Di¤usion d'opinion et non-di¤usion d'information. Un phénomène à l'origine des bulles …nancières?

Bertrand Gobillard[¤]

Vendredi 14 Février 2003

——————————————————

Communication pour les XXèmes Journées Internationales d'Economie Monétaire et Bancaire.
Birmingham, 5 et 6 juin 2003.

Abstract

A…n de dépasser les paradoxes de l'e¢ cience de Grossman-Stiglitz on développe un modèle d'opinion pour discuter de l'agrégation d'informations disséminées parmi une population d'individus homogènes. Le modèles est intermédiaire entre ceux des cascades informationnelles [6] et de mimétisme d'Orléan [39], dont on cherche à dépasser certaines hypothèses. On abandonne la séquentialité des actions et l'hypothèse de premier individu. On démontre l'émergence d'un mimétisme rationnel, à seuil. Ce comportement provient de l'externalité d'information des comportements des autres. On démontre alors que les agents …nissent par adopter la même opinion. Dans une dernière partie on utilise les résultats du modèle pour décrire un mécanisme pouvant expliquer la formation d'une opinion sur les marchés, l'établissement d'une convention. Le mimétisme informationnel montre comment le marché peut entrer dans une dynamique autonome où il est son seul référent. Cette dynamique d'opinion peut alors conduire à des bulles …nancières telle la bulle technologique.

1 Introduction.

L'intérêt que l'économie porte à la prise en compte des interactions dans les processus de coordination des agents est grandissante, que ce soit sous l'impulsion des travaux de Schelling (1978), de la formalisation originale de Föllmer (1974),

¤CEPREMAP (CNRS) et FORUM (Université Paris X - Nanterre). Adresse: 48 Boulevard Jourdan, 75014 Paris. Adresse électronique: bertrand.gobillard@cepremap.cnrs.fr

ou des développements de Weidlich et Haag (1983) en ce qui concerne les processus de di¤usion d'opinions. On peut quali…er di¤éremment les interactions selon qu'elles sont ou non marchandes. Une première littérature s'intéresse aux interactions sociales. Il s'agit de modèliser des situations où l'interaction consiste en une in‡uence sur les préférences qui peut être locale ou globale avec par exemple les contributions récentes de Glaeser et Scheinkman (2002) et Horst et Scheinkman (2002) dont on peut considérer que le travail de Föllmer (1974) - qui modélise une économie avec des dépendances locales sur les préférences- en est une première approche. L'étude d'un système d'interactions locales est également l'objet que traitent de Brock et Durlauf (2001) en puisant leurs développements dans ceux de la mécanique statistique et de la théorie du champs moyen. On peut l'une comme l'autre quali…er ces interactions de hors-marché. D'autres travaux, qui souvent sont regroupés sous le terme générique d'apprentissage sociale (traduction de Social learning) apportent des enseignements sur les externalités d'information. L'interaction des individus est modélisée par un processus séquentiel ou dynamique dans lequel les agents prennent en compte les comportements des autres pour prendre leur décision. Parmi ceux-ci on notera les modèles maintenant bien connus de chaînes mimétiques ou de cascades informationnelles (Voir par exemple Banerjee (1992), Bikhchandani, Hirschleifer et Welch (1992) -dorénavant BHW- et Moscarini, Ottaviani et Smith (1997) pour le modèle avec changement d'états du monde). Leur principal résultat est de montrer que des processus mimétiques émergent de comportements purement rationnels. L'idée intuitive est la supériorité qualitative de l'information publique sur l'information privée qui, lorsque celles-ci sont contradictoires, mène au mimétisme. On parlera alors de mimétisme informationnel pour quali…er ces structures d'interaction si on adopte la catégorisation d'orléan (2002). L'auteur distingue trois formes de mimétisme selon les motivations à l'origine du comportement imitateur et la forme de l'in‡uence des autres. On di¤érencie alors les mimétismes informationel, autoréférentiel et normatif.

Les modèles d'interaction, et particulièrmeent ceux traitant des phénomènes de mimétisme ou de contagion, ont intéressé les théoriciens des marchés …nanciers; Genotte et Leland (1990), Sharfstein et Stein (1990) et Froot, Scharfstein et Stein (1992) pour les premiers modèles de mimétisme, Lee (1993) et (1998) pour les modèles de cascades informationelles et de crachs boursiers, ainsi que toute une série de travaux s'incorporant dans la littérature des modèles d'interaction formalisés par des processus aléatoires parmi lesquels on trouve kirman (1990), Orléan (1990) et (1992), Lutz (1995) ou Cont et Bouchaud (1998) (entre autres). Cette seconde littérature a en commun deux choses, toutes deux d'ordre méthodologique. La première consiste à mobiliser des formalismes hérités de la mécanique statistique et des processus markoviens et nous éloingne de l'approche classique en terme d'équilibre. La seconde est ici pour nous plus importante (car on cherchera à la dépasser) et porte sur l'adoption d'une démarche similaire qui consiste à étudier l'agrégation de comportements individuels spéci…és a priori selon certains paramètres de contrôle. On peut déduire de ces diverses études certaines conséquences sur l'interaction gloable initiées des comportements mimétiques (comme la transformation de la distribution stationnaire lorsque le mimétisme devient trop important), qu'il s'agisse d'un mimétisme local (comme chez Kirman (1993)) ou plus global (comme chez Orléan (1998)). Quoiqu'il en soit ces deux modèles, parmi les autres, prennent l'existence du mimétisme comme une donnée et s'écartent ainsi d'une justification rationnelle du mimétisme à l'intérieur de leur cadre d'analyse, ce qui est l'objet de ce papier.

Cette remarque doit être spécifiée en ce qui concerne le travail d'Orléan (1998) sur lequel repose le présent travail. Le cadre d'analyse est celui que nous reprenons ici, nous modifierons simplement le comportement des agents. Retenons simplement pour le moment que le modèle est à choix binaire. Les agents ont une stratégie pré-établie qui consisite à suivre un signal privé avec une certaine probabilité $(1-\mu)$ et à adopter l'action majoritaire avec la probabilité complémentaire μ. Le comportement des agents ainsi défini on peut montrer qu'il existe un seuil critique $\mu^{\star}$ à partir duquel la distribution stationnaire du processus stochastique est bimodale. Les opinions se concentrent alors (en probabilités) autour des pics de la distribution et la probabilité de passer d'une opinion à une autre est proche de zéro[1]. Orléan en conclut que d'une part les individus ne peuvent pas s'adapter aux changements d'états du monde, et que d'autre part, qualifiant la distribution stationnaire de quasi non-ergodique et portant son attention sur des périodes de temps dites raisonnables, que la probabilité que les individus se trouvent en un pic plutôt qu'en un autre dépendra de la seule situation de départ. Traitant du cas où les individus peuvent adopter des stratégies différentes, c'est à dire choisir une propension μ_i au mimétisme différente de celle des autres, Orléan $(1998-b)$ conclut à l'existence d'un seul équilibre de Nash en $\mu^{\star}$.

La limite à cette démonstration provient de l'utilisation d'une distribution de probabilité asymptotique, la distribution stationnaire, pour ensuite considérer une temporalité d'une autre échelle dans la justification de l'ambivalence du mimétisme et de l'existence d'un seul équilibre de Nash. Si on s'abstient de la considération d'une temporalité raisonnable et que l'on suppose que les agents jouent un jeu déjà joué suffisamment de fois pour être à l'état stationnaire, on peut montrer que quelque soit la valeur de $\mu < 1$ alors l'information contenue dans le signal public est plus précise que celle contenue dans le signal privé (Gobillard (2002)). On mobilise pour cela le fait que la distribution stationnaire caractérise la probabilité d'être en l'un ou l'autre des états et ce quel que soit la situation initiale. Elle donne ainsi la valeur de l'information en probabilité indépendamment de son point de départ. Le résultat obtenu est extrêment surprenant et paradoxal en ce sens qu'il indique que lorsque les agents adoptent une stratégie $\mu < 1$, l'individu pris isolément a intérêt à être mimétique. La généralisation de ce résultat à l'ensemble de la population amène chacun à être mimétique, mais dans ce cas le processus n'est plus régulier, et la distribution stationnaire dépend de l'état initial uniquement. Il n'existe donc pas de stratégie claire à ce jeu. On se trouve finalement confronté au paradoxe de l'efficience que cherche à dépasser Orléan. Notre résultat se rapproche de

[1] Ce résultat qualitatif n'est pas propre au modèle d'Orléan. Voir par exemple Kirman (1993) ou Lutz (1995), ou Cont et Bouchaud (1998).

celui de Grossman (1976). Lorsque les individus sont parfaitement mimétique ($\mu = 1$) il est rationnel de suivre son information privée, mais cette attitude fait que le mimétisme redevient efficace. Il s'agit de l'ambivalence du mimétisme mise en évidence par Orléan, qui prend une dimension supplémentaire puisque l'alternative n'est pas dans la propension au mimétisme, mais dans le fait de l'être totalement ou pas. L'équilibre n'est donc pas $\mu_i = \mu^* \forall i \in I$, mais a la forme suivante: être mimétique lorsque les autres ne le sont pas totalement ou pas du tout ($1 > \mu_{-i}$) et ne pas l'être si les autres choisissent le mimétisme (avec probabilité 1).

Cette ambivalence ou ce paradoxe justifie pourquoi on propose ici, dans un cadre d'analyse très proche, l'étude d'une autre forme de mimétisme, celle du mimétisme à seuil. Le paradoxe de Grossman - Stiglitz (Grossman (1976); Grossman et stiglitz (1980) ou encore Hellwig (1980); voir la présentation générale de Orléan et Taddjedine (1998)) nous enseigne en premier un phénomène important, l'externalité d'information d'une variable publique agrégée, en l'occurence le prix. Leur modèle étant d'équilibre, il conduit à un paradoxe puisque l'action représentative consiste à être mimétique si les autres ne le sont pas et réciproquement puisque dans ce cas le prix ne peut contenir d'information (Grossman (1976) et Hellwig (1980)). Une façon d'interpréter ce paradoxe se trouve dans la critique de la forme logique de l'équilibre à anticipations rationnelles (REE dorénavant). Celui-ci suppose en effet que les agents agissent en ayant à disposition une information privée et une information publique (le prix) qui est le résultat de l'action des agents dans un modèle à un coup. On suppose donc que chacun utilise l'information d'un prix qui ne pourra être établi qu'une fois les actions individuelles effectives. Mais alors comment celles-ci peuvent-elles utiliser l'information de ce qu'elles vont réaliser? Il faut dépasser cette structure prégnante de l'équilibre pour introduire un processus dynamique de diffusion et d'agrégation d'information. Que se passe-t-il si le processus d'agrégation d'information est dynamique? Si un individu qui intervient à une étape donnée le fait en utilisant l'information du signal public qui n'agrège que les actions passées, son action elle-même modifiant le signal public qui sera disponible à la période suivante? Quelle forme prend alors les effets d'externalité d'information si clairement introduits par Grossman et Stiglitz? C'est à ces questions que l'on cherche ici à donner des réponses.

Les premiers modèles à avoir traité de ce phénomène sont les modèles de chaînes mimétiques. Il s'agit de processus séquentiels où un individu (nouveau à chaque étape du jeu) choisit parmi deux éventualités qui lui sont proposées. Il dispose pour cela de deux informations: un signal privé corrélé à l'état de nature et tout l'historique des actions passées. Le résultat principal, qui provient du fait que le comportement des autres devient une externalité positive pour ceux qui agissent postérieurement, est l'émergence presque sûrement de comportements mimétiques conduisant à délaisser l'information privée de nombre d'agents. Shiller (1995) considère que parmi les situations possibles qui sont associées à ce processus un certain nombre ne sont pas compatibles avec l'hypothèse de premier individu. Celui-ci ne semble pas facilement applicable et il lui préfère le principe de Conversation et de processus de transmission de l'information pour expliquer les divergence des comportements de masse de di¤érents groupes. On peut également être critique quant à une assimilation de la structure de ces modèles au cadre des marchés …nanciers. Deux raisons principales sont à l'origine de cette inadaptation. Dans les modèles de cascade informationnelle il est d'une part supposé qu'il y a un premier intervenant et d'autre part que l'histoire du processus est parfaitement connue de tous. Il est à douter qu'il soit possible de dé…nir ce que serait un premier intervenant, et de considérer qu'au moment d'agir l'investisseur connaît parfaitement l'ensemble des transactions passées. C'est pourquoi il nous semble intéressant de dépasser ces hypothèses pour discuter de la validité des phénomènes d'externalité d'information. On considére tout d'abord que l'information publique n'est plus l'ensemble de l'historique des transactions mais simplement l'opinion du groupe à la date actuelle et que l'individu actif de la période est tiré aléatoirement parmi une population …nie d'individus. [2]

On reprendra pour ce faire le modèle d'Orléan (1998) en remédiant aux limites en terme de rationalité soulevées auparavant. La motivation de ce prolongement sera donc de ne pas de considérer l'e¢cience du point de vue du résultat global, ce qui pourrait s'apparenter à une certaine rationalité collective, mais de mettre l'individu rationnel devant un choix, celui de la source d'information qu'il utilise. Il s'agit de proposer une alternative qui tente de combler ce qui du point de vue de la rationalité individuelle présente une certaine ambiguité, l'utilisation de comportements en stratégie mixte des acteurs (pour un traitement plus précis, que ce qui n'a été fait ici, de ce point on revoit à Gobillard (2002)). La forme structurelle du modèle reste identique et seule la rationalité des individus est modi…ée: nous abandonnons la rationalité mimétique aléatoire. Le modèle s'apparente alors aux structures de chaînes mimétique avec comme principe essentiel l'externalité d'information qui impulse l'abandon par tous les individus de leur signal privé à partir d'une certaine étape que l'on atteint presque sûrement. Le cadre dynamique de la révélation d'information permet d'éviter les équilibres paradoxaux à comportement unique dans un jeu à une seule étape et le fait de ne pas mobiliser la situation à l'état …nal pour la prise de décision (menant à cet état) permet de s'extraire de l'ambivalence et du paradoxe du mimétisme discutés dans Gobillard (2002).

Les impasses mises en avant par ailleurs peuvent conduire dans deux directions. La première, que nous adoptons ici, consiste à supposer que la représentation que les individus se font de l'environnement dans lequel ils évoluent est …gée: elle repose sur un modèle de formation des croyances …xé ou a-temporel. Pour le dire simplement et rapidement notre approche revient à supposer que les individus ne connaîssent pas l'évolution temporelle du signal public, ou plutôt son

[2]On peut noter l'existence d'approches assez proches de celles des cascades informationnelles mais directement appliquées aux marchés …nanciers, avec par exemple le modèle d'Artus (1993) ou celui de Graham (1999) dans le traitement du comportement d'analystes. Mais là encore l'étude est axée sur le cas spéci…que où il y a un type d'agent qui intervient en premier et dont l'action est parfaitement identi…ée et connue de tous. Ce type de modèles ne peut alors rendre compte que d'une partie des comportements …nanciers.

origine. Ce cas d'absence d'informations sur la situation intiale oblige l'individu à mobiliser une représentation a-temporelle. Elle peut éventuellement être considérée comme une agrégation en probabilité des di¤érentes possibilités qu'il suppose. C'est là l'hypothèse essentielle du modèle, l'absence de la connaissance de l'origine temporelle du processus. C'est pourquoi le modèle qu'ils utilisent pour former leurs croyances est supposé invariant. On dé…nira les représentations individuelles par une certaine distribution de probabilité sur les di¤érentes valeurs prises par la variable d'état F du choix moyen des agents, conditionnellement à chacun des deux états du monde. La distribution condidérée sera de fait …xe dans le temps.

La seconde direction suppose plus simplement une incertitude sur l'état du système à l'instant intial. Il existe une date intiale pour le processus, date pour laquelle l'information sur le système est imprécise et donnée par une distribution de probabilité de la variable F. L'analyse, qui s'e¤ectue alors dans un cadre a priori plus général avec processus bayésien de révision des croyances sur la distribution de F, se rapporte à une généralisation du modèle de cascade informationnelle à choix binaire (en conservant la forme de notre processus d'intervention des agents qui est di¤érent) où les individus ont une incertitude sur la situation initiale. Ce modèle fait l'objet d'une étude par ailleurs, et conduit à des résultats relativement similaires, si ce n'est que quelque soit la distribution initiale émergent des comportements mimétiques et que le mimétisme à seuil suppose certaines hypothèses sur la distribution intiale (Gobillard (2003)).

Sous certaines hypothèses nous retrouvons ici le résultat des cascades informationelles; on en montre en tous cas les conditions d'existence relevant d'hypothèses sur la distribution de probabilité associée au signal public. On peut ainsi observer l'apparition de cascades informationelles ou chaînes mimétiques à partir d'une certaine valeur de l'opinion majoritaire, valeur seuil qui dépend des croyances des individus. Le caractère ambivalent du mimétisme et le paradoxe de Grossman - Stiglitz sont évacués. On peut comprendre cette distinction dans l'approche dynamique (qui permet d'éviter le paradoxe) et la possibilité pour chacun de di¤érencier sa stratégie comportementale selon les di¤érents niveaux de f (on échappe à l'ambivalence). L'alternative entre information privée et information publique sur une seule période, ou pour un choix portant sur toutes les périodes, se transpose à une délibération dépendante de la quantité d'information déjà incorporée dans le signal public. C'est ce qui distingue notre approche et les modèles de cascade informationnelle des REE ou de l'analyse d'Orléan. Ainsi, lorsque l'information publique ou le prix ne contient pas su¢ samment d'information les individus suivent leur signal privé. De l'information est ainsi incorporée au signal public, et ce tant que l'information privée de chacun est relativement plus précise, après quoi les individus entrent dans une cascade.

