

Introduction de gestion alternative dans une allocation long terme

Franck Nicolas

Directeur de l'Ingénierie et de la Recherche Quantitative
CDC IXIS Asset Management

f.nicolas@cdcixis-am.com

Récemment confrontés à une baisse profonde des marchés actions, beaucoup d'investisseurs ont manifesté la volonté de se tourner vers la gestion alternative pour soutenir des performances mises à mal par deux ans de marchés baissiers. Malheureusement, les *hedge funds* ont également présenté leur lot de déception : cyclicité des performances d'une part, quand ce n'est pas un contrôle des risques mal maîtrisé qui a conduit quelques produits à la faillite et a éclaboussé par-là même toute une industrie. Autre obstacle, les investisseurs ont des difficultés à repérer les nuances entre les stratégies, donc à identifier des gérants de talent.

En effet, la gestion alternative n'est pas une classe d'actif homogène et se trouve constituée d'une kyrielle d'approches et de stratégies de gestion différentes. Ainsi, même pour un investisseur convaincu des bienfaits de l'introduction d'une classe d'actif supplémentaire en portefeuille comme élément de lissage du risque, la question de savoir combien et comment intégrer de l'alternatif dans une allocation d'actifs demeure complexe.

Notons tout d'abord qu'il est possible d'opérer des regroupements par famille de stratégies et l'hétérogénéité des approches s'éclaircit rapidement, nous y reviendrons. Dans un premier temps cependant, il est également nécessaire de tenir compte des spécificités plus générales, qui sont un peu le point commun des techniques de gestion proposées. En effet, à défaut d'aller plus loin dans une différenciation des modes de gestion, il peut s'avérer utile de savoir les qualifier de manière globale, et les intégrer quantitativement à des modèles d'allocation d'actifs, afin de savoir quelle place leur réserver. À ce sujet, nous proposerons dans cet article une approche visant à caractériser ces particularités dans le long terme.

I/ Spécificités de la gestion alternative : asymétrie et « discontinuité » des rendements

Le trait commun à beaucoup de produits alternatifs se situe au niveau des risques qu'ils présentent. Certes les quelques scandales qui ont jeté le discrédit sur un ensemble très disparate de gestions, de la plus prudente à la plus risquée, comme l'opacité des promoteurs ou des places de domiciliation des produits, font oublier que dans sa majorité, la détention d'investissements alternatifs n'est pas plus risquée que celle d'actions ou d'obligations d'entreprises en direct : les mois passés le prouvent.

Cependant, la distribution des rendements des *hedge funds* présente en moyenne des particularités indéniables, qui sont de deux ordres :

- par l'existence d'asymétrie créée par l'utilisation d'instruments dérivés (affichant une présence de non-linéarité dans les portefeuilles) ou de techniques de gestion dynamiques (recréant synthétiquement des profils dissymétriques) ;
- par des queues de distribution épaisses provenant de l'utilisation extensive d'effets de levier (sensibles au prix de la liquidité), de la présence d'actifs moins liquides (et dont la valorisation comporte quelquefois des sauts) ;
- et parfois d'un mélange des deux, du fait de positions d'arbitrages pouvant s'apparenter à des ventes d'options : des gains modestes souvent et des pertes fortes quelquefois.

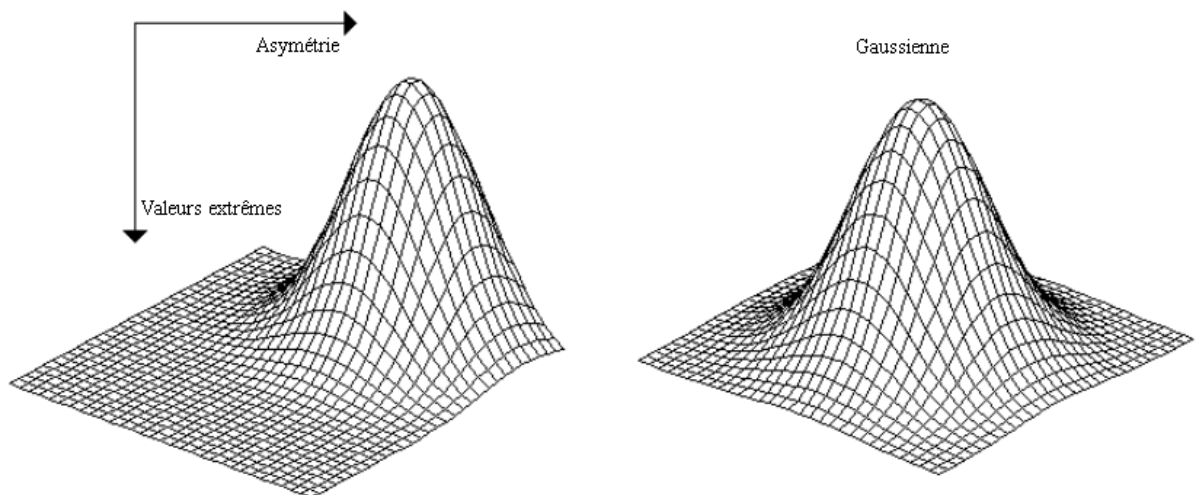
De plus, l'absence de corrélation, qui est souvent présentée comme l'élément différenciant est discutable : l'examen approfondi des évolutions passées avec des techniques de régressions non-linéaires et de corrélations locales¹, fait apparaître des corrélations faibles, mais qui se renforcent le plus souvent dans des marchés actions et / ou taux baissiers. De fait, le risque systématique est non-nul et la stratégie montre quelquefois un profil concave avec une participation aux baisses plus importantes que ne l'est la participation aux hausses.

Enfin, notons l'existence de risques d'une nature plus qualitative, avec des risques opérationnels plus forts, la forte illiquidité de certains fonds, les changements d'équipe et / ou de *process* comme autres sources de risque spécifique.

Cela est très visible lorsque l'on s'attache à observer des données d'indices. En prenant par exemple les indices *HFR* depuis leur origine (entre janvier 1990 et février 2003), nous observons des disparités importantes mais également une constante : les asymétries sont plutôt négatives (signe d'un étalement à gauche de la distribution) et le coefficient d'aplatissement plutôt supérieur à 3 (signe de rendements extrêmes). Nous retrouvons ici la conclusion précédente, assez largement admise² pour qualifier l'univers de la gestion alternative.

	Rendement annualisé	Volatilité annuelle	Coefficient d'asymétrie	Coefficient d'aplatissement	Corrélation portefeuille (50%*S&P 500 + 50%*SSB US Investment Grade)	
					Hausses	Baisses
HFR Equity Hedge	17.17%	9.16%	0.05	4.10	0.26	0.57
HFR Event Driven	14.01%	6.84%	-1.48	8.33	0.13	0.67
HFR Merger Arbitrage	10.92%	4.49%	-2.88	15.51	0.13	0.53
HFR Distressed Securities	14.34%	6.28%	-0.83	9.15	-0.18	0.50
HFR Global Macro	16.87%	8.56%	0.19	3.36	0.03	0.37
HFR Systematic (CTA)	12.78%	6.83%	0.11	2.40	0.46	0.18
HFR Statistical Arbitrage	9.46%	4.02%	-0.20	3.49	0.39	0.51
HFR Convertible Bond Arbitrage	11.74%	3.37%	-1.37	6.33	0.22	0.42
HFR Relative Value	12.92%	3.75%	-1.19	14.47	-0.05	0.47
HFR Equity Market Neutral	10.17%	3.22%	0.03	3.23	0.08	0.12
HFR Fixed Income Arbitrage	8.57%	4.59%	-1.84	13.00	-0.22	0.16
HFR Mortgage-Backed Securities	11.32%	5.05%	-3.21	22.62	-0.09	0.26

Par rapport à une distribution *gaussienne* des rendements, la plupart des stratégies alternatives, génèrent sur longue période le profil de performance suivant :



¹ FAVRE, L. & GALEANO, J.-A. – "An Analysis of Hedge Fund Performance Using Loess Fit Regression", *The Journal of Alternative Investments*, Spring 2002, Volume 4, Number 4, pp. 8 – 24.

