31,25%
90	4	11	1	9	36,36%
91	3	7	1	6	42,86%
92	2	4	1	3	50,00%
93	1	2	1	0	50,00%
94	1	1	0	6	100,00%
95	0	0	0	0	