La suite du papier sera organisée comme suit. On présente le modèle, sa structure tout d'abord puis on revient sur l'hypothèse faite sur la distribution de probabilité. On propose ensuite une hypothèse pour le mimétisme à seuil. Dans le quatrième paragraphe on précise la forme de la distribution de F. Dans une cinquième partie on discute de l'arbitrage entre information publique et information privée et on replace les hypothèse faites auparavant. La sixième partie étudie l'interaction d'individus ayant des stratégies à seuil, on analyse la situation vers laquelle converge l'agrégation des comportements mimétiques à seuil retenus (on propose en fait une situation approchée, ou limite) qui établit la convergence vers le consensus avec une probabilité d'erreur - de tous - non-nulle; le lien avec les cascades informationnelles est effectué. La partie sept conclut et propose une interprétation du modèle en ce qui concerne les marchés financiers.

2 Le modèle.

2.1 Le cadre d'analyse.

Soit une population composée de N agents indicés $i = \{1; ...; N\}$ chacun ayant la possibilité d'adopter une opinion a qui peut prendre deux valeurs $a = A$ ou $a = B$. Il s'agit en fait pour les agents de découvrir la réalisation d'un état du monde aléatoire θ qui peut prendre deux valeurs équiprobables a priori H ou L (avec $\Pr(H) = \Pr(L) = \frac{1}{2}$). Les individus sont a priori indifférents entre A et B et leur seul intérêt réside dans le fait de prendre la bonne décision, à savoir A si $\theta = H$ et B sinon. Le modèle peut-être représenté par la matrice de jeu suivante, qui présente l'intérêt d'une espérance de gain nulle a priori:

$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ H & 1 & -1 \\ L & -1 & 1 \end{array} \tag{1}$$

A chaque étape du jeu un agent, qualifié d'agent actif de la période, est tiré au sort parmi la population et décide entre A et B. Les individus ne peuvent directement observer θ mais chaque agent i peut disposer d'une information privée en observant un signal privé σ_i qui peut prendre deux valeurs $+$ et $-$. Les signaux $\{\sigma_i\}_{i=1;...;N}$ sont indépendants et positivement corrélés à l'état de nature selon les probabilités conditionnelles suivantes[3]:

$$\begin{array}{ccc} & \sigma = + & \sigma = - \\ \theta = H & p & (1-p) \\ \theta = L & (1-p) & p \end{array} \tag{2}$$

La seconde source d'information est relative aux actions des individus précèdents. La variable aléatoire F_t représente la proportion d'individus qui pensent que l'état du monde est bon, c'est à dire qui ont opté pour A, à la date t. La valeur f_t prise par cette variable F_t est connue de l'individu actif à chaque période t du jeu. Etant l'agrégation des comportements antérieurs à la date t

[3] On peut présenter les probabilités conditionnelles sous forme de matrice suite à l'hypothèse de symétrie. Pour $\sigma_i = \sigma$ fixé, on a, en effet, $\Pr(\theta \mid \sigma) = \left(\frac{\Pr(\sigma|\theta)\cdot\Pr(\theta)}{\Pr(\sigma)}\right) = \Pr(\sigma \mid \theta)$ puisque $\Pr(\sigma) = \Pr(\sigma \mid \theta)\cdot\Pr(\theta) + \Pr\left(\sigma \mid \overline{\theta}\right)\cdot\Pr\left(\overline{\theta}\right)$ qui est égal à $\Pr(\theta) = \Pr\left(\overline{\theta}\right) = \frac{1}{2}$ avec θ l'état du monde conditionnel et $\overline{\theta}$ son complémentaire.

elle est une source d'information dont disposent les intervenants. Considérant la valeur de cette variable l'agent actif peut utiliser son contenu informationnel et opter pour A si $f_t > \frac{1}{2}$ et pour I sinon. Sa stratégie peut-être de suivre unilatéralement son signal privé, d'adopter un comportement purement mimétique ou de choisir aléatoirement entre l'une et l'autre de ces deux stratégies avec une certaine probabilité (Orléan (1998) et Gobillard (2002)). On considérera ici qu'il mobilise un critère de décision lui permettant d'agir rationellement en accord avec ses croyances. Le choix individuel de chacun étant binaire, lorsque les deux signaux donnent des informations contradictoires, l'individu actif doit arbitrer entre suivre son information privée ou se conformer à l'opinion majoritaire: dans ce dernier cas il opte pour le mimétisme. Nous posons ainsi la problématique de l'agrégation d'information et l'arbitrage entre information privée et information contenue dans les actions des autres.

2.2 Représentations individuelles concernant le signal public.

La règle de comportement des individus dépend de comment ils se représentent l'information publique. Nous faisons ici le choix de supposer un lien unique et a-temporel entre les valeurs de l'opinion moyenne et les probabilités associées à chacune de ces variables. Le contenu informationnel du signal public associé à F est ainsi donné par une distribution de probabilité de cette variable F conditionnelle à l'état de nature θ, $Pr(F = f \mid \theta)$ pour tout $f = 0, \ldots, N$ et $\theta \in \{H, L\}$ (on notera dorénavant $P(f \mid \theta)$), distribution que l'on supposera fixée dans le temps. Le signal public assigne donc au fait d'être en une certaine valeur f une probabilité qui est différente selon que l'état de nature est bon ou mauvais. Suivant la loi de Bayes, l'individu pourra alors définir les probabilités associés à chacun des états de nature pour chaque valeur F:

$$Pr(\theta = H \mid f) = \frac{P(f \mid H)}{P(f \mid H) + P(f \mid L)} = 1 - Pr(\theta = L \mid f) \tag{3}$$

puisque les distributions initiales $Pr(H) = Pr(L) = \frac{1}{2}$. Ainsi, lorsque l'agent suit son signal privé, il révise sa croyance donnée par la distribution initiale sur θ.

L'hypothèse que nous faisons sur la représentation de l'information publique peut surprendre, ou interroger. On a tout d'abord signalé l'existence d'une autre démarche explorée par ailleurs (Gobillard (2003)) qui consiste à intégrer le comportement individuel dans un processus bayésien de révision des croyances. Les individus disposent d'une distribution de probabilité initiale à la date 0 sur F, distribution qu'ils modifient dans le temps. La caractérisation de l'information contenue dans un certain état f sera fonction de la date t, la règle comportementale également. La question de la rationalité du mimétisme peut donc s'étudier dans un cadre sinon plus complexe du moins différent. Cette démarche a tendance à montrer que le processus baysien de révision des croyances induit (sous certaines conditions sur la distribution initiale) l'agent rationnel à adopter une fonction à seuil, seuil qui émerge à une certaine date dans le processus et qui évolue dans le temps. La valeur du seuil dépend de la représentation à la date initiale d'une part, et de la date à laquelle l'agent doit prendre sa décision d'autre part. L'étude de la rationalité du mimétisme est alors plus complexe (elle repose sur le traitement d'un processus markovien non-homogène) et doit être étudiée à chaque date et pour chaque valeur de F. Dans un tel contexte on peut montrer sous certaines hypothèses que, d'une part il existe une date à partir de laquelle émerge un seuil de mimétisme et d'autre part le seuil de mimétisme est non-décroissant. Le modèle de cascade informationelle de BHW (repensé dans la structure dynamique de notre modèle) apparaît alors comme un cas particulier où la distribution de probabilité initiale est $\Pr\left(f_0 = \frac{1}{2}\right) = 1$.

Les raisons pour lesquelles on considère la présente approche sont multiples. Une première, provient du fait que cette approche nous a semblé être un bon intermédiaire avec les modèles d'équilibre à anticipations rationelles (dorénavant REE) (sur un point spéci…que) qui postulent la connaissance par chacun d'un lien entre les états du monde donnés par l'ensemble des signaux privés et les prix. On y incorpore toutefois une modi…cation non négligeable. Les modèles de REE supposent l'existence d'un lien fonctionnel entre l'ensemble des aléas (les signaux reçus par les agents) et le prix. On suppose ici que le lien avec la variable agrégée des comportements (le prix dans un cas et le comportement moyen dans le notre) part des actions observées plutôt que des signaux privés (non observables). La distribution de probabilité traduit alors l'interprétation du comportement des autres. Elle ne pose donc pas l'existence d'un lien unique et naturel entre prix et information détenue par les agents qui de fait suppose un coordination ad hoc (Mc Allister (1990) et Dutta et Morris (1997)).

Il s'agit ensuite de pousser à son maximum l'hypothèse d'absence d'information sur la situation intiale. On postule en e¤et la …xité des représentations individuelles de l'information du signal public. Plutôt que de la considérer à une date initiale, pour ensuite intégrer son évolution, celle-ci est établie et …xée une fois pour toutes. L'individu dispose d'un modèle qu'il utilise sans le faire évoluer. Plusieurs éventualités peuvent justi…er cette hypothèse. On peut considérer que l'agent ne sait d'ou part le processus, et dans ce cas il est dans l'impossibilité de le faire. Cela signi…e, soit que l'agent ne sait pas à quelle date associer l'origine du processus, soit qu'il ne sait pas ce que les autres pensent au début du processus et donc il ne dispose pas d'une distribution de probabilité à la date intiale. On peut aussi tout simplement supposer qu'il n'y a pas de véritable sens à supposer une date initiale. Ainsi, cette incertitude quant à l'origine du phénomène dont chacun cherche à obtenir de l'information conduit chacun à se représenter le monde environnant comme invariant. Le modèle de formation des croyances peut consister en une sorte de représentation moyenne ou agrégée; on peut également (ou alors, car il est facile de supposer un lien entre les deux) considérer que l'agent se place dans un cadre où il suppose l'existence d'un lien fonctionnel entre le comportement des agents et l'information que révèlent …nalement leurs actions: peu importe la date à laquelle l'opinion moyenne est celle-ci, l'information qu'elle contient est …xée et n'en dépend pas. Dans ce cas, une action collective donnée (une valeur établie $F = f$) donne la même information quelle que soit la date à laquelle cet état est visité. Le modèle de cascade informationnelle de BHW est un exemple de ce type de situation (et on a déjà parlé des REE), peu importe la date à laquelle une action devient choisie marjoritairement par deux individus de plus que la moyenne des actions, l'information contenue dans cette situation est la même, les actions des autres auparavant (avant ces deux dernières prises de position) annulant leurs contenus informationnels respectifs.

Formellement nous faisons l'hypothèse selon laquelle chaque individu possède et utilise une certaine distribution de probabilité conditionnelle à l'état du monde $f\mu g$ quand aux valeurs prises par la variable F. Leur croyance sur le système est ainsi donnée par la distribution de probabilité $P(f\ j\ \mu)$, invariante dans le temps. Elle caractérise leur représentation du monde, leur façon d'interpréter l'information publique existante F. En d'autres termes, les agents a¤ectent une certaine probabilité à ce que l'état du monde soit $f\mu g$ pour chacune des valeurs que F peut prendre sur $[0;1]$. Ainsi, le fait de prendre ici des individus aux représentations …xées et sans processus dynamique de révision des croyances n'implique pas que l'on quitte pour autant l'objet des croyances puisque la fonction de densité dé…nit la croyance du lien entre la valeur de F et l'état du monde μ, croyance qui, dans le cas considéré, ne se modi…e pas au cours de temps.

La …xité des représentations implique que la valeur du seuil sera …xée (on considère que celui-ci prend la valeur 0 si les agents ne sont jamais mimétiques), et ce pour tous les individus. Dans l'étude de la dynamique globale nous étudierons le cas spéci…que où tous les individus ont le même seuil. L'hétérogénéité quand au niveau des seuils ne changerait pas qualitativement les résultats. Celle-ci se justi…erait en terme de rationalité à partir d'une hétérogénéité préalable en ce qui concerne la représentation subjective détenue par les intervenants, ce qui semble légitime, mais les conséquences n'apparaîteraient qu'en terme de modi…cation de la vitesse de convergence vers le consensus. Ainsi, les individus ont ce que l'on peut nommer un seuil, ou un niveau seuil qui est identique pour tous (on verra que cela est vrai sous certaines conditions). On pourraît alors voir dans ce seuil l'idée de niveau critique de conformisme, et ainsi ne nous intéresser qu'à la dynamique relevant de tels comportements. Cependant, associer au modèle l'idée de conformisme amène à donner une interprétation supplémentaire au comportement à seuil qui est celle du mimétisme normatif (Orléan (2002)) mais exclut en contrepartie l'ancrage sur la rationalité et ne porte plus sur l'agrégation d'information et le mimétisme informationnel. Cette forme de mimétisme peut s'associer à une in‡uence coercitive de l'environnement sur l'individu. Lorsqu'un agent pris au sein d'un groupe doit prendre une décision qui lui semble évidente, mais que les individus précédents ont pris la décision opposée, dès lors que le poids du groupe est très important il suivra leur choix par conformisme. Il s'agit là de l'explication que donne Asch (1952) d'expériences menées sur des individus devant donner leur opinion sur une observation simple consernant la longueur de di¤érentes cordes et où les individus précédents (qui sont des objets de l'expérience et non pas des sujets soumis à l'expérience) ont pris une décision contraire à l'évidence. On notera simplement que dans leurs travaux Deutsch et Gérard (1955) ont montré que le comportement ne résultait pas d'un conformisme lié au fait de se trouver inséré dans un groupe puisqu'ils trouvent les mêmes résultats lorsque l'agent de l'expérience n'est pas en contact direct avec les individus qui prennent leur décision avant lui (l'agent est isolé dans l'expérience). Dans ce cas on interprête le résultat de l'expérience, à savoir le comportement adopté par l'agent testé, comme relevant du mimétisme informationnel. Plutôt que de comparer le niveau informationnel de signaux publics et privés on considère que chacun dispose d'un niveau subjectif de con…nance en soi, c'est à dire en la validité de sa propre opinion, vis à vis de l'opinion dominante. Lorsque l'opinion majoritaire dépasse ce seuil critique l'individu pense qu'il est impossible qu'il ait raison, et il suit l'opinion dominante. Dans ce cas, la dynamique globale est celle du modèle d'interaction général que l'on étudie, mais d'autres questions intéressantes se posent. On verra que cette approche en terme d'opinion s'applique tout particulièrement aux marchés …nanciers.

On cherchera à dé…nir les conditions sur les représentations et croyances individuelles, donc sur les deux fonctions de densité, pour qu'apparaissent des comportements mimétiques. A posant quelques hypothèses relativement simple le mimétisme que l'on est amené à étudier est un mimétisme à seuil, c'est à dire une règle comportementale où les agents sont mimétiques dès lors que l'opinion moyenne dépasse un certain niveau critique. On essaiera alors de voir pour quelles valeurs il est intéressant d'adopter un comportement à seuil pour ensuite déterminer le niveau seuil optimal pour chacun compte tenu de l'information sur F. Dans tout ce qui suit on s'intéresse à la situation où l'état de nature est H. L'étude du cas opposé étant parfaitement symétrique, les idées à retenir sont qualitativement identiques.

3 Hypothèse pour une rationalité à seuil.

Nous verrons au paragraphe 5 que sous une hypothèse assez classique, qui pose que le signal public devient plus précis lorsqu'il s'éloigne de la valeur neutre $\frac{1}{2}$, l'émergence du mimétisme prend la forme d'un comportement à seuil. Cette hypothèse est a priori assez proche de l'idée intuitive que l'on peut avoir. Pour essayer d'appréhender un peu plus cette rationalité à seuil, on va essayer de donner quelques éléments pouvant la justi…er, en dehors d'une hypothèse portant directement sur la forme de P, même si celle-ci semble particulièrement légitime. La di¢culté à dé…nir les croyances individuelles dans un cadre où l'on ne suppose rien a priori porte sur le fait que l'on peut se reposer sur une multitude d'hypothèses. L'apport des anticipations rationnelles a justement été d'évacuer cette question encombrante en considérant que les coyances des agents sont celles du vrai système. Mais le vrai système dépend du comportement des agents. On est en fait confronté à une incertitude sur le résultat …nal (à moins de supposer une coordination extérieur, comme par exemple dans les REE) car tout processus autovalidant répond aux critères de l'hypothèse d'anticipations rationnelles.

On peut essayer de donner des explications à ce type de comportement.

Celui-ci apparaît si on suppose que l'individu, en plus de la valeur de F, connait sa dernière variation. On obtient alors des éléments descriptifs du modèle des représentations des agents, de la forme de la distribution P. Ce que l'on suppose en fait implicitement est que le processus ne part des extrêmes. L'hypothèse a bien entendu une part d'arbitraire, et l'exercice porte en lui une difficulté centrale. Le problème provient d'une certaine auto-référence de la démarche: on cherche à caractériser les modèles utilisés dans les prises de décisions, modèles qui eux-mêmes dépendent du type de comportement alloué aux autres. On n'est pas très éloignés de la logique d'autovalidation des modèles à anticipations rationelles. L'hypothèse est cependant moins forte, on recquiert en fait simplement la cohérence de la distribution avec les comportements.