² ACKERMANN, C. ; MCENALLY, R. & RAVENSCRAFT, D. – "The Performance of Hedge Funds : Risk, Return and Incentives", *The Journal of Finance*, Volume 54, June 1999, pp. 833-874.

II/ Prise en compte des moments d'ordres supérieurs

Dans une allocation d'actifs, visant à d'optimiser le profil rendement / risque d'un portefeuille en évaluant le risque par sa volatilité, on comprend qu'un raisonnement mené sur la seule base des critères moyenne – variance – corrélation globale n'est pas suffisant pour tenir compte des particularités d'une distribution avec des rendements non-normaux. Une approche classique par optimisation intégrera beaucoup trop de gestion alternative car un certain nombre de risques n'auront pas été inclus.

Dès lors, beaucoup de travaux³ consistent, à mettre en évidence des choix de portefeuille sur des critères moyenne – *Value-at-Risk*. La *VaR* mesure la perte maximale attendue, pour un certain intervalle de temps (ou à un horizon donné) et pour un certain intervalle de confiance. Il s'agit, par conséquent, d'évaluer les pertes potentielles engendrées par une position, et non pas par les gains. On s'intéresse donc uniquement au comportement des queues de distribution.

La méthodologie est la même que celle mise en œuvre lors de la construction de la frontière efficiente de *Markowitz*⁴. Il s'agit de minimiser la *VaR* d'un portefeuille pour un niveau de confiance choisi et pour un rendement donné r_p , les variables de contrôle étant les poids x_i des actifs, ou de façon symétrique de maximiser le rendement à un niveau de *VaR* fixé VaR_p .

$$\text{Min } VaR \quad s.c. \begin{cases} \sum_i x_i = 1 \\ \sum_i x_i \cdot r_i = r_p \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Max } \sum_i x_i \cdot r_i \quad s.c. \begin{cases} \sum_i x_i = 1 \\ VaR = VaR_p \end{cases}$$

Si nous appelons VaR^* la *VaR* cible sur laquelle l'investisseur est prêt à s'engager. Supposons que son portefeuille ait une *VaR* supérieure (inférieure) à VaR^* : l'exposition au risque est donc trop élevée (trop faible, soit un rendement trop faible). L'investisseur peut alors placer sur un actif non risqué une partie de son portefeuille (s'endetter à taux fixe afin d'investir davantage en actifs risqués) afin de diminuer (augmenter) la *VaR* de son portefeuille et de l'ajuster à VaR^* . On en déduit ainsi le montant total disponible pour se placer sur les actifs risqués. La répartition entre ces actifs risqués est faite de façon à ce que les proportions sur ce dernier montant soient les mêmes que sur le montant initial.

Ainsi, appelons x_i les poids respectifs des actifs dans le portefeuille initial de valeur P . Leur somme est égale à 1. Appelons M le montant à engager sur un placement sans risque de façon à égaliser la *VaR* du portefeuille final à VaR^* , qui aura une valeur $P + M$, avec M positif (placement) ou négatif (endettement).

Le poids de l'actif i y sera : $(P + M) \cdot x_i / P$ ce qui implique que la *VaR* du portefeuille final est une fonction de M : $f(M)$. Ainsi, on calcule M^* tel que : $VaR = VaR^* \Leftrightarrow f(M^*) = VaR^*$.

À l'aide de M^* , la part du monétaire est égale à : $M^* / (P + M^*)$,
équivalent à : $1 - \sum_i (P + M) \cdot x_i / P$, car dans le portefeuille initial : $\sum_i x_i = 1$.

³ HARLOW, W.V. - "Asset Allocation in a Downside-Risk Framework", *Financial Analysts Journal*, September-October 1991.

GAIVORONSKI, A.A. & PFLUG, G. - "Finding Optimal Portfolios with Constraints on Value at Risk", in *Proceedings of III Stockholm Seminar on Risk Behavior and Risk Management*, Stockholm, 1999.

⁴ MARKOWITZ, H. - "Portfolio Selection"; *The Journal of Finance*, 7, 1952, pp 77-91.

Cependant, des recherches⁵ montrent que, si la normalité des rendements est postulée, alors l'optimisation sur des critères moyenne – *VaR* conduit à des résultats identiques à ceux produits par le recours à des critères classiques. La *VaR*⁶ est seulement un multiple de la volatilité à un certain intervalle de confiance.

Il est bien connu que les mesures de risque comme le *β* ou le ratio de *Sharpe*⁷ ne permettent pas une appréciation adéquate des risques dynamiques et non-linéaires. Le fait que les investisseurs ne s'intéressent qu'aux moments d'ordre 1 et 2 des distributions de rentabilité ne peut être justifié que par des hypothèses simplistes portant, soit sur la fonction d'utilité des agents (utilité quadratique dont il est connu qu'elle n'exhibe pas la propriété observable de décroissance de l'utilité marginale), soit sur la distribution des rendements (distribution *gaussienne*).

Dans le cadre des portefeuilles incluant des instruments dérivés par exemple, l'hypothèse de rendements *gaussiens* n'est pas tenable⁸. Même si la rentabilité des classes d'actifs traditionnelles était *gaussienne*, la rentabilité de portefeuille incluant des produits dérivés (ou des stratégies dynamiques portant sur ces classes d'actifs traditionnelles) ne le serait pas. En effet, certains produits dérivés, comme les options, génèrent des flux terminaux qui sont des fonctions non-linéaires des actifs sous-jacents et une fonction non-linéaire d'une variable *gaussienne* n'est pas distribuée de façon *gaussienne*⁹.

Depuis longtemps, nous savons que grâce à des modèles conciliant la maximisation de l'utilité espérée avec l'arbitrage entre les moments, il n'est plus nécessaire de supposer que les lois de distributions sont forcément *gaussiennes* (il est alors indispensable de prendre en compte les moments d'ordre supérieurs à 2) et un *MEDAF* à 4 moments a rapidement été proposé¹⁰.

⁵ ARZAC, E. & BAWA, V. – "Portfolio Choice and Equilibrium in Capital Markets with Safety First Investors", *Journal of Financial Economics*, 1977, Volume 14, pp. 277 – 288.

⁶ Dans l'approche paramétrique de la *VaR*, une mixture de deux *gaussiennes* est utilisée pour modéliser les rendements, et la *VaR* est obtenue en utilisant un *mapping* entre cette distribution et la distribution normale. Une solution aux critiques adressées aux *VaR* paramétriques et historiques a été proposée, avec la *VaR* fondée sur des simulations utilisant la méthode de *Monte Carlo* faisant appel à la distribution stable *parétienne* (cette distribution prend en compte certaines caractéristiques de la distribution empirique telle que son caractère *leptocurtique*) et non à la distribution normale. Les investisseurs et gestionnaires ont mis en place d'autres solutions comme les *stress tests*, les analyses de scénarii, la modélisation plus complexe des queues de distribution avec la théorie des valeurs extrêmes, la *VaR* conditionnelle. Une approche alternative est mise en évidence avec la construction d'intervalles de confiance semi-paramétriques en utilisant les quatre premiers moments de la distribution. Cela permet d'incorporer des données empiriques pour les moments et ne pas recourir à la simulation consommatrice de temps. Cela évite aussi de recourir à des données d'échantillon même s'il faut admettre que les résultats obtenus sont des intervalles de confiance approximatifs, basés sur la théorie asymptotique des grands nombres.

⁷ L'augmentation des risques de pertes extrêmes du au recours à des forts effets de levier, qui n'apparaissent que dans les moments d'ordre supérieur à 2, n'est pas prise en compte dans le ratio de *Sharpe*.

SPURGIN, R. - "How to Game your Sharpe Ratio", *Working Paper*, Clark University, 1999.

⁸ LELAND, H.E. - "Beyond Mean-Variance : Risk and Performance Measures for Portfolios with Non-Symmetric Distributions", *Working Paper*, Haas School of Business, U.C. Berkley, 1999.

⁹ Il est en fait possible d'obtenir deux distributions de probabilités ayant la même moyenne et la même variance, mais des *skewness* et *kurtosis* différentes. Par exemple, une mixture équi-pondérée d'une *gaussienne* de moyenne 0.5 et d'écart-type 0.5 et d'une *gaussienne* de moyenne – 0.5 et d'écart-type 1.32, exhibe la même moyenne et la même variance qu'une *gaussienne* centrée réduite (0 et 1 respectivement). En revanche, la *skewness* est de – 0.75 et la *kurtosis* de 6.06 contre 0 et 3 respectivement pour la *gaussienne* centrée réduite.

¹⁰ LEVY, H. – "A Utility Function Depending on the First Three Moments", *The Journal of Finance*, September 1969.

ALDERFER, C. & BIERMAN, H. - "Choice with Risk : Beyond the Mean and Variance", *Journal of Business*, July 1970.

Si l'on formule les différents moments nécessaires pour prendre en compte la gestion alternative, nous avons :

- moment d'ordre 1 :
 $U' > 0$, correspondant à une croissance stricte de l'utilité U ;
- moment d'ordre 2 :
 $U'' < 0$, correspondant à une concavité, ou décroissance stricte de l'utilité marginale ;
- moment d'ordre 3 (avec la richesse W) :

$$\begin{aligned} \partial\left(-\frac{U''}{U'}\right)/\partial W > 0 &\Leftrightarrow [-U'''U' + (U'')^2]/(U')^2 < 0 \\ &\Rightarrow U'''U' > (U'')^2 \Rightarrow U''' > 0 \text{ (puisque } U'' > 0) \end{aligned}$$

correspondant à la préférence naturelle de l'investisseur pour un actif présentant une distribution dissymétrique vers la droite, communément appelée *skewness*. Le coefficient de dissymétrie de *Fisher*¹¹ est défini par (μ la moyenne et σ l'écart-type) :

$$\xi_3 = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{\left[\sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^3\right]}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2}\right)^3} \quad (1)$$

Il s'interprète essentiellement à parti de son signe : si ξ_3 est positif (négatif), la distribution de X est concentrée sur la gauche (la droite) et étalée sur la droite (la gauche). Pour une distribution symétrique, on a $\xi_3 = 0$.

- moment d'ordre 4 :

$$\begin{aligned} \partial\left(-\frac{U'''}{U''}\right)/\partial W < 0 &\Leftrightarrow [-U^{(4)}U'' + (U''')^2]/(U'')^2 < 0 \\ &\Rightarrow U^{(4)}U'' > (U''')^2 \Rightarrow U^{(4)} < 0 \text{ (puisque } U'' < 0) \end{aligned}$$

correspondant à l'aversion pour un aplatissement de la distribution (*kurtosis*), qui apporte des informations sur les valeurs extrêmes. Le coefficient d'aplatissement de *Fisher* est défini par le moment d'ordre 4 rapporté à la variance :

$$\kappa_4 = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4} - 3 = \frac{\left[\sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^4\right]}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2}\right)^4} - 3 \quad (2)$$

Il s'interprète par rapport à la distribution normale. Celle-ci a un coefficient d'aplatissement de 0 (ou un excès de *kurtosis* de 3). Les distributions plus aplaties que la loi normale (*leptokurtiques*) sont plus pointues au voisinage de leur moyenne et présentent de queues plus épaisses (et donc moins importantes pour les valeurs intermédiaires) que la distribution normale ; elles sont caractérisées par un paramètre κ_4 positif.

¹¹ FISHER, R.A. - "The Sampling Distribution of Some Statistics Obtained from Non Linear Equations", *Ann. Eugen.*, 7, pp. 179-188, 1939.

Ainsi on doit avoir les quatre premières dérivées de signes alternés :

$$U' > 0; U'' < 0; U''' > 0 \text{ et } U^{(4)} < 0.$$

L'agent aura donc une préférence pour une espérance et une *skewness* positives (et une aversion s'ils sont négatifs), de même il aura une aversion pour la variance et la *kurtosis*. On pourrait même inclure un moment d'ordre 5 pour montrer que l'investisseur penche davantage pour des gains extrêmes que pour des pertes extrêmes. En effet l'aversion pour la *kurtosis* est à relativiser, dans l'investisseur redoute uniquement les pertes extrêmes. L'investisseur diminuera donc son aversion pour les valeurs extrêmes si les probabilités de gains extrêmes sont supérieures aux probabilités de pertes extrêmes (achat d'options par exemple).

Les différents moments de la distribution sont pris en compte grâce à un développement de *Taylor* de la fonction d'utilité autour de la moyenne :

$$U(\tilde{W}) = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k!} U^{(k)}(\bar{W}) (\tilde{W} - \bar{W})^k \quad \text{avec : } \bar{W} = E(\tilde{W}), \tilde{W} \text{ la richesse aléatoire en fin de période.}$$

$$\text{et donc le programme à résoudre devient : } \text{Max} E[U(\tilde{W})] = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k!} U^{(k)}(\bar{W}) E[(\tilde{W} - \bar{W})^k]$$

Le test de Jarque-Bera permet de déterminer si la distribution est normale ou non en évaluant la différence de *kurtosis* κ_4 et de *skewness* ξ_3 de la série et de celles d'une loi normale :

$$JB = \frac{N-k}{6} \left[\xi_3^2 + \frac{1}{4} (\kappa_4 - 3)^2 \right]$$

avec : k le nombre de coefficients, N la taille de l'échantillon

Le test de *Jarque-Bera*¹² vise à tester l'hypothèse jointe selon laquelle la distribution empirique du rendement présente une *skewness* non nulle (lorsque le pic de la probabilité d'occurrence ne correspond pas à la moyenne empirique : la série est dite asymétriquement distribuée autour de sa moyenne) et une *kurtosis* différente de 3 (valeur pour la *kurtosis* d'une distribution normale).

Ainsi, dans un monde non-linéaire, l'investisseur affiche une préférence pour les moments impairs et une aversion pour les moments pairs d'une distribution. On comprend, dans ce contexte, qu'il soit alors important de découvrir la distribution d'une variable aléatoire lorsqu'on ne la connaît pas.

Une première approche, qui demande un ajustement méthodologique assez important, consiste à utiliser un modèle non-linéaire pour expliquer les rentabilités d'un portefeuille incluant des instruments dérivés. Par exemple, pour modéliser la non-linéarité des rendements, il a été proposé¹³ de mettre en œuvre, dans la décomposition du rendement de *hedge funds*, au côté des rendements normaux, une approche de type *phase-locking* représentative à la fois du risque de modèle en cas d'événements extrêmes et des évolutions des corrélations, en cas de très importants mouvements de marché¹⁴.