Le modèle ici étudié porte sur une rationalité en un sens a-temporel puisque le modèle de représentation du système n'est pas révisé dans le temps. On va ré-introduire, sinon une temporalité, du moins une causalité des actions dans le temps, pour avancer quelques principes dans la construction du modèle individuel du système global qui s'exprime dans P. Dans un premier temps on propose une logique intuitive (autre que l'hypothèse classique d'accroissement de la précision du signal public, introduite au paragraphe 5) conduisant à des comportements à seuil. On suppose un principe de cohérence des probabilités lorsqu'un agent est mimétique en un point de l'espace. Il s'agit de la prise en compte d'un lien entre la probabilté d'être en f à un instant du temps t et la probabilité d'être en $\left(f + \frac{1}{N}\right)$ à la date suivante lorsque les individus sont mimétiques en f à la date t. On peut dans ce cas faire certaines hypothèses quant au contenu de l'information du signal public en $\left(f + \frac{1}{N}\right)$. L'influence des actions passées peut cependant également provenir d'un processus où le poids de la majorité est décroissant. On va distinguer l'effet de ces deux situations, en les considérant séparément. Nous pourrions l'introduire autrement, et postuler que l'agent sait d'ou vient le processus, et que dans chacun des cas il prend la même décision. Quelle qu'en soit la présentation on peut montrer que le comportement est à seuil. Il suffit pour cela de montrer que si un individu est mimétique en f il l'est aussi en $\left(f + \frac{1}{N}\right)$ si $f > \frac{1}{2}$, et en $\left(f - \frac{1}{N}\right)$ si $f < \frac{1}{2}$, et ensuite le résultat s'obtient directement par itération à partir de la plus petite valeur de F (ou la plus grande de $(1 - F)$ selon l'état de la majorité).

Plaçons nous dans le cas où $f > \frac{1}{2}$, le cas contraire s'étudiant de façon parfaitement similaire. Supposons qu'un individu préfère être mimétique en $F_t = f$, alors il le sera en $F_t = f + \frac{1}{N}$. En effet, il existe deux possibilités. Soit l'individu qui intervient pour faire passer de $F_t = f$ à $F_{t+1} = f + \frac{1}{N}$ suit son signal privé, dans ce cas notre agent a intérêt à être mimétique puisque le signal public en $(t + 1)$ contient plus d'information qu'en t. Soit celui-ci est mimétique et dans ce cas là la valeur informationnelle du signal public est identique aux deux dates, et il concerve en $(t + 1)$ le comportement qu'il aurait eu en t. Le résultat ci-dessus découle alors du fait que le modèle sous-jacent que mobilise l'utilisateur est fixé et indépendant du temps, et ainsi si l'individu est mimétique en t pour une certaine valeur de F, il le sera également à toutes les autres dates.

Il faut maintenant aborder une deuxième étape dans l'argumentation car on ne sait en fait pas d'ou part le processus. Pour le dire autrement on ne sait pas en arrivant en f si on vient de $\left(f+\frac{1}{N}\right)$ ou de $\left(f-\frac{1}{N}\right)$. Il faut donc regarder comment évolue l'information si on arrive en f par les valeurs supérieures. On ne peut faire l'hypothèse de mimétisme puisque dans ce cas il s'agit de copier la minorité et si l'individu est mimétique en $\left(f+\frac{1}{N}\right)$ la démonstration est terminée, car on serait passé en $\left(f+\frac{2}{N}\right)$ et non pas en f. Comme la transition se fait entre les états $\left(f+\frac{1}{N}\right)$ et f l'individu actif qui fait passer d'un état à l'autre n'a pas opté pour le mimétisme. Il a donc suivi son signal privé, ce qui amène le signal public à être informationnellement plus précis mais en apportant un poids moins important à l'état du monde H. On en conclut que le signal privé gagne encore en poids relativement au signal public dans l'incitation à prendre la décision A mais dans ce cas l'individu n'est pas mimétiques en f et cela contredit notre hypothèse de départ. Par contradiction l'individu sera mimétique en $\left(f+\frac{1}{N}\right)$. Dans ce cadre d'étude si un agent a intérêt au mimétisme pour une certaine valeur de $F = f$, il y aura également intérêt pour toute proportion majoritaire supérieure: $\left(f+\frac{i}{N}\right)$ si $f > \frac{1}{2}$ et $\left(f-\frac{i}{N}\right)$ si $f < \frac{1}{2}$, avec $N\cdot(1-f) \geq i > 0$. Nous excluons ainsi les cas où le mimétisme perd de sa pertinence lorsque l'opinion majoritaire dépasse une autre valeur critique supérieure.

Une façon, moins restrictive dans la présentation, que l'introduction de cette dichotomie des processus conduisant à un même état, consiste à supposer que les processus ne partent pas des extrêmes. On a vu ci-dessus que le passage de f à $\left(f+\frac{1}{N}\right)$ avait tendance à favoriser le mimétisme à seuil. Ce qui ne favorise pas le mimétisme en $\left(f+\frac{1}{N}\right)$ lorsque le mimétisme est recquis en f est l'influence du passage de $\left(f+\frac{2}{N}\right)$ à f. L'influence de $P\left(f+\frac{1}{N}\right)$ sur elle même est en faveur du mimétisme à seuil puique le facteur conditionnel à $\theta = H$ est $(1-f)\cdot(1-p)+f\cdot p$, ce qui est supérieur à $p\cdot(1-f)+f\cdot(1-p)$ qui est le facteur si l'état du monde est $\theta = L$. Donc, si on conjugue les effets supérieurs et inférieurs, pour que le mimétisme soit à seuil, il faut que l'effet provenant des valeurs supérieures ne soit pas trop important. En fait il faut que l'effet sur la probabilité d'être en $\left(f+\frac{1}{N}\right)$ alors que l'on y est ou que l'on vient de f soit plus important que celui associé à un passage de $\left(f+\frac{2}{N}\right)$ à f si on postule que l'individu n'est pas mimétique en $\left(f+\frac{2}{N}\right)$.

Ces éléments ne sont qu'intuitifs. Leur intérêt est d'aider à mieux comprendre les mécanismes en jeu. Il y a, d'une certaine façon, un effet autoréalisateur de notre démarche car si on postule un mimétisme à seuil on peut établir un lien entre les probabilité au delà du seuil et dans ce cas effectivement ce comportement est pertinent. Par la suite on notera $S(\alpha)$ la stratégie qui consiste à suivre son signal privé sur l'intervalle $[\alpha; 1-\alpha]$ et à utiliser l'information du signal public sinon.

4 Caractérisation de la fonction de densité.

Il s'agit de préciser la forme du modèle des agents. Pour cela nous spécifions la distribution de probabilité P en utilisant deux éléments. Le premier sera l'hypothèse de symétrie entre les deux états de nature H ou L. Le second est associé au fait que le mimétisme des agents pour une certaine valeur f induit certains renseignements pour d'autres valeurs par raisonnement successif, tout comme on peut utiliser l'information contenue dans l'action d'un agent qui agit hors de la zone de mimétisme.

Chaque individu est caractérisé par une fonction de densité individuelle des probabilités qu'il associe aux différentes valeurs $f \in [0;1]$ que F peut prendre. Nous supposons en fait qu'il existe deux fonctions de densité relatives à l'un et l'autre des états de nature H et L, et nous considérons le cas parfaitement symétrique où l'individu est a priori totalement indifférent entre les deux états du monde. On établit tout d'abord le résultat suivant.

Lemma 1

$$P(f \mid H) = P((1-f) \mid L) \tag{4}$$

Démonstration.

Soit R la variable aléatoire qui caractérise le nombre d'individus ayant raison quand à leur prévision sur l'état du monde. L'hypothèse de symétrie signifie que la probabilité que le nombre d'individus R soit r ne dépend pas de l'état du monde et prend la même valeur que celui-ci soit H ou L: On a

$$\left\{\begin{array}{l} Pr(R = r \mid H) = Pr(R = r \mid L) \\ Pr(R = 1 - r \mid H) = Pr(R = 1 - r \mid L) \end{array}\right. \tag{5}$$

et

$$\left\{\begin{array}{ll} Pr(R = r \mid L) & = 1 - Pr(R = 1 - r \mid L) \\ Pr(R = r \mid H) & = 1 - Pr(R = 1 - r \mid H) \end{array}\right. \tag{6}$$

Si l'état du monde est H cela signifie que $R = f$ (si f représente le nombre d'individus ayant choisi A), alors que si l'état du monde est L la situation est $R = (1-f)$: On a donc $Pr(R = f \mid H) = P(f \mid H)$ et $Pr(R = f \mid L) = P(1 - f \mid L)$. On déduit donc (équation (5)) l'égalité (1). ■

L'équation (1) nous indique en particulier que les deux courbes se croisent en $f = \frac{1}{2}$.

On s'intéresse maintenant à leur caractérisation sur $[\alpha; 1-\alpha]$. Sur cet intervalle le processus est similaire à un processus binomial, ce qui fait que selon la valeur du seuil on aura une densité croissante ou uni-modale. Il est possible de montrer que si à partir d'une certaine valeur $f > \alpha$ la densité est décroissante alors elle le sera sur le reste de l'intervalle (hors zone de mimétisme).

Lemma 2 Si sur $[\alpha; 1-\alpha[$ la densité de probabilités conditionnelle à l'état H devient décroissante alors elle le sera sur le reste de l'intervalle.

Démonstration.

On a

$$\begin{array}{r} P(f \mid H) = P\left(f - \frac{1}{N} \mid H\right) \cdot \left(1 - f + \frac{1}{N}\right) \cdot p \\ + P(f \mid H) \cdot [f \cdot p + (1-f) \cdot (1-p)] \\ + P\left(f + \frac{1}{N} \mid H\right) \cdot \left(f + \frac{1}{N}\right) \cdot (1-p) \end{array} \tag{7}$$

Si on pose $P(f \mid H) \geq P\left(f - \frac{1}{N} \mid H\right)$ on en déduit que

$$\begin{aligned} P(f \mid H) \cdot \left[1 - \left(1 - f + \tfrac{1}{N}\right) \cdot p - [f \cdot p + (1-f) \cdot (1-p)]\right] \\ \geq P\left(f + \tfrac{1}{N} \mid H\right) \cdot \left(f + \tfrac{1}{N}\right) \cdot (1-p) \end{aligned} \tag{8}$$

soit:

$$\begin{aligned} P(f \mid H) \cdot \left[f \cdot (1-p) - \tfrac{p}{N}\right] \\ \geq P\left(f + \tfrac{1}{N} \mid H\right) \cdot \left(f + \tfrac{1}{N}\right) \cdot (1-p) \end{aligned} \tag{9}$$

et comme $\left[f + p \cdot \left(f - \frac{1}{N}\right)\right] \leq \left(f + \frac{1}{N}\right) \cdot (1-p)$ on a $P(f \mid H) \geq P\left(f + \frac{1}{N} \mid H\right)$.
■

La conséquence de ce résultat est importante car celui-ci indique que la distribution de probabilité à l'intérieur des seuils (le seuil prend la valeur zéro si les agents ne sont pas mimétiques et le résultat reste valide) possedera au plus un pic de probabilité, et sinon elle sera monotone. Pour un état de nature donné θ, les agents assignent une probabilité de plus en plus élevée aux différents évènements lorsque l'on se rapproche de la bonne opinion pour ce θ, jusqu'à une certaine valeur, qui est la valeur maximale de la distribution P, et à partir de laquelle la fonction P est décroissante. Pour finir enfin, on exprime la forme de la distribution de probabilité à l'extérieur des seuils si l'individu relie les différentes probabilités selon les probabilités de transitions de l'un à l'autre des états. Le premier résultat est la croissance de la distribution de probabilité lorsque l'on dépasse le seuil.

Lemma 3 Sur l'intervalle $]1-\alpha; 1[$ la densité de probabilité est croissante et on a

$$P\left(f + \frac{1}{N} \mid \theta\right) = P(f \mid \theta) \cdot \frac{1-f}{1-f-\frac{1}{N}} \tag{10}$$

pour $\theta = H$ ou $\theta = L$. On a le résultat symétrique sur $]0; \alpha[$ avec

$$P\left(f - \frac{1}{N} \mid \theta\right) = P(f \mid \theta) \cdot \frac{f}{f - \frac{1}{N}} \tag{11}$$

Démonstration.

On effectuera la démonstration sur $]1-\alpha; 1[$, la preuve pour l'autre intervalle étant parfaitement symétrique. Comme nous sommes au delà du seuil, on peut se trouver en $\left(f + \frac{1}{N}\right)$ de deux façon. Le premier cas est celui où on y était (avec une probabilité $P\left(f + \frac{1}{N} \mid \theta\right)$) et on y reste (avec une probabilité de $\left(f + \frac{1}{N}\right)$ qui correspond à la probabilité que l'individu tiré ait déjà opté pour A). Le second est celui on on passe de f à $\left(f + \frac{1}{N}\right)$, la probabilité de transition étant simplement celle de tirer un individu ayant au préalable opté pour B. La probabilité de ce second évènement est donc $P\left(f + \frac{1}{N} \mid \theta\right) \cdot \left(1 - f - \frac{1}{N}\right)$. On a ainsi:

$$P\left(f + \tfrac{1}{N} \mid \theta\right) = P(f \mid \theta) \cdot (1-f) + P\left(f + \tfrac{1}{N} \mid \theta\right) \cdot \left(1 - f - \tfrac{1}{N}\right) \tag{12}$$

qui implique directement (10). Comme le facteur $\frac{1-f}{1-f-\frac{1}{N}} > 1$ sur $]1-\alpha;1[$ la fonction est croissante en f. ■

On peut maintenant représenter les fonctions de densité[4].

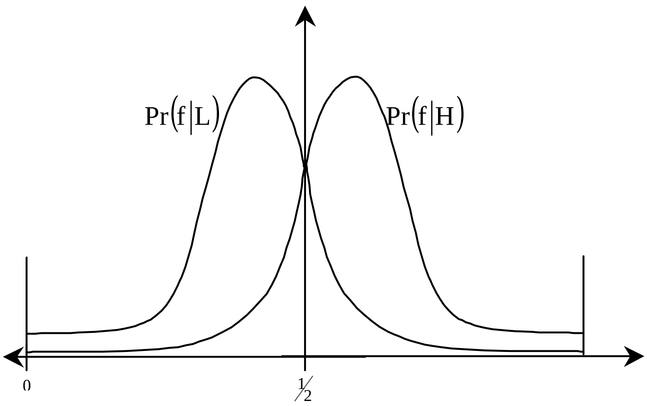

Figure 1: Forme générale des distributions de probabilité

Toutefois, rien n'indique que la capacité des agents à extraire de l'information du signal public les conduise à délaisser leur information privée. La problématique de l'agrégation d'information qui se retrouve …nalement dans la densité de probabilité implique que selon la con…ance relative de chacun dans son information privée relativement à l'information du signal public les agents auront plus ou moins tendance à adopter une stratégie mimétique. On reviendra sur les implications hypothètiques que nous avons retenues concernant l'information délivrée par le signal public, après l'étude du cas général de la comparaison entre signal public et signal privé, qui nous permettra de justi…er le mimétisme à seuil.

5 Arbitrage entre information publique et information privée et existence d'un seuil non nul.

Nous avons proposé des intuitions en faveur du mimétisme à seuil et précisé la forme de la distribution P. Nous allons maintenant dé…nir les conditions sur celle-ci pour lesquelles le mimétisme émerge. Avant de passer à l'étude de l'interaction de comportements à seuil nous reprenons le cas général de l'arbitrage entre information publique et information privée. On établit le critère d'arbitrage entre les deux sources d'information. On pourra ainsi montrer, dans un premier temps, que sous l'hypothèse d'a¢nement de l'information publique

[4] La graphique décrit la situation sans seuil.

le mimétisme est à seuil. Ensuite, on montre qu'il existe nécessairement des valeurs sur $[0;1]$ pour lesquelles le signal public est plus précis. Intuitivement, on remarque en regardant ce vers quoi converge la dynamique lorsque la stratégie est $S(0)$, que celle-ci ne peut-être meilleure réponse à elle-même. Finalement on montre explicitement, par l'absurde, qu'il existe un seuil de mimétisme strictement positif.

Theorem 4 L'arbitrage entre information privée et information publique se fait selon le critère suivant: suivre son information publique $F = f$ plutôt que son signal privé σ_i dès lors que

$$\frac{\Pr(f \mid \theta)}{\Pr\left(f \mid \bar{\theta}\right)} > \frac{p}{1-p} \tag{13}$$

avec $\theta = H$ si $f > \frac{1}{2}$ et $\theta = L$ sinon ($\bar{\theta}$ étant le complémentaire de θ).

Démonstration.