¹² BERA, A.K. & JARQUE, C.M. - "An Efficient Large-Sample Test for Normality of Observations and Regression Residuals", *Australian National University Working Papers in Econometrics*, 1981, 40, Canberra.

¹³ LO, A.W. - "Risk Management for Hedge Funds : Introduction and Overview, Forthcoming", *Financial Analysts Journal*, November/December 2001, pp. 16-23.

¹⁴ Une autre démarche, plus proche du cadre d'application de la théorie financière classique, consiste à utiliser un modèle linéaire utilisant des régresseurs (ou variables explicatives) non-linéaires. Parmi les variables permettant de représenter la non-linéarité des rendements des *hedge funds*, il paraît naturel d'utiliser des portefeuilles d'options.

Les techniques de *bootstrapping*¹⁵ (rééchantillonnage, *resampling*) consistent, à partir d'un échantillon donné, à effectuer des réaménagements aléatoires de cette série (avec ou sans remise), de façon à décrypter la distribution de la variable. Sous des conditions très générales, la distribution qui fait l'objet de *bootstrapping*, converge vers la véritable distribution quand le nombre d'observations tend vers l'infini. Cette méthode est très apparentée à la simulation de *Monte Carlo* mais présente l'avantage de ne pas requérir de distribution a priori dans le mécanisme de génération des variables aléatoires¹⁶.

Dès lors¹⁷, et afin de tenir compte d'une distribution des rendements différente de la loi normale, des travaux ont recours à l'expansion de *Cornish-Fisher*¹⁸ pour corriger les percentiles de la distribution normale pour les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement, entre autres. Il s'agit d'une relation approximative entre les percentiles d'une distribution et ses moments. Cette approximation, basée sur la série de *Taylor*, recourt aux moments d'une distribution qui dévie de la normale pour calculer ses percentiles.

L'expansion de *Cornish-Fisher* provient de l'inversion du développement d'*Edgeworth* qui est un développement limité de la fonction de répartition des estimateurs pour amener une distribution quelconque vers le théorème de la limite centrale. Les développements de *Gram-Charlier* ou *Edgeworth* permettent d'approcher une densité de probabilité par une série de termes correctifs ajoutés à une *gaussienne*. Le développement d'*Edgeworth* utilise les cumulants et consiste en un développement limité autour de la fonction de répartition de la distribution normale¹⁹.

Ainsi avec les cumulants²⁰ d'ordre 3 et 4 calculés à partir des moments d'une variable aléatoire centrée réduite :

$$\xi_3 = \mu_3 \quad \kappa_4 = \mu_4 - 3.\mu_2^2$$

Il est possible²¹ de transformer la densité d'une distribution normale en une densité tenant compte des moments d'ordre 3 et 4.

La transformation $f(x)$ est obtenu en multipliant la densité $d(x)$ par :

$$f(x) = \left[1 + \frac{1}{6}.\xi_3.(x^3 - 3.x) + \frac{1}{24}.(k_4 - 3).(x^4 - 6.x^2 + 3) + \frac{1}{72}.\xi_3^2.(x^6 - 15.x^4 + 45.x^2 - 15) \right] d(x)$$

Si *skewness* $\xi_3 = 0$ et *kurtosis* $\kappa_4 = 3$, alors ce terme égal 1 et $f(x) = d(x)$.

¹⁵ EFRON, B. - "Bootstrap Methods : Another Look at the Jackknife", Annals of Statistics, 7, 1979, pp. 1-26.

¹⁶ Nous savons que la médiane est un indicateur robuste de la tendance centrale alors que la moyenne ne l'est pas dans le cas d'une distribution non-normale. Supposons que l'on ait un échantillon de départ X et que l'on ne connaisse pas la distribution théorique. La méthode du *bootstrap* peut être utilisée pour générer certaines informations reliées à cette distribution. On peut alors calculer l'écart-type de la médiane de cet échantillon.

¹⁷ FAVRE, L. & GALEANO, J.-A. - " Mean-Modified Value-at-Risk Optimization with Hedge Funds", The Journal of Alternative Investments, Fall 2002, Volume 5, Number 2, pp. 21 – 25.

¹⁸ CORNISH, E.A. & FISHER, R.A. - "Moments and Cumulants in the Specification of Distributions", Review of the International Statistical Institute, 1937, pp.307-320.

¹⁹ HALL, P. - The Bootstrap and Edgeworth Expansion, New York, Springer Verlag, 1992.

²⁰ BENTKUS, V. ; GÖTZE, F., & VAN ZWET, W.R. - "An Edgeworth Expansion for Symmetric Statistics", Annals of Statistics, 1997, 25, pp. 851–896,

²¹ CRAMER, H - Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1946.

De la même manière que l'expansion d'*Edgeworth* permet de corriger les déformations de la fonction de répartition, le développement de *Cornish-Fisher* corrige les déformations de la densité. Le développement de *Cornish-Fisher* permet donc d'approcher le percentile w_α à partir de celui de la loi $N(0,1)$ notée z_α . Il s'obtient par inversion²² de l'expansion d'*Edgeworth*, ce qui donne, pour les quatre premiers moments :

$$w_\alpha \cong z_\alpha + \frac{1}{6} \cdot (z_\alpha^2 - 1) \xi_3 + \frac{1}{24} \cdot (z_\alpha^3 - 3 \cdot z_\alpha) \kappa_4 - \frac{1}{36} \cdot (2 \cdot z_\alpha^3 - 5 \cdot z_\alpha) \xi_3^2 \quad (3)$$

w_α : le percentile corrigé de la distribution au seuil α ;

z_α : le percentile correspondant à $N(0,1)$

L'intervalle de confiance *IC*, tenant compte des 4 premiers moments de la distribution est :

$$IC = [\mu - h'(z_\alpha) \cdot \sigma^2, \mu - h'(-z_\alpha) \cdot \sigma^2] \quad (4)$$

$$h'(z_\alpha) = z_\alpha + \left[\left(\mu_1 - \frac{\xi_3}{6} \right) + \left(\frac{\sigma^2 - 1}{2} - \left(\frac{\kappa_4}{8} \right) \right) z_\alpha + \left(\frac{\xi_3}{6} \right) z_\alpha^2 + \left(\frac{\kappa_4}{24} \right) z_\alpha^3 \right]$$

La *VaR* prenant en compte les moments d'ordre 3 et 4 devient alors :

$$VaR = W \cdot \left[\mu - \left(z_\alpha + \frac{1}{6} \cdot (z_\alpha^2 - 1) \xi_3 + \frac{1}{24} \cdot (z_\alpha^3 - 3 \cdot z_\alpha) \kappa_4 - \frac{1}{36} \cdot (2 \cdot z_\alpha^3 - 5 \cdot z_\alpha) \xi_3^2 \right) \right] \quad (5)$$

L'enjeu consiste alors à savoir mesurer les moments d'ordre 3 et 4 d'un portefeuille constitué de plusieurs actifs X et Y . Pour cela, nous pouvons proposer²³, de la même manière que :

$$\begin{aligned} Var(X + Y) &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum [(X + Y) - (\bar{X} + \bar{Y})]^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum [(X - \bar{X}) + (Y - \bar{Y})]^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum (X - \bar{X})^2 + \frac{1}{n-1} \cdot \sum (Y - \bar{Y})^2 + \frac{2}{n-1} \cdot \sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot Cov(X, Y)$$

Nous obtenons (6):

$$\begin{aligned} Skew(X + Y) &= \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sum [(X + Y) - (\bar{X} + \bar{Y})]^3}{[\sqrt{Var(X + Y)}]^3} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sum [(X - \bar{X}) + (Y - \bar{Y})]^3}{[\sqrt{Var(X + Y)}]^3} \\ &= \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sum [(X - \bar{X})^3 + (Y - \bar{Y})^3 + 3 \cdot (X - \bar{X})^2 \cdot (Y - \bar{Y}) + 3 \cdot (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})^2]}{[\sqrt{Var(X + Y)}]^3} \\ \Leftrightarrow Skew(X + Y) &= \frac{E[(X - \bar{X})^3] + E[(Y - \bar{Y})^3] + 3 \cdot E[(X - \bar{X})^2 \cdot (Y - \bar{Y})] + 3 \cdot E[(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})^2]}{[\sqrt{Var(X + Y)}]^3} \end{aligned}$$

²² HALL, P. – "Inverting an Edgeworth Expansion", *The Annals of Statistics*, vol. 39, 1983, pp. 1264-1273.