Supposons que l'individu actif i ait à sa disposition l'ensemble d'information suivant $\Theta_i = \left\{\sigma_i = -; F = f > \frac{1}{2}\right\}$. Si le signal privé était $\sigma_i = \{+\}$ il n'y aurait pas de problème décisionnel, et les deux cas possibles lorsque f est inférieur à $0;5$ sont symétriques. Il nous suffit donc d'étudier l'exemple ci-dessus. La distribution initiale de l'individu i est $\Pr(H) = \Pr(L) = \frac{1}{2}$. Dès lors que son signal privé est $\sigma_i = \{-\}$, sa croyance sur l'état du monde devient, en suivant la règle de bayes, $\Pr(H) = (1-p)$ et $p(L) = p$, puisque

$$\begin{aligned}
\Pr(H \mid -) &= \frac{\Pr(-\mid H)\cdot\Pr(H)}{\Pr(-\mid H)\cdot\Pr(H)+\Pr(-\mid L)\cdot\Pr(L)} = 1-p \\
p(L \mid -) &= \frac{\Pr(-\mid L)\cdot\Pr(L)}{\Pr(-\mid L)\cdot\Pr(L)+\Pr(-\mid H)\cdot\Pr(H)} = p
\end{aligned}$$

Ensuite, lorsque l'individu observe $F = f$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Pr(H \mid -; f) &= \frac{\Pr(f \mid H;-)\cdot\Pr(H;-)}{\Pr(f \mid H;-)\cdot\Pr(H;-)+\Pr(f \mid L;-)\cdot\Pr(L;-)} \\
&= \frac{\Pr(f \mid H;-)\cdot(1-p)}{\Pr(f \mid H;-)\cdot(1-p)+\Pr(f \mid L;-)\cdot p}
\end{aligned}$$

et symétriquement

$$\Pr(L \mid -; f) = \frac{\Pr(f \mid L;-)\cdot p}{\Pr(f \mid H;-)\cdot(1-p)+\Pr(f \mid L;-)\cdot p}$$

Un individu choisira A dès lors que $\Pr(H \mid -; f) > \frac{1}{2}$, c'est à dire si

$$\frac{\Pr(f \mid H;-)}{\Pr(f \mid L;-)} > \frac{p}{1-p} \tag{14}$$

Comme les signaux privés sont indépendants, le signal privé σ_i est non corrélé à l'information contenue dans F. Ainsi, $\Pr(f \mid H;-) = \Pr(f \mid H)$ et $\Pr(f \mid L;-) = \Pr(f \mid L)$, et (14) est équivalent à

$$\frac{P(f \mid H)}{P(f \mid L)} > \frac{p}{1-p} = \frac{\Pr(-\mid L)}{\Pr(-\mid H)} = \frac{\Pr(+\mid H)}{\Pr(+\mid L)} \tag{15}$$

■

Le théorème précédent établit un résultat général d'arbitrage entre information privée et information publique. Il fournit les conditions pour lesquelles l'individu a intérêt à être mimétique en délaissant son information privée. L'intuition que l'on trouve derrière ce résultat est assez simple. Si l'information contenue dans le signal public est précise, ce qui signifie qu'elle permet de distinguer facilement entre les deux états de nature (il s'agit de l'ampleur du ratio $\frac{\Pr(f|H)}{\Pr(f|L)}$), alors il pertinent de suivre ce signal. A partir du corollaire suivant, pour qu'apparaissent des comportements à seuil $S(\alpha)$ avec $\alpha > 0$ il faut que la distribution soit suffisamment contrastée aux extrémités de l'intervalle, à savoir que le niveau de ses valeurs du côté de la bonne opinion soit suffisamment élevé relativement à son niveau pour les valeurs du signal public proches de la mauvaise opinion[5]. La forme de la distribution indique donc la capacité des agents à utiliser l'information de F et celle-ci détermine leur propension au mimétisme puisque leur capacité à extraire l'information de leur signal privé est fixé dans le temps.

Ce résultat nous apporte également deux choses. Tout d'abord, on peut déduire d'un raisonnement par l'absurde qu'il existe un seuil de mimétisme $\alpha > 0$. Une façon de le dire est que $S(0)$ n'est pas une stratégie meilleure réponse à elle-même, c'est à dire que la distribution de probabilité n'est pas compatible avec cette stratégie. Ensuite, il permet de démontrer que dès lors que le signal public vérifie la condition de Monotone Likelyhood Ratio Property (dorénavant $MLRP$ - Milgrom (1981)) l'adoption du mimétisme se fera selon un comportement à seuil (la condition est suffisante mais non nécessaire). Cette propriété suppose que le contenu informationnel du signal public évolue positivement avec sa valeur. C'est à dire, plus F s'approche de 1, plus la probabilité que l'état du monde soit H relativement à celle qu'il soit L pour cette valeur aura tendance à s'accroître.

Corollary 5 *Sous l'hypothèse $MLRP$ le comportement sera à seuil.*

Démonstration.

La propriété $MLRP$ (adaptée à notre cadre d'étude) est la suivante: si $f > f'$, alors $\frac{\Pr(f|H)}{\Pr(f|L)} > \frac{\Pr(f'|H)}{\Pr(f'|L)}$. Ainsi, dès lors que pour une certaine valeur de $(1-\alpha) > \frac{1}{2}$ on a $\frac{\Pr(1-\alpha|H)}{\Pr(1-\alpha|L)} > \frac{p}{1-p}$, il en est ainsi pour toute valeur de $f > (1-\alpha)$. Selon l'hypothèse $MLRP$, on aura $\frac{\Pr(1-f|H)}{\Pr(1-f|L)} > \frac{\Pr(1-\alpha|H)}{\Pr(1-\alpha|L)} > \frac{p}{1-p}$. Symétriquement pour les valeurs inférieures à $\frac{1}{2}$, la condition $MLRP$ s'écrivant $\frac{\Pr(f|L)}{\Pr(f|H)} > \frac{\Pr(f'|L)}{\Pr(f'|H)}$, le mimétisme sera à seuil au delà de la valeur $(1-\alpha)$ et pour tout $f < \alpha$. ■

On se placera dès lors dans ce cadre d'analyse. Le signal public est plus fin que le signal privé à chaque étape, en ce sens que sa précision est croissante avec le niveau de majorité, et donc le comportement est à seuil. Lorsque les agents

[5] Il est bien entendu évident que lorsque l'on parle de bonne ou mauvaise opinion, c'est relativement à l'état de nature θ.

entrent dans une zone de mimétisme, on montre, à partir de l'évolution de la distribution de probabilité au delà des seuils, qu'une fois l'opinion pris dans une cascade, le signal public n'incorpore plus d'information.

Proposition 6 Le contenu informationnel est identique pour chacune des valeurs appartenant à l'intervalle de mimétisme.

Démonstration.

La valeur de l'information en un état f est définie par le rapport entre $P(f \mid H)$ et $P(f \mid L)$. En utilisant le résultat du lemme (3), les équations (10) et (11) montrent que ce rapport ne change pas. Prenons l'exemple de l'intervalle $]0;\alpha[$ (équation (11)). Le rapport entre $Pr(f \mid \theta)$ et $Pr\left(f - \frac{1}{N} \mid \theta\right)$ vaut $\frac{f-\frac{1}{N}}{f}$ quel que soit l'état de nature θ. Ainsi, on a

$$\frac{Pr\left(f-\frac{1}{N} \mid H\right)}{Pr\left(f-\frac{1}{N} \mid L\right)} = \frac{Pr(f \mid H)}{Pr(f \mid L)} \tag{16}$$

■

Dès lors que le système entre dans un phénomène de contagion mimétique plus aucune information n'est incorporée dans le signal public. C'est un phénomène d'absence de diffusion de l'information qui se met en place et seule l'information incorporée auparavant est contenue dans le signal public. C'est le caractère néfaste du mimétisme, qui n'incorpore plus d'information au signal public. On peut enfin montrer que le seuil de mimétisme optimal est différent de 0.

On l'observe tout d'abord de manière intuitive. Si on calcule ce vers quoi tend la distribution de probabilité du système lorsque tous suivent uniquement leur signal privé, on tombe sur la distribution binomiale (Gobillard (2002)). Or, dans ce cas (13) est vérifiée pour toute valeur de l'intervalle. On a en effet $P_{st}(n) = C_N^n \cdot p^n \cdot (1-p)^{N-n}$, et comme $P(f \mid H) = P(1-f \mid L) = P_{st}(n)$ avec $n = N \cdot f$,

$$\frac{P(f \mid H)}{P(f \mid L)} = \frac{P_{st}(n)}{P_{st}(N-n)} = \frac{C_N^n \cdot p^n \cdot (1-p)^{N-n}}{C_N^{N-n} \cdot p^{N-n} \cdot (1-p)^n} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{2 \cdot n - N} \tag{17}$$

ratio qui est supérieur à $\frac{p}{1-p}$ dès lors que $n > \frac{1}{2}$ et inférieur sinon, c'est à dire $\frac{P(f \mid L)}{P(f \mid H)} > \frac{p}{1-p}$. La prise en compte de ce phénomène amène chacun à adopter une autre stratégie que simplement toujours suivre son signal privé. On peut également en proposer une démonstration plus précise.

Proposition 7 Il existe un seuil de mimétisme non nul.

Démonstration.

Il suffit pour cela de montrer que la stratégie $S(0)$ n'est pas meilleure réponse à elle-même, c'est à dire que si les agents suivent cette stratégie alors il est intéressant d'être mimétique en au moins une valeur de $[0;1]$. On le montre par l'absurde sur les valeurs extrêmes de l'intervalle. Supposons que l'individu ne soit pas mimétique en 1, et qu'il ne le soit pas non plus en $\left(1-\frac{1}{N}\right)$. Dans ce cas on a $\frac{P(1|L)}{P(1|H)} > \frac{p}{1-p}$. Ensuite,

$$P(1|\theta) = P(1|\theta)\cdot\Pr(+|\theta) + P\left(1-\frac{1}{N}|\theta\right)\cdot\Pr(+|\theta)\cdot\frac{1}{N} \tag{18}$$

nous donne

$$P(1|\theta)\cdot(1-\Pr(+|\theta)) = P\left(1-\frac{1}{N}|\theta\right)\cdot\Pr(+|\theta)\cdot\frac{1}{N} \tag{19}$$

On en déduit que $\frac{P\left(1-\frac{1}{N}|H\right)}{P\left(1-\frac{1}{N}|L\right)} = \frac{1-p}{p}\cdot\frac{P(1|H)}{P(1|L)}$, et comme $\frac{P(1|H)}{P(1|L)} \quad \frac{p}{1-p}$ on doit avoir $\frac{P\left(1-\frac{1}{N}|H\right)}{P\left(1-\frac{1}{N}|L\right)} \quad 1$, ce qui par hypothèse n'est possible que si pour toute valeur sur $]0;1[$ ce rapport vaut exactement 1, ce qui est impossible. Il y a deux possibilites. La première est celle où la distribution de probabilité prend la même valeur sur tout l'intervalle. Lorsque l'on se trouve sur une region hors mimétisme, on a

$$\begin{aligned} P(f|H) = {} & P\left(f-\frac{1}{N}|H\right)\cdot\left(1-f+\frac{1}{N}\right)\cdot p \\ & +P(f|H)\cdot[f\cdot p+(1-f)\cdot(1-p)] \\ & +P\left(f+\frac{1}{N}|H\right)\cdot\left(f+\frac{1}{N}\right)\cdot(1-p) \end{aligned} \tag{20}$$

et il est impossible que $P(f|H) = P\left(f-\frac{1}{N}|H\right) = P\left(f+\frac{1}{N}|H\right)$ sous (20). Il est possible que la distribution P soit croissante sur la première moitié de l'intervalle et décroissante ensuite, et que les deux distributions soient identiques. Mais dans ce cas en $\frac{1}{2}$ on a

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2}|H\right) = {} & P\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}|H\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\right)\cdot p + P\left(\frac{1}{2}|H\right)\cdot\frac{1}{2} \\ & +P\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{N}|H\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{N}\right)\cdot(1-p) \end{aligned} \tag{21}$$

et si le ratio vaut 1, on a $P\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{N}|H\right) = P\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{N}|L\right)$ et par symétrie $P\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}|L\right) = P\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{N}|H\right)$ ce qui suppose, d'après (21) que $P\left(\frac{1}{2}|H\right)\cdot\frac{1}{2} = P\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{N}|H\right)\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{N}\cdot(1-2\cdot p)\right]$ et donc $P\left(\frac{1}{2}|H\right) < P\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{N}|H\right)$ ce qui est impossible. Si la distribution P est décroissante elle le reste tout le temps pour les valeurs supérieures donc elle ne peut l'être qu'à partir de $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{N}\right)$, mais dans ce cas $P\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{N}|H\right) \neq P\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{N}|L\right)$, car différent de $P\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}|H\right)$, et la symétrie conclut. ■

On peut maintenant donner deux éléments de conclusion. Il est tout d'abord impossible que les agents adoptent la stratégie $S(0)$, et sous l'hypothèse MLRP ils auront une stratégie mimétique à seuil. Cela termine l'étude intiale, sur la rationalité du mimétisme à seuil.

6 Le mimétisme à seuil: étude de la dynamique globale d'interaction

Supposons maintenant que l'économie est constituée d'un ensemble d'individus homogènes ayant la même stratégie $S(\alpha)$. Quelle est le résultat de leur interaction? La dynamique conduit l'économie au concensus où tous prennent la même décision, avec une certaine probabilité non-nulle que tous se trompent. Le poids associé à cet état …nal est d'autant plus élevé que le seuil de mimétisme ® est important et que l'information privée est vague (c'est à dire que (1 ¡ p) est grand).

6.1 La règle de décision

La règle que décision individuelle est très simple. Elle ne tient compte que de la relative intensité de l'opinion collective. Lorsque l'opinion globale est marquée (en ce sens qu'une majorité forte, qu'elle se soit portée sur A ou sur B, se dégage des actions réalisées indépendemment les unes des autres), les individus sont mimétiques au détriment éventuel du contenu informatif de leur signal privé, alors qu'ils choisissent de faire con…ance à leur information privée dans le cas contraire. En d'autre termes, et en notant ® la valeur seuil avec $\frac{1}{2}$ ¸ ® ¸ 0, l'individu suivra l'opinion majoritaire quel que soit le contenu informationnel de son signal dans deux cas: lorsque f ¸ 1 ¡ ® (les individus ont majoritairement choisi l'action A) ou alors si f ® (les individus ont majoritairement choisi l'action B), et il fera con…ance à son information privée sinon. Nous pouvons plus précisément représenter les motifs de décision comme suit:

² L'individu joue A lorsque les individus ont su¢samment joué A (f ¸ ®) et que son signal est f+g, ou alors lorsque son signal est f ¡ g mais que l'opinion est fortement dirigée vers la prise de décision A, à savoir f > (1 ¡ ®);

² Il joue B lorque l'opinion majoritaire s'est su¢samment portée sur B (f (1 ¡ ®)) et que son information privée l'incite à opter pour B (le signal est f ¡ g), ou alors, si les informations privées et publiques sont contradictoires et que globalement une forte majorité d'agents a opté pour B (dans ce cas le signal est f+g et f < ®).

6.2 Etude de la distribution stationnaire.

On s'intéresse maintenant au résultat de la dynamique. Celui-ci n'a pas la forme de l'équilibre, il s'exprime sous forme d'une distribution de probabilité qui indique la probabilité de se trouver en chacune des valeurs de F une fois la dynamique stabilisé. Lorsque l'on étudit ce vers quoi converge le processus, on cherche à dé…nir son état stationnaire, c'est à dire la situation où la distribution de probabilité n'évolue plus. C'est pourquoi on parle de distribution stationnaire. Si le modèle converge, en terme de probabilités, vers une loi stationnaire P_{st}, celle-ci doit satisfaire la condition (22):

$$P_{st}(n) ¢ p(n; n+1) = P_{st}(n+1) ¢ p(n+1; n) \; 8n \; 2 \; [0; N \; ¡ \; 1] \qquad (22)$$

Cette condition, dite de balance équilibrée (detailed balance), signi…e que la distribution stationnaire dé…nit les situations où le ‡ux net en terme de probabilité entre un état et son état voisin est nul. On le traduit par le fait que la probabilité $P_{st}(n)$ d'être en (n) par celle p(n; n + 1) de quitter cet état pour l'état supérieur $(n+1)$ est égale à la probabilité $P_{st}(n+1)$ d'être en $(n+1)$ par celle $p(n+1;n)$ de transiter de l'état $(n+1)$ à l'état (n). Dans le modèle étudié certaines valeurs des probabilités de transition sont nulles, lorsque les comportements sont dans la zone de mimétisme $[0; N \cdot \alpha] \cup [(1-\alpha) \cdot N; N]$. Leur présence au dénominateur dans la forme mathématique de la loi de probabilité pose problème. C'est pourquoi nous allons introduire ce que nous appelons $l'\varepsilon-game$. Il s'agit du modèle de jeu précédent mis à part pour les probabilités de transition à valeur nulle, en raison du mimétisme, qui prennent une valeur ε. Le modèle qui nous intéresse est celui qui tend vers notre modèle de départ, c'est le cas limite de l'$\varepsilon - game$ à savoir celui où $\varepsilon \underset{1}{\approx} \sigma\left(\frac{1}{e^x}\right)$. En approchant la distribution non-hergodique de la sorte on obtient un résultat général, celui de la convergence vers le consensus, qui se présente sous une forme agrégée. En fait, la probabilité d'entrer dans l'une ou l'autre des cascades dépend de la situation de départ, la probabilité étant plus ou moins forte selon que l'on se trouve proche ou éloigné de l'un ou l'autre des seuils de mimétismes. L'intérêt est ici de proposer un résultat général, même s'il est approximatif, qui reste cohérent avec l'hypothèse d'incertitude faite au départ. C'est pourquoi on se bornera essentiellement à mobiliser les aspects qualitatifs de celui-ci. L'étude selon l'état initial est étudié ailleurs (Gobillard (2003)).