²³ NICOLAS, F. – "Obligations Convertibles et Actifs Hybrides : Évaluation et Utilisation en Gestion de Portefeuille", *Thèse de Doctorat en Gestion*, Université Paris I – Panthéon - Sorbonne, 2002.

et (7) :

$$\begin{aligned}
 Kurtosis(X+Y) &= \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sum [(X+Y) - (\bar{X} + \bar{Y})]^4}{[\sqrt{Var(X+Y)}]^3} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sum [(X - \bar{X}) + (Y - \bar{Y})]^4}{[Var(X+Y)]^2} \\
 &= \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sum \left[(X - \bar{X})^4 + (Y - \bar{Y})^4 + 6 \cdot (X - \bar{X})^2 \cdot (Y - \bar{Y})^2 \right. \\
 &\quad \left. + 4 \cdot (X - \bar{X})^3 \cdot (Y - \bar{Y}) + 4 \cdot (X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})^3 \right]}{[Var(X+Y)]^2} \\
 \Leftrightarrow Kurtosis(X+Y) &= \frac{\left\{ E[(X - \bar{X})^4] + E[(Y - \bar{Y})^4] + 6 \cdot E[(X - \bar{X})^2 \cdot (Y - \bar{Y})^2] \right. \\
 &\quad \left. + 4 \cdot E[(X - \bar{X})^3 \cdot (Y - \bar{Y})] + 4 \cdot E[(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})^3] \right\}}{[Var(X+Y)]^2}
 \end{aligned}$$

Nous savons que le risque d'un portefeuille P dans lequel les actifs sont pondérés par un vecteur de *Poids* et une *Matrice* de variances – covariances s'obtient avec :

$$\sigma_p = \sqrt{\text{Somme}(\text{Poids}) * (\text{Matrice}) * \text{Transpose}(\text{Poids})}$$

Le *skew* du portefeuille à n actifs s'obtient alors avec :

$$\text{Skew}_p = \frac{\left[\begin{aligned} &\text{Somme}(\text{Poids})^3 * \text{Moyenne}(X - \bar{X})^3 \\ &+ 3 * \text{Somme}(\text{Poids})^2 * (\text{Matrice1}) * \text{Transpose}(\text{Poids}) \\ &+ 3 * \text{Somme}(\text{Poids})^2 * (\text{Matrice2}) * \text{Transpose}(\text{Poids}) \end{aligned} \right]}{(\sigma_p)^3}$$

où les *Matrices* 1 et 2, pour 3 actifs X , Y et Z , sont les suivantes :

Matrice 1	X	Y	Z
X			
Y	$\frac{1}{n} \cdot \sum (X - \bar{X})^2 \cdot (Y - \bar{Y})$		
Z	$\frac{1}{n} \cdot \sum (X - \bar{X})^2 \cdot (Z - \bar{Z})$	$\frac{1}{n} \cdot \sum (Y - \bar{Y})^2 \cdot (Z - \bar{Z})$	

Matrice 2	X	Y	Z
X			
Y	$\frac{1}{n} \cdot \sum (X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})^2$		
Z	$\frac{1}{n} \cdot \sum (X - \bar{X}) \cdot (Z - \bar{Z})^2$	$\frac{1}{n} \cdot \sum (Y - \bar{Y}) \cdot (Z - \bar{Z})^2$	

III/ Allocation stratégique et *hedge funds*

L'allocation stratégique d'actifs consiste en la fixation d'un *benchmark* stratégique correspondant à une combinaison cible d'actifs, retenue en fonction d'un objectif de gestion ou d'une contrainte de passif. Cela revient à envisager un horizon de gestion sous lequel les objectifs de rendement et de risque doivent être remplis.

Dès lors, une fois des anticipations de rendement formulées (sous forme de prime entre les actifs par exemple), il est déterminant de s'interroger sur la déformation de ces prévisions du fait des incertitudes liées à la prise en compte de la volatilité. En effet, nous savons que sous un horizon de temps lointain, un objectif de gestion comme la protection d'un capital, peut ne pas être obtenu car la variabilité des prix dégrade la moyenne de long terme. Comment désormais intégrer le caractère non-*gaussiens* des rendements dans cette analyse? C'est ce que nous allons maintenant envisager.

Pour ce faire, nous prolongerons des approches²⁴ menées sur les deux premiers moments d'une distribution normale, pour les étendre sur les deux moments suivants et se servir ensuite de ce que nous avons exposé précédemment.

Pour cela, nous posons :

S_t est la valeur d'un actif en fin d'année t ;

$R_{t-1,t} = (S_t - S_{t-1}) / S_{t-1}$ est le taux de rendement annuel de l'actif S dont la moyenne est μ et l'écart-type σ ;

$X_{t-1,t} = S_t / S_{t-1} = 1 + R_{t-1,t}$ est le taux annuel de progression du capital ;

$\ln(X_{t-1,t}) = \ln(S_t / S_{t-1})$ est le taux de rendement annuel continu, avec $\ln(X_{t-1,t}) \sim N(\mu, \sigma^2)$ et donc $\ln(S_t / S_{t-1}) = \mu + \sigma.Z$ avec $Z \sim N(0,1)$ que l'on peut donc

écrire : $X_{t-1,t} = (S_t / S_{t-1}) = \exp(\mu + \sigma.Z) \approx N\left(e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, \sqrt{e^{2\mu + \sigma^2} [e^{\sigma^2} - 1]}\right)$;

$R_{0,n} = (S_n / S_0)^{1/n} - 1$ est le taux de rendement l'année n , avec $R_{0,n}$ solution de $S_n = S_0 \cdot (1 + R_{0,n})^n$;

$E \equiv E(X_{t-1,t}) = E(1 + R_{t-1,t}) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$ est le taux annuel de progression du capital attendu²⁵ ;

$V \equiv \text{var}(X_{t-1,t}) = \text{var}(R_{t-1,t}) = \exp(2\mu + \sigma^2) [\exp(\sigma^2) - 1]$ est la variance²⁶ du rendement annuel.

²⁴ BLACK, F. - "Estimating Expected Return", Financial Analysts Journal, Vol. 49, n°8, September/October 1993, pp. 36-38.

DE LA GRANDVILLE, O. - "The Long-Term Expected Rate of Return : Setting it Right", Financial Analysts Journal, November/December 1998, pp. 75-80.