L'étude du résultat asymptotique de la dynamique sera développé en plusieurs étapes. Nous allons tout d'abord calculer la valeur des probabilités sur chacun des intervalles où la densité de probabilité a une expression homogène, qui est différente de sa forme sur les autres intervalles. Nous établissons ce calcul en fonction de la valeur de la probabilité d'être en $\frac{N}{2}$ à l'état stationnaire. Il existe quatre intervalles qui se distinguent par la forme des probabilités de transition entre les états voisins. Il y a tout d'abord les deux intervalles extrêmes où le mimétisme amène les probabilités de transition d'un état à un autre à être différentes de celles associées aux deux intervalles autour de $\frac{N}{2}$ sur lesquels la décision dépend de la valeur du signal privé σ observé[6]. Le calcul de la distribution stationnaire sera effectué pour chacun des intervalles I_i pour $i = \{1;2;3;4\}$ avec:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= [N \cdot (1-\alpha) + 1; N] \\
I_2 &= \left[\frac{N}{2} + 1; N \cdot (1-\alpha)\right] \\
I_3 &= \left[N \cdot \alpha; \frac{N}{2} - 1\right] \quad \text{et} \\
I_4 &= [0; N \cdot \alpha]
\end{aligned}
$$

Nous déterminons la distribution stationnaire P_{st}, conformément à l'équation (22). Cette forme récurrente de la distribution stationnaire de l'équation maître

[6] La distribution stationaire a une forme unique sur l'intervale $[\alpha; 1-\alpha]$. Le découpage en deux sous-espaces autour de $\frac{N}{2}$ permet d'introduire la valeur de la distribution en ce point comme point de référence, ce qui s'avère utile pour la suite.

donne la solution générale suivante:

$$P_{st}(n) = P_{st}(0)\cdot\prod_{k=0}^{n-1}\frac{p(k;k+1)}{p(k+1;k)} \quad \forall n\in[0;N-1] \tag{23}$$

qui peut également s'écrire

$$P_{st}(n) = \begin{cases} P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\cdot\prod_{k=\frac{N}{2}}^{n-1}\frac{p(k;k+1)}{p(k+1;k)} \quad \forall n\in\left[\frac{N}{2}+1;N-1\right] \\ P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\cdot\prod_{k=n}^{\frac{N}{2}-1}\frac{p(k;k+1)}{p(k+1;k)} \quad \forall n\in\left[0;\frac{N}{2}-1\right] \end{cases} \tag{24}$$

Les probabilités de transition sont les suivantes. Pour chacun des intervalles, la probabilité $p(i;j)$ de passer de l'état i à l'état j est nulle dès lors que $j < i-1$ ou $j > i+1$, puisqu'à chaque étape seulement un individu a la possibilité de changer d'opinion. On notera i_j l'évènement suivant: l'individu actif de la période a choisi j précédemment avec $j\in\{A;B\}$. On a, pour chaque état, les définitions suivantes des probabilités de transition:

$$\begin{aligned} p(n;n+1) &= \Pr(\text{choisir } A \mid i_B)\cdot\Pr(i_B) \\ p(n;n-1) &= \Pr(\text{choisir } B \mid i_A)\cdot\Pr(i_A) \\ p(n;n) &= \Pr(\text{choisir } A \mid i_A)\cdot\Pr(i_A) \\ &\quad +\Pr(\text{choisir } B \mid i_B)\cdot\Pr(i_B) \end{aligned}$$

sachant que la probabilité que l'individu qui est tiré au sort a choisi B est $\frac{N-n}{N}$ et que celle qu'il ait choisi A est $\frac{n}{N}$.

Sur I_2 et I_3, les probabilités de choisir A ou B sont corrélées à la qualité du signal, et valent p dans un cas et $(1-p)$ dans l'autre. Lorsque l'individu est mimétique, il suit l'opinion majoritaire avec une probabilité $(1-\varepsilon)$ et prend l'opinion contraire avec une probabilité asymptotiquement nulle ε et ces probabilités dépendent de l'espérance de flux net entre ces deux états. Nous définissons $a = \frac{p}{1-p}$. On peut alors écrire les différentes probabilités de transition sur chacun des intervalles. Sur $I_1 = [N\cdot(1-\alpha)+1;N]$ on a

$$\begin{cases} p(k;k+1) = \frac{(N-k)}{N} \\ p(k+1;k) = \frac{(k+1)}{N}\cdot\varepsilon \end{cases}; \tag{25}$$

sur $I_2 = \left[\frac{N}{2}+1;N\cdot(1-\alpha)\right]$ et $I_3 = \left[N\cdot\alpha;\frac{N}{2}-1\right]$:

$$\begin{cases} w(k;k+1) = \left(\frac{N-k}{N}\right)\cdot(p) \\ w(k+1;k) = \left(\frac{k+1}{N}\right)(1-p) \end{cases}; \tag{26}$$

et sur $I_4 = [0;N\cdot\alpha]$

$$\begin{cases} w(k;k+1) = \frac{(N-n)}{N}\cdot{}^{2} \\ w(k+1;k) = \frac{(k+1)}{N} \end{cases}: \tag{27}$$

La forme finale de la distribution asymptotique est donnée en appendice. Elle nous conduit à l'établissement des résultats suivants en terme de mimétisme à seuil, de cascade informationnelle et de concensus.

6.3 Mimétisme et consensus.

Lorsque l'on traite complètement le processus aléatoire on obtient des résultats qui, étant donné la nature des comportements individuels et la structure du modèle ne sont pas sureprenants. L'important est d'avoir en tête leur caractère rationnel. Le résultat asymptotique est celui du consensus[7]. La probabilité d'atteindre la zone de mimétisme étant de 1, on converge à partir d'un certain moment vers les deux points absorbants que sont les valeurs extrêmes 0 et 1. La probabilité d'erreur n'est pas nulle, et dépend négativement du seuil de mimétisme et positivement de la précision du signal privé. Ces résultats sont démontrés successivement dans les proposition à venir, et pour terminer on établit un lien avec les cascades informationnelles.

Proposition 8 La situation …nale est celle du consensus où les individus prennent tous la même décision.

Démonstration.
Voir appendice.

Proposition 9 Il existe une probabilité non nulle que tous aient pris la mauvaise décision et cette probabilité vaut $P_{st}(0) = \frac{a^{N®}}{a^{N®} + a^{N ¡ N®}}$ tandis que la probabilité que tous aient raison est $P_{st}(N) = \frac{a^{N(1 ¡ ®)}}{a^{N®} + a^{N ¡ N®}}$.

Démonstration.
Voir appendice.

On retrouve les conséquences déjà connues des e¤ets d'externalité d'information. A partir d'une certaine quantité d'information contenue dans le signal public les individus entrent dans une dynamique où l'information privée est oubliée au pro…t de celle déjà contenue dans le comportement des individus précédents. L'agrégation d'informations individuelles au travers des actions prises par chacun a¢ne l'information à disposition de tous individuellement puisque le contenu informationnel de celui-ci est supérieur à celui du signal privé, mais globalement l'input d'information introduit dans le système est largement réduit. On converge alors vers des situations extrêmes, avec certaines où tous les individus ont tort. On obtient en…n les relations générales suivantes.

Proposition 10 (i) L'espérance de gain est positivement corrélée avec p;

(ii) L'espérance de gain est négativement corrélée avec ®;

(iii) La probabilité que tous aient pris la mauvaise décision est une fonction qui est positivement corrélé au seuil de mimétisme ®;

(iv)La probabilité que tous aient pris la mauvaise décision est une fonction qui est négativement corrélée à la précision de l'information privé p;

[7] Le quali…catif asymptotique prend ici un double sens. Il signi…e tout d'abord que l'on se place à l'état stationnaire. Mais il signi…e également que l'on se place dans un cadre asymptotiquement équivalent à un processus hergodique, ce que l'on a appelé l'² ¡ game.

Démonstration.

(i) La démonstration est donnée ci-dessous, mais peut également se déduire du (iv). L'espérance E vaut

$$E = \frac{a^{N(1-\alpha)} - a^{N\alpha}}{a^{N\alpha} + a^{N-N\alpha}} \tag{28}$$

Soit $\chi = a^{N\alpha} + a^{N-N\alpha}$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dp} &= \frac{1}{\chi^2 \cdot p \cdot (1-p)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left[N \cdot (1-\alpha) \cdot a^{N\cdot(1-\alpha)} - N \cdot \alpha a^{N\cdot\alpha}\right] \cdot \left[a^{N\cdot(1-\alpha)} + a^{N\cdot\alpha}\right] \\ - \left[a^{N\cdot(1-\alpha)} - a^{N\cdot\alpha}\right] \cdot \left[N \cdot \alpha \cdot a^{N\cdot\alpha} + N \cdot (1-\alpha) \cdot a^{N\cdot(1-\alpha)}\right] \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{\chi^2 \cdot p \cdot (1-p)} \cdot \left\{ \left[2 \cdot N \cdot (1-\alpha) \cdot a^{N\cdot(1-\alpha)} \cdot a^{N\cdot\alpha} \right] - \left[2 \cdot N \cdot \alpha \cdot a^{N\cdot\alpha} \cdot a^{N\cdot(1-\alpha)} \right] \right\} \\
&= \frac{2 \cdot N \cdot a^N \cdot (1 - 2 \cdot \alpha)}{\chi^2 \cdot p \cdot (1-p)} \geq 0
\end{aligned}$$

Etant donnée la complémentarité des probabilités aux points absorbants, on peut se restreindre à la seule évaluation de l'une ou l'autre de ces deux probabilités. Ce que nous faisons pour le (ii).

(ii)Comme $E = P_{st}(N) - P_{st}(0)$, lorsque l'état de nature est H, et que $P_{st}(N) + P_{st}(0) = 1$, on a $\frac{dE}{d\alpha} = 1 - 2 \cdot \frac{dP_{st}(0)}{d\alpha}$. Le signe de variation de E est donc contraire à celui de $P_{sr}(0)$, qui est positif (voir (iii)).

(iii) (45) peut également s'écrire

$$P_{st}(0) = \frac{1}{1 + a^{N-2N\alpha}} \text{ et } P_{st}(N) = \frac{1}{1 + a^{2N\alpha - N}} \tag{29}$$

La probabilité que tous aient fait le mauvais choix est $P_{st}(0)$. Soit $z(\alpha, p) = a^{N(1-2\alpha)}$. On a

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = -2 \cdot N \cdot (1 - 2\alpha) \cdot a^{N\cdot(1-2\alpha)} \tag{30}$$

avec $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, et donc $\frac{\partial z}{\partial \alpha} < 0$ et donc $\frac{dP_{st}(0)}{d\alpha} > 0$.

(iv) Comme $a = \frac{p}{1-p}$, on a

$$\frac{\partial z}{\partial p} = N \cdot (1 - 2\alpha) \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} \right) a^{N\cdot(1-2\alpha)} \tag{31}$$

qui donne $\frac{\partial z}{\partial p} > 0$ puisque $1 > p > \frac{1}{2}$ et $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, et donc $\frac{dP_{st}(0)}{dp} < 0$. ■

La probabilité d'entrer dans une mauvaise cascade est une fonction croissante de α et décroissante de p. Si on considère que la tendance au mimétisme est associée à la valeur de α, plus ce seuil est élévé plus on accroît la probabilité d'entrer dans la mauvaise cascade. Ce résultat est logique puisque l'on restreint la zone où les comportements incorporent de nouvelles informations. On fera deux remarques. Tout d'abord, étant donné qu'il existe une valeur optimale α donnée, le comportement rationnel amène la probabilité d'entrer dans la mauvaise cascade à prendre une certaine valeur qui n'est pas minimale. En fait, la valeur de ce seuil est uniquement fonction de la distribution P et de p. On peut comprendre ce résultat de deux façons. Soit les individus ont relativement peu confiance en leur propre estimation, et ils adèrent facilement au mimétisme, soit leur capacité à extraire de l'information du signal public est élevée, et c'est pourquoi elle les conduit rapidement au mimétisme. Le seuil, et donc la probabilité d'entrer dans une mauvaise cascade sera, donc d'autant plus élevé que l'individu a peu confiance en son évaluation privée ou que F est informatif pour lui. Ensuite, on ne retrouve pas (avec le (iii) de la proposition (10)) le résultat ayant conduit au paradoxe du mimétisme (Gobillard (2002)). Lorsque l'interaction est guidée par des comportements mimétiques en stratégie mixte on obtient une corrélation négative entre convergence vers la bonne opinion et quantité d'information intégrée par les comportements individuels. On interprète ce résultat comme relatif à la structure du modèle. Dans le présent modèle, le mimétisme ne joue que lorsque la majorité atteint le niveau seuil $(1 - \alpha)$. La probabilité d'entrer dans la bonne cascade dépend de celle d'atteindre la zone de mimétisme associée à la bonne opinion. Le résultat est symétrique lorsque les individus se sont majoritairement égarés mais comme la probabilité d'entrer dans la bonne cascade augmente avec la valeur du seuil (sur $I_2 \cup I_3$ le processus se comporte selon la loi binomiale) la convergence vers la bonne opinion est négativement corrélée avec la tendance au mimétisme.

Néanmoins, pour bien saisir le phénomène il faudrait étudier l'espérance d'être du bon côté sur différentes échelles de temps. La probabilité d'entrée dans la zone de mimétisme, pour une temporalité définie, diffère selon le seuil considéré. Plus le seuil est faible, plus le temps pour l'atteindre et entrer dans un phénomène de contagion l'est également. Cette effet est contraire au précédent en ce qui concerne l'adoption de la bonne opinion, au niveau agrégé; il faut donc en tenir compte. A la simple causalité précédente doit se substituer une analyse intégrant l'arbitrage entre probabilité d'être dans la bonne cascade et temps moyen pour y parvenir. L'évolution de l'efficacité globale du comportement des agents en fonction de α peut alors être spécifique.

Le résultat (iv) de la proposition (10) est relativement général, on le retrouve par exemple pour le modèle en stratégie mixte ou les modèles de CI. L'intuition est évidente puisque hors mimétisme les agents suivent leur information privée. Le résultat est néanmoins proposé toutes choses égales par ailleurs, c'est à dire sans tenir compte d'une éventuel lien entre le contenu informationnel de F et la précision du signal privé. Deux effets peuvent apparaître lorsque l'on modifie la valeur de p. Pour une distribution P donnée, le seuil de mimétisme diminue puique $\frac{p}{1-p}$ augemente. Le second effet provient du fait que la représentation individuelle de l'information publique peut être modifiée. Si l'agent modifie ainsi la distribution de probabilité sur laquelle repose sa prise de décision, par exemple pour une valeur $f > \frac{1}{2}$ donnée on a $\frac{P(f|H)}{P(f|L)}$ qui augmente. L'effet d'une modification de p n'est alors plus unilatérale. Par contre, si la qualité du signal des autres est fixée, moins l'information de l'individu actif est précise, plus celui-ci aura tendance à adopter un seuil élevé.

6.4 Mimétisme à seuil et cascade informationnelle

Pour terminer nous faisons un parallèle avec les résultats du modèle canonique de CI. Nous retrouvons en e¤et certains résultats obtenus par ailleurs.

De…nition 11 Un individu entre dans une cascade si il est le premier à agir sans tenir compte de son information privée.

De…nition 12 Un individu est dans une cascade si son action ne dépend pas de son signal informationnel privé[8]

Proposition 13 Si on entre dans une cascade on n'en sort pas.

Démonstration.

Le résultat est lié à l'homogénéité des agents et à la qualité de leur signal privé. Supposons qu'au début de la période t les agents sont hors cascade, que $f_{t ¡ 1} = (1 ¡ ®) > \frac{1}{2}$ et que l'individu actif en t change d'opinion et opte pour A. Cela signi…e que $f_t = \left(1 ¡ ® + \frac{1}{N}\right)$. Les agents entrent dans une cascade. L'information dont dispose l'individu actif en $(t + 1)$ lui conseille donc le mimétisme, et comme il est le premier cela signi…e qu'il entre dans une cascade. Il y a maintenant deux possibilités selon l'opinion qu'il avait adoptée dans le passé. Soit il avait déjà opté pour A et dans ce cas $f_{t+1} = ® + \frac{1}{N}$, soit il avait opté pour B et $f_{t+1} = ® + \frac{2}{N}$. Ainsi, $f_{t+1} ¸ ® + \frac{1}{N}$, ce qui signi…e que l'individu actif en $(t + 2)$ sera mimétique quelque soit son signal privé: il est dans une cascade. Un raisonnement similaire peut être e¤ectué à chaque étape et le processus F_t est fonction croissante en t. ■

Un autre double-résultat, que nous avons démontré précédemment porte sur le fait d'entrer presque sûrement dans une cascade et la probabilité non-nulle que celle-ci soit la mauvaise cascade, peut se présenter dans le cadre d'analyse des modèles de CI. Les démonstrations découlent des propositions du paragraphe précédent.

Proposition 14 On entre presque sûrment dans un cascade informationnelle.

Proposition 15 Il existe une probabilité non nulle d'entrer dans une mauvaise cascade.

Ces résultats sont typiques de ces modèles de chaînes mimétiques avec externalité d'information. Notre résultat porte en lui une di¤érence puisque tous les individus …nissent par adopter le même comportement. Cela tient à la structure de notre modèle, plus précisément au fait que les agents ne prennent pas une unique décision irrévocable puisqu'ils sont amenés à pouvoir modi…er leur choix presque surement. Ce n'est pas le cas dans le modèle de BHW puisque les agents interviennent séquentiellement dans un ordre établi de façon exogène et chacun n'intervient qu'une seule fois.

On observe l'e¤et d'un mimétisme généralisé: la contagion. Le fait que chacun prenne l'opinion du groupe comme référence à partir d'un certain niveau

[8] Nous reprenons ici la dé…nition de BHW.

critique de coordination conduit tout le monde à opter pour la même opinion par un pure e¤et de contagion de l'opinion dominante. La di¤usion d'une opinion est largement favorisée par le mimétisme. Ce lien serait plus nuancé si, par exemple, les individus avaient des seuils de mimétisme di¤érents car le processus de di¤usion lui-même serait à seuils. Dans ce cas, pour certaines valeur de F certains individus seraient mimétiques alors que d'autres, suivant leur signal privé, pourraient aller à l'encontre de l'opinion majoritaire. La contagion, sur certaines parties de l'intervalle (entre deux seuils d'individus), ne serait alors que partielle même si, au bout d'un certain temps, le modèle converge vers l'unanimité.