²⁵

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2y) g(y) dy \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y - (\mu + 2\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \exp\left(\frac{4\mu\sigma^2 + 4\sigma^4}{2\sigma^2}\right) dy = \exp(2\mu + 2\sigma^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y - (\mu + 2\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right) dy \\ \Leftrightarrow E(X^2) &= \exp(2\mu + 2\sigma^2) \end{aligned}$$

²⁶ $\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))(x_i - E(X)) p_i$
 $= E(X^2) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

Puisque nous supposons que $X_t - X_{t-1} = \mu + \sigma dz$ où z suit un *Wiener* généralisé (avec $z = \varepsilon\sqrt{t}$ et $\varepsilon \approx N(0,1)$) et t représente une année quelconque.

$$\text{Sur 1 an : } X_t - X_{t-1} \approx N(\mu, \sigma)$$

$$\begin{aligned} \text{Sur } n \text{ années : } X_n - X_0 &= X_n - X_{n-1} + X_{n-1} - X_{n-2} + \dots + X_1 - X_0 \\ X_n - X_0 &= \mu + \sigma\varepsilon + \mu + \sigma\varepsilon + \dots + \mu + \sigma\varepsilon \end{aligned}$$

Ici tous les ε sont indépendants, d'où le résultat suivant : $X_n - X_0 \approx N(n\mu, \sqrt{n}\sigma)$

Nous pouvons écrire, à l'horizon n , le taux de rendement géométrique :

$$R_{0,n} = \left(\frac{S_n}{S_0}\right)^{1/n} - 1 = \left(\frac{S_1}{S_0} \cdot \frac{S_2}{S_1} \cdot \dots \cdot \frac{S_n}{S_{n-1}}\right)^{1/n} - 1 \quad (8)$$

$$\text{et donc : } 1 + R_{0,n} = \prod_{t=1}^n X_{t-1,t}^{1/n} = \prod_{t=1}^n \exp\left(\frac{1}{n} X_{t-1,t}\right) = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(X_{t-1,t})\right)$$

puisque $\ln(X_{t-1,t}) \sim N(\mu, \sigma^2)$ alors $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(X_{t-1,t}) \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ et donc :

$$\text{On sait encore que } \begin{cases} Z \sim N(0; 1) \\ 1 + R_{0,n} = \exp\left(\mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z\right) \end{cases} \text{ et donc : } \left(\mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z\right) \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Et $\exp\left(\mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z\right)$ admet comme densité :

$$p(1 + R_{0,n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \cdot \frac{1}{(1 + R_{0,n})} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2/n} \cdot (\ln(1 + R_{0,n}) - \mu)^2\right] \quad (9)$$

L'espérance de rendement et l'écart-type à l'horizon n sont donc :

$$E(R_{0,n}) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2n}\right) - 1 \quad (10)$$

$$\sigma(R_{0,n}) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2n}\right) \left[\exp\left(\frac{\sigma^2}{n}\right) - 1\right]^{\frac{1}{2}} = [1 + E(R_{0,n})] \left[\exp\left(\frac{\sigma^2}{n}\right) - 1\right]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

Si nous résolvons maintenant le système de 2 équations à 2 inconnus en exprimant μ et σ^2 sous forme d'espérance E et de variance V , on a :

$$\begin{cases} E = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \\ V = \exp(2\mu + \sigma^2) [\exp(\sigma^2) - 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(E) = \ln\left[\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right] \\ \ln(V) = \ln[\exp(2\mu + \sigma^2) [\exp(\sigma^2) - 1]] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \ln(E) - \frac{\sigma^2}{2} \\ \ln(V) = (2\mu + \sigma^2) + (\sigma^2) - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{\ln(V) - 2\mu + 1}{2}$$

En remplaçant μ par $\ln(E) - \frac{\sigma^2}{2}$ dans $\sigma^2 = \frac{\ln(V) - 2\mu + 1}{2}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\ln(V) - 2 \left[\ln(E) - \frac{\sigma^2}{2} \right] + 1}{2} & \Leftrightarrow & \quad 2\sigma^2 = \ln(V) - 2 \cdot \ln(E) + \sigma^2 + 1 \\ \Leftrightarrow \quad \sigma^2 &= \ln\left(1 + \frac{V}{E^2}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

En remplaçant σ^2 par $\ln\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)$ dans μ on obtient :

$$\mu = \ln(E) - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(1 + \frac{V}{E^2}\right) \quad (13)$$

En remplaçant (12) et (13) dans (10) et (11) respectivement, on obtient²⁷ :

$$\begin{aligned} E(R_{0,n}) &= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2n}\right) - 1 & \Leftrightarrow & \quad E(R_{0,n}) = \exp\left[\ln(E) - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(1 + \frac{V}{E^2}\right) + \frac{1}{2n} \cdot \ln\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)\right] - 1 \\ & & \Leftrightarrow & \quad E(R_{0,n}) = \exp\left[\ln(E) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)\right] - 1 \\ & & \Leftrightarrow & \quad E(R_{0,n}) = \exp\left[\ln(E) + \left(\frac{1-n}{2n}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)\right] - 1 \\ \Leftrightarrow \quad E(R_{0,n}) &= E \cdot \left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{(1/2)(1/n-1)}{1}} - 1 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{et : } \sigma(R_{0,n}) &= [1 + E(R_{0,n})] \left[\exp\left(\frac{\sigma^2}{2n}\right) - 1 \right]^{\frac{1}{2}} & \Leftrightarrow & \quad \sigma(R_{0,n}) = [1 + E(R_{0,n})] \left[\exp\left(\frac{\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)}{n}\right) - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \quad \sigma(R_{0,n}) &= [1 + E(R_{0,n})] \left[\left(1 + \frac{V}{E^2}\right) - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (15)$$

En faisant tendre n vers l'infini on s'aperçoit que : $E(R_{0,n}) \rightarrow \frac{E}{\sqrt{1 + \frac{V}{E^2}}} - 1$ et $\sigma(R_{0,n}) \rightarrow 0$

Nous comprenons que la volatilité à horizon d'un actif financier diminue par rapport à la volatilité annuelle, de même que le rendement annuel puisque la moyenne géométrique des rendements est toujours inférieure à la moyenne arithmétique, en présence de volatilité (si les rendements sont log-normaux, l'écart entre les deux mesures est proche de $\sigma^2/2$) :

$$\sqrt[n]{\prod_i (1 + R_i)} \leq 1 + \frac{\sum_i R_i}{n}$$

Tout est désormais en place pour calculer le couple rendement – risque d'un portefeuille à un horizon donné. Seule manque la matrice des corrélations, dont on peut montrer qu'il est possible de se fonder sur les corrélations présentes, puisque la corrélation à horizon n'est pas différente (voir Annexe 2).

²⁷ avec : $\exp[\ln(a) + y \cdot \ln(b)] = a \cdot b^y$ et $\exp\left[\frac{\ln(a)}{x}\right] = a \cdot \frac{1}{x}$

Si nous désirons maintenant prendre en compte les moments d'ordre supérieur dans notre travail, nous savons qu'il est possible d'écrire si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, pour les moments d'ordre 3 et 4 respectivement :

$$E(X^3) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^3 = \exp\left[\frac{3}{2} \cdot (2\mu + 3\sigma^2)\right] \quad (16)$$

$$E(X^4) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^4 = \exp[4 \cdot (\mu + 2\sigma^2)] \quad (17)$$

Dès lors, le moment d'ordre 3 ξ_3 s'écrit, en utilisant (16) :

$$\begin{aligned} E\left[\frac{(X - E_X)^3}{\sigma^3}\right] &= \frac{1}{\sigma^3} \cdot [E(X^3 - 3E_X \cdot X^2 + 3E_X^2 \cdot X - E_X^3)] \\ &= \frac{1}{\sigma^3} \cdot [E(X^3) - 3E_X \cdot E(X^2) + 3E_X^2 \cdot E(X) - E_X^3] \\ \Leftrightarrow \xi_3(X_{t-1,t}) &= \frac{1}{\sigma^3} \cdot \left[\exp\left(3\mu + \frac{9}{2}\sigma^2\right) - 3 \cdot \exp\left(3\mu + \frac{5}{2}\sigma^2\right) + 2 \cdot \left(3\mu + \frac{3}{2}\sigma^2\right) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