Le chaînes mimétiques ou CI peuvent s'interpréter de deux manières, ou en tous cas nous révèlent deux e¤ets, propres au mimétisme. On observe d'une part la di¤usion d'une opinion à l'intérieur du groupe par phénomène de contagion, où l'opinion de chacun repose sur une même référence. Mais il existe parallèlement un processus de non-di¤usion de l'information, de non-transmission de l'information privée, aux marchés par exemple, puisque les agents mimétiques ne suivent pas leur signal privé. A l'intérieur de la cascade les signaux privés sont comme inexistants. Il existe tout un ensemble d'informations disséminées parmi les individus qui est parfaitement abandonné lorsqu'ils sont pris dans la cascade. Il y a une impossibilite de la transmission de l'information et il en résulte une incapacité pour les agents à évaluer l'information contenue dans leurs actions (quand le processus est dans une cascade).

7 Conclusion et application: mimétisme et dynamique d'opinion sur les marchés …nanciers.

Lorsque l'on ne suppose pas un processus instantané ou in…ni dans l'agrégation d'information, on quitte le paradoxe de l'e¢ cience (Grossman (1976)) revisité (Gobillard (2002)). Le comportement des agents ne se base plus sur le résultat de l'action de tous et on observe un arbitrage à chaque étape entre signal public et signal privé. L'évolution de l'agrégation d'information amène les agents à être mimétiques lorsque le signal public contient su¢ samment d'information. Ce résultat est dans l'esprit de ceux des modèles de cascades informationnelles. Cette question de l'agrégation d'information nous conduit directement au coeur de la problématique de l'e¢ cience des marchés …nanciers, et de la capacité non-intentionelle d'un système composé de comportements individuels intéressés à conduire à une situation globalement e¢ cace. On a montré que l'externalité d'information a tendance à rejeter l'existence d'une parfaite agrégation de l'information privée dans l'information publique.

Si on connaît déjà d'une certaine façon l'impossibilité de l'e¢ cience informationnelle (on se réfère ici aux paradoxes informationnels de l'e¢ cience (Orléan et Tadjeddine (1998)) on comprend mieux la dynamique inhérente à l'évolution d'un système d'individus ayant chacun un fragment d'une information globale disséminée parmi eux. Au lieu d'un théorème d'impossibilité, lorsque les individus sont soit mimétiques soit informés, dans une relation …xe d'équilibre, apparaît une dynamique séquentielle dans le type de comportement à adopter. On observe ainsi deux étapes dans l'évolution du processus d'interaction. Il existe une première étape pendant laquelle les individus, en suivant leur signal privé, incorporent de l'information au signal public[9], à laquelle succède une période où seul le signal public indique quel comportement adopter et plus aucune information supplémentaire n'est alors mobilisée ou incorporée. Cet e¤et seuil est extrêment important, car il plonge le groupe dans une relation circulaire sur lui-même, où plus aucun lien avec l'exterieur n'est conservé. Le référent du groupe devient le groupe lui-même, ce qui peut avoir des conséquences extrêments puissantes, que l'on peut par exemple observer sur les marchés …nanciers. Dans cet esprit, on va maintenant s'intéresser à une application du modèle.

Le processus est intéressant pour la compréhension du fonctionnement des marchés …nanciers. Le modèle s'éloigne fortement des traditionnels modèles d'équilibre et s'intègre dans l'approche qui voit l'évolution des marchés comme une dynamique d'opinion. Une double remarque s'impose à ce niveau, car la démarche n'est pas si courante, elle nous semble toutefois pertinente, et peut alors nécessiter quelques précisions. Tout d'abord, une prise de position par un investisseur n'est pas autre chose que l'expression de son opinion quant à la conjoncture. L'information détenue par un agent n'est pas directement intégrée dans les prix comme si elle avait un contenu objectif, elle est l'expression de son interprétation personnelle, subjective. Les cotations observées sont alors la transcription, au niveau agrégé, des opinions de tous, c'est à dire l'opinion moyenne des intervenants. On peut alors parler d'opinion du marché, ou représentative du marché. Ensuite, cette approche basée sur le concept d'opinion nous semble de loin la plus pertinente lorsqu'il s'agit de traiter de l'information d'un prix de marché et de son processus d'extraction, interprétation et utilisation. Il semble relativement di¢cile, si ce n'est impossible, d'extraire explicitement une information exacte d'une variation de prix, qui de l'endettement, qui de l'évolution du secteur, qui de la situation globale de l'économie, etc. Tout d'abord, le signal informationnel que transmet l'investisseur privé à la communauté …nancière au travers de son action d'achat ou de vente n'est pas l'information brute qu'il reçoit au départ mais son interprétation et l'utilisation de cette dernière selon une règle d'action spéci…que. Ensuite, comment savoir si les investisseurs qui ont été à l'origine de l'évolution des cours ont pris connaissance d'une information sur la politique des dividendes? Sur la politique d'investissement de la …rme en question? Sur l'évolution d'un secteur? Sur un marché particulier à conclure? etc. En…n et surtout, au delà du caractère qualitatif de l'information l'investisseur doit être capable d'extraire le contenu précis de celle-ci, sa grandeur. Lorsqu'il n'a pas l'aptitude pour e¤ectuer une telle opération, celui-ci ne peut utiliser précisément l'information dans un modèle fondamentaliste d'évalutation du niveau des cours qui possède comme entrée la valeur de certaines variables. Reste encore à disposer de tels modèles. L'opération qui consiste à extraire de l'information des prix relève de considérations générales,

[9]On suppose implicitement en disant cela que le processus ne part pas des extrêmes.

qu'il s'agisse d'une espérance moyenne ou d'une distribution de probabilité à partir du prix des options par exemple (on peut se reporter à Brière (2002)). On ne peut explicitement extraire du prix d'autres éléments informatifs que sur le prix lui même ou la tendance générale des acteurs, excluant les évaluations précises. Il n'est pas possible de déduire du prix la valeur des inputs introduits dans l'évaluation des di¤érents intervenants. On peut construire de nombreux vecteurs de variation des di¤érentes variables qui amènent à une même conclusion concernant l'évaluation.

Ces multiples raisons amènent à penser les marchés …nanciers comme une dynamique d'opinion. Notre analyse porte sur des opinions ayant un caractère général, tel l'intérêt d'investir dans un secteur précis ou par exemple la capacité des technologies à fondamentalement boulverser la dynamique économique (et d'autres encore...), plus globalement à l'état de la conjoncture, à la prévision de son évolution. On propose une explication de comment se forme une opinion sur les marchés, ce que certains nomment une convention (Orléan (1999)). On prend le parti de considérer les estimations fondamentales comme relativement générales et plus spéci…quement binaires. De manière générale un investisseur est confronté à une triple éventualité: acheter, vendre ou ne rien faire. Ici, elle se transpose en une double opportunité: l'individu peut soit modi…er soit conserver sa précédente opinion. Dans notre modèle, où n'interagissent que des agents fondamentalistes, l'investisseur achète s'il pense que les fondamentaux sont bons et vend sinon, et il interpête l'évolution des cours selon ce schéma. Une modi…cation du niveau des actifs est associée à l'intervention d'un investisseur qui pense qu'il faut acheter ou vendre selon son orientation. Cela signi…e par exemple que notre acteur interprète une intervention d'achat comme celle d'un agent qui a une bonne opinion sur le titre, le secteur ou l'ensemble de l'économie lorsque celle-ci est plus générale. Cette opinion est binaire et indique si les individus sont globalement optimistes ou pessimistes quant à la conjoncture. La prospection ne porte pas sur l'évaluation exacte d'un titre particulier et l'établissement d'une valeur précise, d'un niveau de prix déterminé, mais une prévision conjoncturelle générale. On aborde les opinions au niveau du sentiment tendanciel des acteurs, de l'aspect baissier ou haussier des comportements, et de manière agrégée de l'opinion du marché. La variable F, au sens où elle dé…nit l'opinion moyenne, caractérise alors l'opinon représentative du marché.

Ainsi, le modèle décrit l'évolution probabiliste des opinions (ou de l'opinion moyenne), à savoir si les individus (ou la représentation du marché) sont globalement optimistes ou pessimistes pour les périodes à venir. Chacun dispose d'informations et d'une opinion privée, mais comme nous l'avons démontré l'opinion des autres, qui est considérée comme dépendante de la situation actuelle, peut entrer dans l'estimation de la tendance générale à venir[10]. Lorsqu'il en est ainsi, à partir d'un certain seuil de mimétisme, l'opinion individuelle se fonde sur l'opinion publique, l'opinion moyenne. Les développements et résultats du mod-

[10]On remarquera qu'en ce qui concerne les marchés …nanciers une motivation supplémentaire à suivre les autres peut provenir du fait que les prix demain sont le résultat des transactions e¤ectuées par ces mêmes agents (Voir par exemple Orléan (1989) et (1999)). On ne tient pas compte ici de ce phénomène issu de l'autoréférence.

èle montrent qu'une tendance qui se démarque partiellement va s'auto-reforcer pour conduire à un consensus. En fait, le mimétisme à tendance à favoriser la convergence vers la bonne opinion. Il en est ainsi, si on adopte le critère relativement peu fragile de la proportion d'individus qui prennent la bonne décision en espérance, dès lors que $P_{st}(N) > p$. Il est effectivement délicat de comparer une proportion moyenne d'individus ayant raison à la probabilité que tous aient raison plutôt que tort, mais en même temps. De plus, cette valeur est issu de l'approximation que nous avons faite du modèle ayant une distribution stationnaire. Quoiqu'il en soit, ce critère est équivalent à $\frac{P_{st}(N)}{P_{st}(0)} > \frac{p}{1-p}$. D'après (9) celà signifie que $N\cdot(1-2\cdot\alpha) > 1$ soit $\alpha < \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)$. On peut ainsi dire que dès lors que $\alpha \neq \frac{1}{2}$ le mimétisme favorise l'adoption de la bonne opinion.

Si on peut admettre que le mimétisme favorise l'adoption de la bonne opinion, il nous amène néanmoins à questionner l'efficacité informationnelle d'une telle structure décentralisée. L'interprétation de la situation finale est délicate puisque l'espérance de gain est fixée et finie. Lorsque tous pensent à juste titre que l'état du monde est H, est-ce ou non une situation efficiente? On est confronté à un dilemme: diffusion d'une opinion qui est - avec une forte probabilité - la bonne opinion et non-diffusion de l'information sur les fondamentaux disséminée parmi les acteurs au travers de multiples signaux privés. Certes, une importante quantité d'information est négligée, mais tous finissent par prendre la bonne décision avec une probabilité extrêmement proche de l'unité. On peut interpréter différemment l'effet du mimétisme selon que l'on considère que la convergence vers la bonne opinion est un phénomène efficace ou pas. Si la réponse est oui, il existe un effet positif du mimétisme qui favorise et accélère la diffusion de l'opinion majoritaire. L'effet catastrophique associé est la probabilité non-nulle que tous s'accordent sur la mauvaise opinion. Il est en effet un résultat qui ne souffre d'aucun problème d'interprétation, et qui est certainement le plus préjudiciable de la dynamique mimétique présentée, il s'agit de la probabilité non nulle pour tous les individus d'entrer dans une mauvaise cascade. Dans ce cas tous se trompent et le fait qu'ils se trompent ensembles élimine tout phénomène qui leur indique leur erreur puisque personne ne cherche à contester ce sentiment général. Il s'agit une fois de plus d'une mise en évidence de l'ambivalence ou du paradoxe du mimétisme (Orléan (1998), Gobillard (2002)): l'effet renforçant du mimétisme a tendance à bloquer le système sur une certaine opinion qui peut ne pas être la bonne opinion. A la convergence vers la bonne opinion s'oppose l'existence de dynamiques où le groupe dans sa totalité se coordonne sur un mauvais consensus.

L'interprétation du modèle dans une discussion sur les marchés financiers est rendue délicate par la particularité du cadre d'analyse, fortement éloigné des traditionnels modèles d'équilibre. On ne peut directement rendre compte de l'établissement d'un prix, annulant les offres ou demandes excédentaires, et notre interprétation du consensus sur la bonne opinion en est d'autant plus problématique. La spécificité du modèle, essentiellement corrélée à la structure binaire de l'espace des états du monde et des choix, doit être prise en compte. Il faut comparer la situation observée à celle informationnellement efficace. On peut définir cette distribution de référence comme celle où tous suivent leur signal privé. La convergence vers la bonne opinion est alors un résultat qui n'est pas suffisant en soi puisqu'elle se distingue de la situation de référence qui correspond à la distribution binomiale (Gobillard (2002)). La tendance au consensus sur la bonne opinion n'est plus jugée efficiente. Au delà des situations où le mimétisme peut conduire les agents dans une mauvaise cascade, le consensus sur la bonne opinion peut être fortement déstabilisant, poussant à l'excessif, à des dynamiques extrêmes. Le résultat qualitatif du mimétisme informationnel conduit à une situation pathologique que l'on peut associer à des phénomènes de sous-évaluatoin ou de sur-évaluation. On comprend bien l'intuition derrière l'impact du mimétisme. Puisque les agents ont une propension à tous adopter la même croyance, haussière ou baissière, les prix seront globalement et identiquement orientés, à la hausse ou à la baisse, tout au long du processus. L'amplification d'une tendance émergente que produit le mimétisme dépasse alors bien largement les justification fondamentales initiales pour lesquelles cette évolution serait plus nuancée par le fait que certains individus n'y adhèrent pas. Dans ce cas le système évolue autour d'une diversité d'opinions. On observe alors le jeu du marché où s'affrontent des évaluations différentes, et le résultat de cette opposition d'opinions contrastées nous pousse de manière agrégée vers une situation informationnellement efficace. On retrouve, d'une certaine façon, l'idée de Keynes d'une corrélation positive entre la stabilité financière du système financier et la diversité des opinion. Plus fondamentalement, l'état d'unanimité et plus encore le mécanisme qui lui a donné naissance et la perpétue, est porteur d'une logique spécifique: celle d'une dynamique autonomue du marché. On dispose effectivement d'un processus totalement endogène à la dynamique de marché qui amène le marché à se détacher de ses ancrages extérieurs pour ne plus être que sa seule référence. Le référent du marché est le marché lui-même: l'opinion du marché n'est plus déterminée que par le marché lui-même et vice-versa. On remarquera que le résultat proposé est différent des traditionnels modèles d'équilibre, puisque dans la situation informationnellement efficace l'opinion moyenne, sans modification des fondamentaux ni de la précision de l'information sur ceux-ci, a tendance à évoluer selon la distibution de probabilité associée au processus. Elle parcourt l'espace des états.

Le modèle n'a pas la prétention de parfaitement décrire les phénomènes de bulle financière, tout au plus propose-t-il un phénomène endogène à partir duquel une bulle s'initie. On propose un mécanisme qui puisse apporter des éléments de compréhension à la formation d'une opinion sur les marchés, qui permette d'appréhender les processus qui donnent naissance à ce qui deviendra finalement une convention qui sert de référence à tous. Le modèle décrit un mécanisme permettant d'expliquer une dynamique parfaitement endogène où le marché devient son propre référent, et les conséquence à cela sont particulièrement dévastatrices. Il reste, à plusieurs niveaux, extrêmement partiel. Il n'inclut pas la dynamique interne des marchés financiers à l'ensemble du sytème financier ou de l'économie. A aucun moment il ne rend compte de l'instabilité issue de l'interaction des marchés financiers et du crédit bancaire (Kindelberger (1978), Allen et Gale (2000)) et les enjeux qu'elle porte (Aglietta (2002)), pour ne citer que cela. Comme maintenant de nombreux modèles d'économie …nancière, il introduit et développe un mécanisme possible, un élément de compréhension de la multitude des phénomènes et dynamiques de marché, hors du cadre de l'hypothèse d'e¢cience. Le meilleur exemple en ce sens est certainement la …nance comportementale (Shleifer (2000)). Le modèle nous donne …nalement des éléments pour comprendre l'émergence d'une dynamique auto-entretenue à l'origine de dynamiques …nacières spectaculaires. Plus particulièrement, en raison de l'hypothèse faite sur la situation initiale, la dynamique du modèle est appropriée lorsque l'opinion concerne une nouvelle structure ou dynamique économique, ou porte sur l'évaluation d'un nouveau secteur. Ces situations ont souvent donné naissance aux plus spéctaculaires phénomènes de bulles …nancières, la dernière en date étant bien entendu la bulle technologique associée au développement des TIC, ou convention internet (Orléan (1999)). L'unanimité des investisseurs sur l'évolution haussière des marchés a provoqué une trajectoire démesurée des cours, qui, lorsque certaines informations ou paramètres structurels sont venus perturber la dynamique vertueuse, s'est traduite par un mouvement symétrique à la baisse. On peut se demander si, à partir d'une certaine diminution des cours, les agents ne deviennent des baissiers mimétiques, ce qui ouvre la voie à une période de sous-évaluation de ceux-ci.