On peut donc isoler μ avec :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{3} \cdot \ln\left[\xi_3(X_{t-1,t}) \cdot \sigma^3 \cdot \frac{\exp(\sigma^2)}{[\exp(\sigma^2)^3 - 3 \cdot \exp(\sigma^2) + 2]}\right] - \frac{5}{6} \cdot \sigma^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \ln[\xi_3(X_{t-1,t})] + \ln(\sigma) + \frac{1}{3} \cdot \sigma^2 - \frac{1}{3} \cdot \ln[\exp(3\sigma^2) - 3 \cdot \exp(\sigma^2) + 2] - \frac{5}{6} \cdot \sigma^2 \\ \Leftrightarrow \mu &= \frac{1}{3} \cdot \ln[\xi_3(X_{t-1,t})] + \ln(\sigma) + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 - \frac{1}{3} \cdot \ln[\exp(3\sigma^2) - 3 \cdot \exp(\sigma^2) + 2] \end{aligned} \quad (19)$$

De manière similaire, le moment d'ordre 4 κ_4 s'écrit, en utilisant (17) :

$$\begin{aligned} E\left[\frac{(X - E_X)^4}{\sigma^4}\right] &= \frac{1}{\sigma^4} \cdot [E(X^4 - 4E_X \cdot X^3 + 6E_X^2 \cdot X^2 - 4E_X^3 \cdot X + E_X^4)] \\ &= \frac{1}{\sigma^4} \cdot [E(X^4) - 4E_X \cdot E(X^3) + 6E_X^2 \cdot E(X^2) - 4E_X^3 \cdot E(X) + E_X^4] \\ \Leftrightarrow \kappa_4(X_{t-1,t}) &= \frac{1}{\sigma^4} \cdot [\exp(4\mu + 8\sigma^2) - 4 \cdot \exp(4\mu + 5\sigma^2) + 6 \cdot (4\mu + 3\sigma^2) - 3 \cdot (4\mu + 2\sigma^2)] \end{aligned} \quad (20)$$

Et là encore, on obtient μ avec :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{4} \cdot \ln\left[\kappa_4(X_{t-1,t}) \cdot \sigma^4 \cdot \frac{\exp(\sigma^2)^3}{[\exp(\sigma^2)^6 - 4 \cdot \exp(\sigma^2)^3 + 6 \cdot \exp(\sigma^2) - 3]}\right] - \frac{5}{4} \cdot \sigma^2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \ln[\kappa_4(X_{t-1,t})] + \ln(\sigma) + \frac{3}{4} \cdot \sigma^2 - \frac{1}{4} \cdot \ln[\exp(6\sigma^2) - 4 \cdot \exp(3\sigma^2) + 6 \cdot \exp(\sigma^2) - 3] - \frac{5}{4} \cdot \sigma^2 \\ \Leftrightarrow \mu &= \frac{1}{4} \cdot \ln[\kappa_4(X_{t-1,t})] + \ln(\sigma) - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 - \frac{1}{4} \cdot \ln[\exp(6\sigma^2) - 4 \cdot \exp(3\sigma^2) + 6 \cdot \exp(\sigma^2) - 3] \end{aligned} \quad (21)$$

On sait alors comme pour (14) et (15) que la *skewness* $\xi_3(R_{0,n})$ et la *kurtosis* $\kappa_4(R_{0,n})$ à horizon n s'écrivent, en remplaçant (12) et respectivement (19) et (21) dans respectivement (18) et (20), cette fois avec :

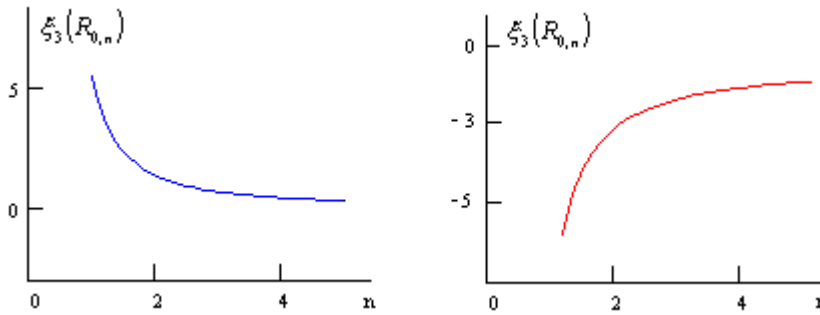
$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2.n}\right) - 1$$

$$E(X^2) = \exp\left[2.\left(\mu + \frac{\sigma^2}{n}\right)\right] - 2.\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2.n}\right) + 1$$

$$E(X^3) = \exp\left[\frac{3}{2}.\left(2.\mu + 3.\frac{\sigma^2}{n}\right)\right] - 3.\exp\left[2.\left(\mu + \frac{\sigma^2}{n}\right)\right] + 3.\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2.n}\right) - 1$$

$$E(X^4) = \exp\left[4.\left(\mu + 2.\frac{\sigma^2}{n}\right)\right] - 4.\exp\left[\frac{3}{2}.\left(2.\mu + 3.\frac{\sigma^2}{n}\right)\right] + 6.\exp\left[2.\left(\mu + \frac{\sigma^2}{n}\right)\right] - 4.\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2.n}\right) + 1$$

Nous obtenons alors une *skewness* à horizon devenant de moins en moins négative (positive) lorsque la *skewness* sur l'année 1 (par exemple évaluée avec l'historique des cours) est négative (positive). Les évolutions sont d'ailleurs les mêmes pour la *kurtosis*. Cela indique que l'asymétrie comme l'aplatissement d'une distribution des rendements ont tendance à se réduire lorsqu'on les visualise à un horizon n éloigné.



Nous en concluons que, dans le cadre d'une allocation stratégique d'actifs, visant le long terme, l'impact d'actifs alternatifs présentant des distributions particulières est à relativiser lorsque l'horizon d'appréciation des résultats s'éloigne : l'asymétrie et l'aplatissement, tout comme la volatilité, se placent sous l'effet de la tendance et la distribution converge donc vers une normale, minimisant les effets secondaires de l'alternatif, pour autant que le sous-jacent n'ait pas fait faillite (car ce raisonnement est purement statistique).