Notre modèle peut se comprendre comme une formalisation possible justi…ant ou accompagnant l'explication générale que donne Shiller(2000) des plus spéctaculaires évolutions boursières. Les bulles …nancières les plus impressionnantes sont le plus souvent associées à ce que Robert Shiller nommes les Conceptions économiques de l'ère nouvelle (Shiller (2000)). Les justi…cations fondamentalistes associées à certains niveaux atteints par les cours, ne permettent pas à elles-seules de les expliquer, ayant par ailleurs souvent un caractère ad hoc visant simplement à justi…er une évolution de marché …nalement observée:

> "Whenever the market reaches a new high, public speakers, writers, and other prominent people suddenly appear, armed with explanations for the apparent optimism seen in the market"[11]

Cet état de fait du niveau le plus extrême de la bulle, peut éventuellement trouver son origine - on parle de son origine uniquement - dans des justi…cations économiquemt valables. Lorsqu'il étudie les plus fortes variations de prix des épidodes relativement récents des marchés …nanciers et leurs justi…cations intiales potentielles, Shiller admet que

> "Some of the twelve-month price increases seem to be associated with good reasons for a rational price change. This is especially so for the very largest one-year changes: typically something very unusual was going on."

mais d'ajouter juste après

[11] Page 98.

"But even in these cases, there often seems to be a suggestion of some market overreaction to events"[12].

La description de Shiller laisse penser qu'à chaque période de hausse durable il est possible d'associer un évènement exceptionnel ayant des implications de nature fondamentale. Celui-ci boulverse la conception du système économique, l'optimisme prenant sa source dans le cadre d'une ére nouvelle. Ce que n'explique pas l'état de fait que propose Shiller est le processus par lequel s'établit cette conception, et surtout son adoption au sein de la communauté des investisseurs. Il faut répondre à la question du mode de formation de cette opinion. Le modèle en propose une éventualité.

Shiller, en reprenant les évènements des fortes hausses des périodes récentes, montre qu'à chaque fois les marchés sur-réagissent à ce type d'évènements, qu'il s'agisse de la période haussière des Philippines (+683;4% de décembre 1985 à décembre 1986), de celle de Taïwan (+400;1% entre octobre 1986 et octobre 1987) ou du Venezuela (Janvier 1990 - Janvier 1991, +384,6). Ces évolutions incroyables sont le résultat de dynamiques spéculatives excessives, dont on peut considérer qu'elles résultent d'interactions auto-référentielles ou auto-entretenues, mais pour lesquelles on peut trouver l'origine dans un consensus sur des éléments fondamentaux. Si ce consensus est ce qui mène justement au phénomène de bulle, il est important de comprendre la nature de son développement. Selon le processus décrit par le modèle, une dynamique en 2 étapes, que l'on peut reprendre en quelques mots, se met en place. Il existe des comportements économiquement fondés qui amorcent une première hausse des cours. Cette première tendance se traduit ensuite par des comportements spéculatifs issus du mimétisme informationnel lorsque l'opinion du marché est informationnellement plus précise que les évaluations privées. Il faut pour cela qu'un certain seuil critique soit dépassé, ce qui signi…e que la période où l'évolution des cours trouve sa justi…cation dans des comportements économiquement fondés peut durer. La contagion amorcée, un principe de référence selon lequel une ère nouvelle s'annonce soutient le phénomène de contagion. Un processus cumulatif s'établit et celle-ci trouve alors sa justi…cation dans l'évolution des cours (l'opinion de marché, la convention) et non plus dans les fondamentaux. Pour justi…er l'évolution démesurée du niveau des prix il est souvent fait appel à des argumentations ad hoc, quelles qu'elles soient, le consensus pouvant également servir de point de référence.

Notre modèle donne une signi…cation à l'amorçage de la dynamique, au processus endogène qui conduit le marché à se refermer sur lui-même. On peut prendre le cas de la bulle internet à titre d'exemple. Lorsque l'internet apparaît, personne ne sait a priori quel sens donner à ce nouveau procédé de communication. Il est tout d'abord extrêmement di¢cile de dire quelle est a priori l'opinion moyenne des investisseurs aux premiers balbutiements de la toile, ni à quelle moment considérer qu'une opinion concernant internet et les NTIC se dégage. Deux éléments sont importants. Le premier est qu'il existe relativement peu d'informations précises sur le sujet (la valeur de p dans le modèle est

[12] Page 123.

relativement faible). Le concept de valeur fondamentale est presque indécent, car il est impossible de déterminer précisément cette dimension, plus encore devant l'impact des NTIC, l'incertitude ayant un caractère radical. Le second est que personne ne sait comment les autres interprêtent l'avenir et l'impact d'une société de l'information. Cette seconde forme d'incertitude est beaucoup plus profonde que la première puisqu'il s'agit de forger une opinion sur une absence d'opinion. Celle-ci existe puisqu'il s'agit de déterminer l'opinion de l'opinion des autres, mais est d'une certaine manière vide d'information. La représentation qui se forme est celle d'absence d'opinion (privée)[13]. Cette situation est conforme à l'hypothèse du modèle selon laquelle les agents ne possèdent pas de modèle sur l'opinion de marché à l'origine du processus. C'est pourquoi ils se tournent vers des justi…cations concernant les fondamentaux eux-mêmes, aussi peu …ables et générales soient-elles. Cet état de fait conduit chacun à se faire sa propre opinion à partir d'éléments fondamentaux, que ce soit en construisant son propre modèle d'évaluation et en e¤ectuant ses propres recherches d'information, qu'en utilisant les informations et prévisions des analystes. De cette première étape émerge une tendance initiale qui va être un indicateur précieux puisque personne ne sait vraiment quoi penser.

L'étincelle qui amorce la bulle internet est de nature fondamentale. Un certain nombre d'investisseurs utilisent leur information privée et leur propre modèle d'évaluation (relativement peu robustes en ces situations d'invertitude) et voient majoritairement dans l'émergence d'internet et le développement des TIC un facteur de croissance économique important. La dynamique intiée, le signal public contient plus d'information que les informations privées. Il faut attendre que cette évolution dépasse un certain seuil pour que le processus bascule dans une nouvelle phase où le marché entre dans une logique autonome. Dès lors, les agents tirent leur information de cette première tendance et cessent de former leur propre opinion à partir d'indicateurs privés, on entre dans la contagion mimétique. L'opinion moyenne, que chacun observe au travers de l'évolution des cours, devient un élément de référence et le mimétisme mène à un consensus par phénomène de contagion. Tous s'accordent sur le fait que les innovations technologiques vont radicalement changer la dynamique économique. L'e¤et de convergence est rapide. L'évolution de l'opinion évolue toujours dans le même sens, ce qui ampli…e encore un peu plus l'objet du consensus, une convention émerge et s'institue. Celle-ci soutient que certaines régularités traditionnelles de l'économie sont boulversées, une nouvelle ère prenant place. Chacun croit individuellement en cette convention et se dit qu'il ne peut avoir tort puisque les cours indiquent qu'elle est partagée de tous. En faisant cela l'investisseur oublie d'ou vient cette opinion, qu'elle est née du marché. Chacun pris individuellement ne se rend pas compte que tous agissant ainsi le marché est centré sur lui-même. Les comportements individuels décentralisés, individuellement rationnels a priori, deviennent non-e¢ cients dans leur généralisation et agrégation. Le fait que

[13] On remarquera que si l'opinion concernait l'opinion de l'opinion du marché, c'est à dire si on se plaçait dans le cadre d'une structure auto-référentielle, il y aurait un paradoxe car si on laisse jouer l'in…nititude que suppose l'autoréférence il existe une opinion selon laquelle il n'y a pas d'opinion.

les NTIC modi…ent le développement économique est alors admis et va soutenir l'évolution des cours qui atteindra des proportions démesurées.

Ensuite, le niveau des cours dépend essentiellement d'une logique spéculative ou chacun cherche à anticiper jusqu'ou les autres pensent qu'il est possible d'aller. Seule l'opinion d'Ere Nouvelle, de Nouvelle Economie, donne, à partir de justi…actions au …nal extrêmement vagues, une explication raisonnée du niveau des prix. C'est sur cette opinion partagée de tous, cette convention, que repose alors la justi…cation de l'évolution des prix qui ne trouve plus aucun argument dans les modèles traditionnels de l'économie. On comprend la dynamique auto-validante qui se met en place par la suite. On notera deux choses. D'une part celle-ci doit trouver son origine ailleurs, car l'incertitude radicale associée à une innovation telle internet (qu'il s'agisse de son développement, de son impact sur les entreprises existantes, de l'emergence potentielle de nouvelles …rmes etc...) accroît encore un peu plus l'incertitude que l'on porte sur ce que pensent les autres. D'autre part elle doit disposer d'une explication minimale (a priori) économiquement rationnelle de celle-ci, car les investisseurs ont besoin de croire (même super…ciellement) en l'évolution observée des cotations. Ces deux points se rejoignent dans la convention internet. La dynamique initialisée par certains di¤use leur information pour se stabiliser sur le consensus selon lequel l'Internet ouvre la voie pour une ère nouvelle de l'économie. Ensuite, cette convention o¤re aux investisseurs la justi…cation minimale su¢sante pour croire à l'évolution des cours, qui exprime alors le phénomène internet dans ses conséquences économiques.

Une fois établie la convention se renforce par l'évolution du niveau des actifs. Leur dynamique, fortement haussière, est une source d'information qui indique l'état de la convention, dans notre cas que l'opinion est celle d'une nouvelle économie. Il se met en place une circularité autonome entre la convention et l'évaluation du marché. La convention se nourrit de la dynamique des prix qui elle-même prend ses justi…cations dans la convention. Avec le renforcement de l'une c'est l'exubérance de l'autre qui se développe. Le débat sur la rationalité ou l'irrationalité de cette dernière est en fait la question de la validité de la convention préalablement établie. Dans le cas d'internet cette convention s'est accompagnée d'une méthode d'évaluation également conventionnelle (on peut considérer qu'elle fait partie de la convention), le nombre potentiel de clients (Orléan (1999)). Ce phénomène est naturel et nécessaire. Puisque l'on sort des principes de l'économie traditionnelle, il faut disposer de nouvelles méthodes qui puissent rendre compte du niveau des cotations, a…n que celui-ci soit cohérent avec les prévisions futures de la conjoncture.

Le modèle peut donner lieu à deux formes d'explication de cette étincelle fondamentale. La première indique que l'on a convergé vers la bonne opinion, mais le mimétisme, qui éloigne de la situation informationnellement e¢cace - mesurée - et favorise le consensus, entraîne le système vers un extrême où une bulle trouve sa source. La seconde explique que les investisseurs sont entrés dans une mauvaise cascade.

Cette explication de l'impulsion de la dynamique haussière, est à opposer (ou compléter) de celle que l'on peut faire à partir du mimétisme en stratégie mixte (Gobillard (2002)). Plutôt que de justifier l'amorçage de la bulle dans un mimétisme informationnel basé sur l'effet d'externalité d'information des premières évolutions de prix, ce modèle nous propose de l'expliquer par le fait que les agents qui interviennent sur les marchés (des valeurs technologiques en l'occurrence) le font souvent sans véritable nouvelle information. Dans le phénomène nouvelle économie, l'évolution future de l'économie suite à l'impact des NTIC est presque impossible à correctement définir, les informations sont relativement pauvres et vagues. Dès qu'une évolution des cours émerge, les investisseurs se replacent et la seule source d'information dont ils disposent est l'évolution des cours, dont ils infèrent l'opinion moyenne. Si les informations nouvelles sont presque inexistantes, en suivant la tendance avec une très forte propabilité, on se trouve pris dans un phénomène de contagion qui conduit avec forte probabilité aux extrêmes. Le résutlat est alors très proche de celui présenté ici.

A Calcul de la distribution stationnaire.

Les probabilités de transitions étant différentes à l'intérieur de chacun des intervalles, les probabilités de la distribution stationnaire le seront également. Pour définir la loi de la distribution stationnaire nous allons effectuer le calcul successivement sur chacun des intervalles, pour évaluer la valeur de la probabilité en $\frac{N}{2}$ qui amènera la solution finale. Nous allons effectuer cela au travers d'une certain nombre de lemmes qui permettent de mieux répartir les étapes de la démonstration et ainsi en éclairer le contenu.

Lemma 16 Sur l'intervalle I_2 $P_{st}(n) = P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\frac{C_N^n(1-p)^{N-n}p^n}{C_N^{\frac{N}{2}}(1-p)^{\frac{N}{2}}p^{\frac{N}{2}}}$

Démonstration.
$\forall n \in I_2 = \left[\frac{N}{2}+1; N\cdot(1-\alpha)\right]$

$$P_{st}(n) = P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\cdot\prod_{k=\frac{N}{2}}^{n-1}\frac{w(k;k+1)}{w(k+1;k)} \tag{32}$$

$$= P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\cdot\prod_{k=\frac{N}{2}}^{n-1}\frac{\left(\frac{N-k}{N}\right)\cdot(p)}{\left(\frac{k+1}{N}\right)(1-p)} \tag{33}$$

$$= P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\cdot\left[\frac{p}{1-p}\right]^{n-\frac{N}{2}}\frac{\left(\frac{N}{2}\right)!\left(\frac{N}{2}\right)!}{(N-n)!(n)!} \tag{34}$$

en utilisant $\displaystyle\prod_{k=\frac{N}{2}}^{n-1}\frac{(N-k)}{(k+1)} = \frac{\prod_{k=0}^{n-\frac{N}{2}-1}\left(\frac{N}{2}-k\right)}{\prod_{k=\frac{N}{2}}^{n-1}(k+1)} = \frac{\left(\frac{N}{2}\right)!}{(N-n)!}\cdot\frac{\left(\frac{N}{2}\right)!}{(n)!}$

Ensuite, comme

$$\frac{\left(\frac{N}{2}\right)!}{(N-n)!}\cdot\frac{\left(\frac{N}{2}\right)!}{(n)!} = \frac{N!}{(N-n)!(n)!}\cdot\frac{1}{\frac{N!}{(N/2)!(N/2)!}} = \frac{C_N^n}{C_N^{\frac{N}{2}}} \tag{35}$$

et

$$\left(\frac{p}{1-p}\right)^{n-\frac{N}{2}} = \left(\frac{1}{p\cdot(1-p)}\right)^{\frac{N}{2}}\cdot(1-p)^{N-n}\cdot p^n \tag{36}$$

on obtient :

$$P_{st}(n) = P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\frac{C_N^n(1-p)^{N-n}p^n}{C_N^{\frac{N}{2}}(1-p)^{N-\frac{N}{2}}p^{\frac{N}{2}}} \tag{37}$$

■

Lemma 17 Sur l'intervalle I_1 $P_{st}(n) = P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\cdot\left[\frac{1}{2}\right]^{n-N(1-\alpha)}\cdot\frac{C_N^n(1-p)^{N\alpha}p^{N(1-\alpha)}}{C_N^{\frac{N}{2}}(1-p)^{N-\frac{N}{2}}p^{\frac{N}{2}}}$

Démonstration.

$\forall n \in I_1 = [N\cdot(1-\alpha)+1; N]$

$$
\begin{aligned}
P_{st}(n) &= P_{st}(N(1-\alpha))\cdot\prod_{N(1-\alpha)}^{n-1}\frac{w(k;k+1)}{w(k+1;k)}\\
&= P_{st}(N(1-\alpha))\cdot\prod_{N(1-\alpha)}^{n-1}\frac{N-k}{(k+1)\cdot\varepsilon}\\
&= P_{st}(N(1-\alpha))\cdot\left[\frac{1}{2}\right]^{n-N(1-\alpha)}\frac{(N\alpha)!\cdot(N(1-\alpha))!}{(N-n)!n!}
\end{aligned}
$$

en utilisant $\prod_{k=N(1-\alpha)}^{n-1}\frac{N-k}{k} = \frac{\prod_{k=N-n+1}^{N\alpha}k}{\prod_{k=N(1-\alpha)}^{n-1}k+1} = \frac{(N\alpha)!}{(N-n)!}\cdot\frac{(N(1-\alpha))!}{n!}$.

Comme $P_{st}(N(1-\alpha)) = P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\cdot\frac{C_N^{N(1-\alpha)}(1-p)^{N\alpha}p^{N(1-\alpha)}}{C_N^{\frac{N}{2}}(1-p)^{\frac{N}{2}}p^{\frac{N}{2}}}$

on obtient :

$$
\begin{aligned}
P_{st}(n) &= P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\cdot\left[\frac{1}{2}\right]^{n-N(1-\alpha)}\frac{(N\alpha)!\cdot(N(1-\alpha))!}{(N-n)!n!}\cdot\frac{C_N^{N(1-\alpha)}(1-p)^{N\alpha}p^{N(1-\alpha)}}{C_N^{\frac{N}{2}}(1-p)^{\frac{N}{2}}p^{\frac{N}{2}}} &(38)\\
&= P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\cdot\left[\frac{1}{2}\right]^{n-N(1-\alpha)}\cdot\frac{C_N^{n}(1-p)^{N\alpha}p^{N(1-\alpha)}}{C_N^{\frac{N}{2}}(1-p)^{\frac{N}{2}}p^{\frac{N}{2}}} &(39)
\end{aligned}
$$

puisque $C_N^{N\cdot(1-\alpha)} = \frac{N!}{(N(1-\alpha))!(N\alpha)!}$

et donc $C_N^{N\cdot(1-\alpha)}\cdot\frac{(N\cdot(1-\alpha))!(N\alpha)!}{(N-n)!(n)!} = \frac{N!}{(N-n)!(n)!} = C_N^n$. ∎

Lemma 18 Sur l'intervalle I_3 $P_{st}(n) = P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\cdot\frac{C_N^n p^n(1-p)^{N-n}}{C_N^{\frac{N}{2}}p^{\frac{N}{2}}(1-p)^{\frac{N}{2}}}$

Démonstration.

$\forall n \in I_3 = \left[N\cdot\alpha; \frac{N}{2}-1\right]$

$$
\begin{aligned}
P_{st}(n) &= P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\cdot\prod_{k=n}^{\frac{N}{2}-1}\frac{w(k+1;k)}{w(k;k+1)} &(40)\\
&= P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\cdot\prod_{n}^{\frac{N}{2}-1}\frac{(k+1)(1-p)}{(N-k)\cdot p}\\
&= P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\cdot\left[\frac{1-p}{p}\right]^{\frac{N}{2}-n}\frac{(\frac{N}{2})!(\frac{N}{2})!}{(N-n)!(n)!} &(41)
\end{aligned}
$$

en utilisant $\prod_{k=n}^{\frac{N}{2}-1}\frac{k+1}{N-n} = \frac{\prod_{k=n+1}^{\frac{N}{2}}k}{\prod_{k=n}^{\frac{N}{2}-1}(N-k)} = \frac{(\frac{N}{2})!}{(n)!}\cdot\frac{(\frac{N}{2})!}{(N-n)!}$

A partir des équivalences similaires à (35) et (36), (40) peut s'écrire

$$\begin{aligned}
P_{st}(n) &= P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\cdot\left[\frac{1}{p\cdot(1-p)}\right]^{\frac{N}{2}}\cdot(1-p)^{N-n}\cdot p^{n}\cdot\frac{C_N^n}{C_N^{\frac{N}{2}}}\\
&= P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\cdot\frac{C_N^n p^n(1-p)^{N-n}}{C_N^{\frac{N}{2}}p^{\frac{N}{2}}(1-p)^{\frac{N}{2}}}
\end{aligned}$$

■

Lemma 19 Sur l'intervalle I_4 $P_{st}(n) = P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{N\alpha-n}\cdot\frac{C_N^n p^{N\cdot\alpha}(1-p)^{N-N\cdot\alpha}}{C_N^{\frac{N}{2}}p^{\frac{N}{2}}(1-p)^{\frac{N}{2}}}$

Démonstration.
$\forall n \in I_4 = [0; N\cdot\alpha]$

$$\begin{aligned}
P_{st}(n) &= P_{st}(N\cdot\alpha)\cdot\prod_{k=n}^{N\alpha-1}\frac{w(k+1;k)}{w(k;k+1)}\\
&= P_{st}(N\cdot\alpha)\cdot\prod_{k=n}^{N\alpha-1}\frac{(k+1)}{(N-n)\cdot 2}\\
&= P_{st}(N\cdot\alpha)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{N\alpha-n}\frac{(N\cdot\alpha)!}{(n)!}\cdot\frac{(N\cdot(1-\alpha))!}{(N-n)!}
\end{aligned}$$

en utilisant $\prod_{k=n}^{\frac{N}{2}-1}\frac{k+1}{N-n} = \frac{\prod_{k=n+1}^{\frac{N}{2}} k}{\prod_{k=n}^{\frac{N}{2}-1}(N-k)} = \frac{\left(\frac{N}{2}\right)!}{(n)!}\cdot\frac{\left(\frac{N}{2}\right)!}{(N-n)!}$

Comme

$$P_{st}(N\cdot\alpha) = P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\cdot\frac{C_N^{N\cdot\alpha}p^{N\cdot\alpha}(1-p)^{N-N\cdot\alpha}}{C_N^{\frac{N}{2}}p^{\frac{N}{2}}(1-p)^{\frac{N}{2}}}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
P_{st}(n) &= P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\cdot\frac{C_N^{N\cdot\alpha}p^{N\cdot\alpha}(1-p)^{N-N\cdot\alpha}}{C_N^{\frac{N}{2}}p^{\frac{N}{2}}(1-p)^{\frac{N}{2}}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{N\alpha-n}\frac{(N\cdot(1-\alpha))!(N\alpha)!}{(N-n)!(n)!}\\
&= P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{N\alpha-n}\cdot\frac{C_N^n p^{N\cdot\alpha}(1-p)^{N-N\cdot\alpha}}{C_N^{\frac{N}{2}}p^{\frac{N}{2}}(1-p)^{\frac{N}{2}}}
\end{aligned}$$

puisque $C_N^{N\cdot\alpha} = \frac{N!}{(N(1-\alpha))!(N\alpha)!}$
et donc $C_N^{N\cdot\alpha}\cdot\frac{(N\cdot(1-\alpha))!(N\alpha)!}{(N-n)!(n)!} = \frac{N!}{(N-n)!(n)!} = C_N^n.$ ■

B Démonstrations des propositions (8) et (9) à partir de la valeur des distributions stationnaires

Par la suite on note $A = P_{st}\left(\frac{N}{2}\right)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\frac{N}{2}}\frac{1}{C_N^{\frac{N}{2}}}$ et $a = \frac{p}{1-p}$. Les résultats obtenus dans les différents lemmes sont les suivants

$$\begin{cases} \text{Sur } I_1 : P_{st}(n) = A \cdot a^{N(1-\alpha)} \cdot C_N^n \cdot \varepsilon^{N(1-\alpha)-n} \\ \text{Sur } I_2 \text{ et } I_3 : P_{st}(n) = A \cdot C_N^n \cdot a^n \\ \text{Sur } I_4 : P_{st}(n) = A \cdot a^{N\alpha} \cdot C_N^n \cdot \varepsilon^{n-N\alpha} \end{cases} \tag{42}$$

On peut inclure la proabilité en $\frac{N}{2}$ aux formes obtenus dans les lemmes (16) et (18) en remarquant que

$$P_{st}\left(\frac{N}{2}\right) = A \cdot C_N^{\frac{N}{2}} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{-\frac{N}{2}} \tag{43}$$

En notant $B = \sum_{N\alpha}^{N(1-\alpha)} C_N^n \cdot a^n$ on peut écrire

$$\sum_{N\alpha}^{N(1-\alpha)} P_{st}(n) = A \cdot \sum_{N\alpha}^{N(1-\alpha)} C_N^n \cdot a^n = A \cdot B \tag{44}$$

Lemma 20 Selon la définition de ε on peut approximer $\sum_0^{N\alpha} P_{st}(n)$ par $A \cdot a^{N\alpha} \cdot \varepsilon^{-N\alpha}$ et $\sum_{N(1-\alpha)} P_{st}(n)$ par $A \cdot a^{N(1-\alpha)} \cdot \varepsilon^{-N\alpha}$.

Démonstration.

Sur I_1, à partir de (42) on peut écrire $P_{st}(n) = A_1^0 \cdot C_N^n \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n$, si $A_1^0 = A \cdot a^{N(1-\alpha)} \cdot \varepsilon^{N(1-\alpha)}$. Comme $n > N(1-\alpha)$ et selon la définition de ε qui nous dit que $\frac{1}{\varepsilon}$ est infini exponentiellement, on a $\forall n \in [N(1-\alpha); N[$, $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n = o\left(\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^N\right)$. On a alors $\sum_{N(1-\alpha)} P_{st}(n) = A_1^0 \sum_{N(1-\alpha)} C_N^n \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n = A_1^0 \cdot \left[C_N^N \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^N + o\left(\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^N\right)\right] \simeq A \cdot a^{N(1-\alpha)} \cdot \varepsilon^{-N\alpha}$, en réintroduisant le développement de A_1^0.

On peut dans une démarche tout à fait symétrique démontrer le résultat similaire sur l'intervalle I_4, en introduisant $A_2^0 = A \cdot \left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^{N\alpha}$, en remarquant que comme $N\alpha > n$ sur $]0; N\alpha]$, $\varepsilon^n = o(x^n)$ sur cet intervalle. On a ainsi $\sum_0^{N\alpha} P_{st}(n) = A_2^0 \sum_0^{N\alpha} C_N^n \varepsilon^n = A_2^0 \cdot \left[C_N^0 \cdot (\varepsilon)^0 + o(1)\right] \simeq A \cdot a^{N\alpha} \cdot \varepsilon^{-N\alpha}$. ■

Nous allons maintenant terminer la démonstration en montrant que les seules probabilité non nulles sont celles en 0 et en N. Comme $\sum_0 P_{st}(n) = 1$ on a

$\frac{1}{A} = a^{N\alpha} \cdot \varepsilon^{-N\alpha} + a^{N(1-\alpha)} \cdot \varepsilon^{-N\alpha} + A \cdot B$. On a $B = \sigma\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ et donc $A = (\varepsilon)^{N\alpha} \frac{1}{a^{N\alpha}+a^{N-N\alpha}}$. A partir de (42) on en déduit

$$\begin{array}{rcl}
\text{Sur } I_1 & : & P_{st}(n) = \frac{a^{N(1-\alpha)}}{a^{N\alpha}+a^{N-N\alpha}} \cdot C_N^n \cdot \varepsilon^{N-n} \\
\text{Sur } I_2 \text{ et } I_3 & : & P_{st}(n) = C_N^n \cdot \frac{a^n}{a^{N\alpha}+a^{N-N\alpha}} \cdot (\varepsilon)^{N\alpha} \\
\text{Sur } I_4 & : & P_{st}(n) = \frac{a^{N\alpha}}{a^{N\alpha}+a^{N-N\alpha}} \cdot C_N^n \cdot \varepsilon^n
\end{array}$$

La valeur nulle de ε fait que dans toutes les probabilités sauf celles des extrémités de l'intervalle on un coefficient ε^k avec $k > 0$ et donc en tous ces points $P_{st}(n) = \sigma\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. On a alors deux points absorbants dont les probabilités sont respectivement

$$P_{st}(0) = \frac{a^{N\alpha}}{a^{N\alpha}+a^{N-N\alpha}} \text{ et } P_{st}(N) = \frac{a^{N(1-\alpha)}}{a^{N\alpha}+a^{N-N\alpha}} \tag{45}$$

et donc pour toutes les valeurs de n à l'intérieur de l'intervalle ouvert $P_{st}(n) = 0$. On peut aisément vérifier que la somme des probabilités est équivalente à l'unité. ■

References

[1] Aglietta, Michel, 2002, Le renouveau de la monnaie, Texte pour le rapport sur l'économie mondiale 2003.

[2] Allen, Franklin et Douglas Gale, 2000, Bubbles and Crises, The Economic Journal, 110 (Janvier), 236-255.

[3] Allen, Beth et James S. Jordan, 1998, The Existence of Rational Expectations Equilibrium: A Retrospective, Research Department Staff Report 252, Federal Reserve Bank of Minneapolis.

[4] Ash, Solomon, 1952, Social psychology, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

[5] Banerjee, Abhijit, 1992, A Simple Model of Herd Behavior, Quaterly Journal of Economics, 107 (3), 797-817.

[6] Bikhchandani, Sushil; David Hirshleifer et Ivo Welch, 1992, A Theory of Fads, Fashion, Custom, and Cultural Change as Informational Cascades, Journal of Political Economy, 100 (5), 992-1026.

[7] Bray, Margaret, 1985, Rational Expectations, Information and Asset Markets: an introduction, Oxford Economic Papers, 37, 161-195.

[8] Brière, Marie, 2002, L'influence des représentations collectives sur les marchés de taux, le rôle des banques centrales et des experts, Thèse pour le doctorat en économie, Université de Paris - X Nanterre, juin 2002.

[9] Brock, William A. et Steven N. Durlauf, 2000, Discrete Choice with Social Interactions, Working Paper.

[10] Cont, Rama et Philippe Bouchaud, 1998, Herd behavior and aggregate ‡uctuations in …nancial markets, cond-mat / 9712318v2.

[11] Devenow, Andrea et Ivo Welch, 1996, Rational Herding in Financial Economics, European Economic Review, 40 (3-5), Avril, 603-616.

[12] Deutsch, Morton et Harold B. Gerard, 1955, A Study of Normative and Informational Social In‡uences upon individual Judgment, Journal of Abnormal and Social Psychology, 51 (3), 629-636.

[13] Dutta, Jayasri et Stephen Morris, 1997, The Revelation of Information and Self-Ful…lling Beliefs, Journal of Economic Theory, 73, 231-244.

[14] Föllmer, Hans, 1974, Random Economies with Many Interacting Agents, Journal of Mathematical Economics, 1 (1), 51-62.

[15] Froot, Kenneth, David S. Scharfstein et Jeremy C. Stein, 1992, Herd on the Street: Informational Ine¢ciencies in a Market with Short-Term Speculation, The Journal of Finance, XLVII (4), Septembre, 1461-1484.

[16] Gale, Douglas, 1996, What have we learned from social learning?, European Economic Review, 40, 617-628.

[17] Glaeser, Edward et Jose A. Scheinkman, 2002, Non-Market Interactions, Invited lecture, Econometric Society World Congress (in Seattle, 2000).

[18] Gobillard, Bertrand, 2002, Agrégation d'information, mimétisme informationnel et marchés …nanciers. De l'ambivalence au paradoxe du mimétisme: quelques résultats d'un modèle d'interaction, miméo.

[19] Gobillard, Bertrand, 2003, Un modèle de mimétisme informationnel avec incertitude sur la situation initiale: une présentation et quelques résultats, miméo.

[20] Grossman, Sanford J., 1976, On the E¢ciency of Competitive Stock Markets where Traders Have Diverse Information, 1976, Journal of Finance,

[21] Grossman, Sanford J., 1977, The Existence of Futures Markets, Noisy Rational Expectations and Informational Externalities, The Review of Economic Studies, Issue 3, 431-449.

[22] Grossman, Sanford J., 1989, The Informational Role of Prices (The Wicksell Lectures), Cambridge, MIT Press.

[23] Grossman, Sanford J. et Joseph E. Stiglitz 1976, Information and Competitive Price Systems, The American Economic Review, 66 (2), 246-253.

[24] Grossman, Sanford J. et Joseph E. Stiglitz 1980, On the Impossibility of Informationally E¢cient Markets, 1980, American Economic Review, 70, 393-408.

[25] Hellwig, Martin F., 1980, On the Aggregation of Information in Competitive Markets, Journal of Economic Theory, 22, 477-498.

[26] Horst, Ulrich et Jose A. Scheinkman, 2002, Equilibria in systems of social interactions, Working Paper.

[27] Keynes, John Maynard, 1969, La théorie générale de l'emploi de l'intérêt et de la monnaie, Editions Payot, Traduction de General Theory, London, Mac Millan et $C^{\pm}$, 1936.

[28] Kindleberger, Charles P., 1978, Manias, Panics and Crashes, Londres et Basingstoke, Macmillan Press.

[29] Kirman, Alan, 1990, Epidemics of Opinion and Speculative Bubbles in Financial Markets, European University Institute - Florence, miméo.

[30] Kirman, Alan, 1993, Ants, Rationality and Recruitment, Quarterly Journal of Economics, 108, Février, 137-56.

[31] Lee, In Ho, 1993, On the convergence of Informational Cascades, Journal of Economic Theory, 61, 195-411.

[32] Lee, In Ho, 1998, Market Craches and Informational Avalanches, Review of Economic Studies, 65, 741-759.

[33] Lux, Thomas, 1995, Herd Behaviour, Bubbles and Crashes, The Economic Journal, 105, Juillet, 881-896.

[34] Milgrom, Paul, 1981, Good News and Bad News: Representation Theorems and Applications, Bell Journal of Economics, 12, 1981, 380-91.

[35] Mc Allister, Patrick H., 1990, Rational Behavior and Rational Expectations, Journal of Economic Theory, 52, 332-363.

[36] Moscarini, Giuseppe , Marco Ottaviani et Lones Smith, 1998, Social learning in a changing world, Economic Theory, 11, 657-665.

[37] Orléan, André, 1989, Comportements mimétiques et diversité des opinions sur les marchés …nanciers, in Patrick Artus et Henri Bourguinat (eds), Théorie économique et crises des marchés …nanciers, Paris, Economica, Chapitre 3, 45-65.

[38] Orléan, André, 1992, Contagion des opinions et fonctionnement des marchés …nanciers, Revue Economique, 4, 685-698.

[39] Orléan, André, 1998, Informational in‡uences and the ambivalence of imitation, in Jacques Lessourne et André Orléan (eds), Advances in self-organisation and evolutionary economics, London, Paris, Genève, Economica, Chapitre 2, 39-56.

[40] Orléan, André, 1998 ¡ b, The Evolution of Imitation , in Patrick Cohendet, Patrick Llerena, Hubert Stahn et Gisèle Umbhauer (éds.), The Economics of Networks, Berlin, Heidelberg et New York, Springer-Verlag, chapitre 15, 325-339.

[41] Orléan, André, 1999, Le pouvoir de la …nance, Paris, Editions Odile Jacob.

[42] Orléan, André, 2001, Psychologie des marchés. Comprendre les foules spéculatives, in J. Gravereau et J. Trauman (éds.), Crises …nancières, Paris, Economica, 105-128.

[43] Orléan, André et Yamina Tadjeddine, 1998, E¢cacité informationnelle et marchés …nanciers, in Pascal Pettit (Ed), L'économie de l'information, Paris, La Découverte.

[44] Scharfstein David S. et Jeremy C. Stein, 1990, Herd Behavior and Investment, American Economic Review, 80 (3), Juin, 465-479.

[45] Shillert, Robert J., 1995, Conversation, Information, and Herd Behavior, The American Economic Review, 85 (2), 181-185.

[46] Shillert, Robert J., 2000, Irrational exuberance, Princeton, New Jersey, Princeton University Press.

[47] Shleifer, Andrei, 2000, Ine¢cient markets - An introduction to behavioral …nance, Oxford, New-York, Oxford Univesity Press.

[48] Radner, Roy, 1979, Rational Expectations Equilibrium: Generic Existence and the Information Revealed by prices, Econometrica, 47 (3), 655-678.

[49] Weidlich, Wolfgang et Guenter Haag, 1983, Concepts and Models of a Quantitative Sociology, Berlin et New-York, Springer-Verlag.