Cela permet donc, à l'aide de (4), de déterminer un intervalle de confiance pour un seuil de rendement donné et pour un horizon donné avec, une probabilité²⁸ p pour que le rendement se situe entre deux valeurs a et b qui vaut :

$$p = \Phi\left(\frac{\text{Log}(1+b) - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\text{Log}(1+a) - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$$

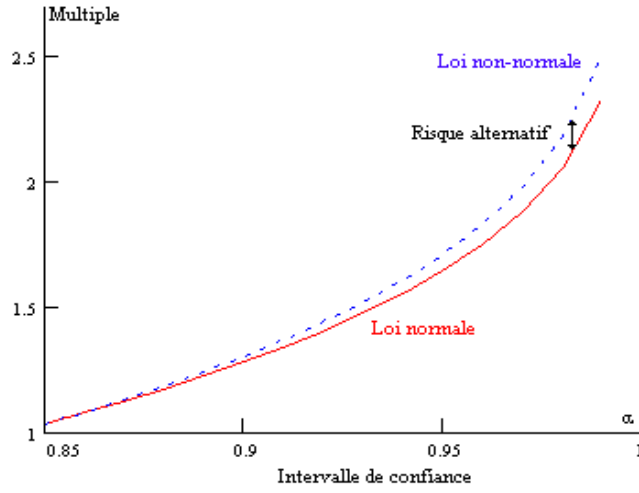
σ est alors calculée avec les résultats précédents, et nous notons d'ailleurs que nos résultats convergent assez bien avec une approche par simulation de *Monte-Carlo*, où le sous-jacent suivrait un processus du type (avec ε un terme aléatoire) :

$$\left[\varepsilon + \left(\frac{1}{6}\right).(\varepsilon^2 - 1).\xi_3(X_{t-1,t}) + \left(\frac{1}{24}\right).(\varepsilon^3 - 3.\varepsilon).\kappa_4(X_{t-1,t}) - \left(\frac{1}{36}\right).(2.\varepsilon^3 - 5.\varepsilon)(\xi_3(X_{t-1,t}))^2 \right].\sigma + \mu$$

²⁸ La notion d'intervalle de confiance, par exemple comprenant 95% des valeurs (ou excluant 5% des valeurs) :

$$p \left[\mu - 1,96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu + 1,96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = 95\%$$

Nous exposons ci-dessous, pour plusieurs intervalles de confiance entre 85% et 100%, avec une moyenne de 10% et un écart-type de 20%, les différents « multiples » de l'écart-type à ajouter et retrancher (afin d'intégrer les risques spécifiques) de la moyenne pour trouver la densité, sur un horizon de 5 ans.



De manière plus simple, en passant par les valeurs caractéristiques, nous savons que pour la *skewness*, la valeur caractéristique est : $\xi_3 = \exp\left(\frac{\sigma^2}{n} + 2\right) \cdot \sqrt{\exp\left(\frac{\sigma^2}{n}\right) - 1}$

en remplaçant σ^2 par sa valeur en (12), nous avons :

$$\begin{aligned} \xi_3 &= \exp\left(\frac{\ln\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)}{n} + 2\right) \cdot \sqrt{\exp\left(\frac{\ln\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)}{n}\right) - 1} & \Leftrightarrow & \xi_3 = \left[\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{1}{n}} + 2\right] \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{1}{n}} - 1} \\ \Leftrightarrow \xi_3^2 &= \left[\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{1}{n}} + 2\right]^2 \cdot \left[\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right] & \Leftrightarrow & \xi_3^2 = \left\{\left[\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^2 + 4 + 4\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right\} \cdot \left[\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right] \\ \Leftrightarrow \xi_3^2 &= -\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{2}{n}} - 4 + \left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{3}{n}} + 4\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{2}{n}} & \Leftrightarrow & \xi_3 = \sqrt{\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{3}{n}} + 3\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{2}{n}} - 4} \end{aligned}$$

Pour la *kurtosis* κ_4 dont la valeur caractéristique est : $\kappa_4 = \left(e^{\frac{3\sigma^2}{n}} + 6e^{\frac{\sigma^2}{n}} + 6\right) \left(e^{\frac{\sigma^2}{n}} - 1\right)$

$$\begin{aligned} \kappa_4 &= \left[\exp\left(3 \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)}{n}\right) + 6 \cdot \exp\left(\frac{\ln\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)}{n}\right) + 6\right] \cdot \left[\exp\left(\frac{\ln\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)}{n}\right) - 1\right] \\ \Leftrightarrow \kappa_4 &= \left[\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{3}{n}} + 6\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{1}{n}} + 6\right] \cdot \left[\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right] & \text{avec : } \exp\left[\frac{x \cdot \ln(a)}{y}\right] &= a^{\frac{x}{y}} \\ \Leftrightarrow \kappa_4 &= -\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{3}{n}} - 6\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{1}{n}} - 6 + \left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{4}{n}} + 6\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{2}{n}} + 6\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{1}{n}} \\ \Leftrightarrow \kappa_4 &= \left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{4}{n}} - \left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{3}{n}} + 6\left(1 + \frac{V}{E^2}\right)^{\frac{2}{n}} - 6 \end{aligned}$$

IV/ Des stratégies variées en fonction d'un profil de gestion

La question se pose enfin de savoir quelle stratégie alternative intégrer dans un portefeuille, dans la mesure où beaucoup de stratégies différentes cohabitent. Mentionnons tout d'abord la possibilité d'investir au travers de fond de fonds. Cette multigestion alternative connaît un grand succès car elle évite aux investisseurs d'avoir à se prononcer sur la pertinence d'une stratégie, voire d'un gérant (lorsque le produit est multigérants / multistratégies). Il s'agit ici d'introduire une poche de rendement absolu dans un portefeuille.

Toutefois, cette technique ne permet pas de profiler une référence sur-mesure en fonction, par exemple, des objectifs de l'investisseur. Pour cela, le recours aux stratégies pures s'impose. En effet, elles permettent de faire correspondre les éléments prédominants que l'on retrouve comme caractéristiques principales (d'un gérant à l'autre), à un objectif plus global assigné au portefeuille. Ainsi, il est possible de dresser une typologie des stratégies de gestion en fonction du profil de l'investisseur. Cette démarche s'apparente davantage à une recherche d' α par rapport à des classes d'actifs traditionnelles, différemment représentées dans un portefeuille. Cela permet de procéder à des regroupements²⁹ cohérents avec le profil visé, comme :

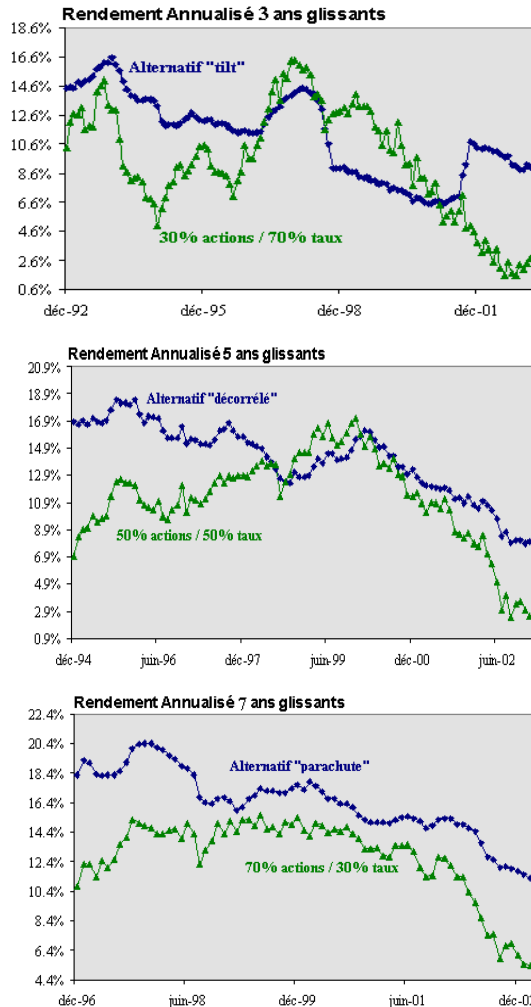
- Défensif (horizon 3 ans, 70% taux / 30% actions) : l'objectif, sur un profil peu volatil, est de générer une sur-performance régulière (« tilt ») ; cela peut s'obtenir en utilisant les stratégies dites d'arbitrage :
 - MBS & Fixed income arbitrage, Relative value
 - Equity market-neutral, Convertible bond arbitrage
- Equilibré (horizon 5 ans, 50% taux / 50% actions) : ici une recherche de « décorrélation » maximale est menée, dans la mesure où il s'agit du profil le plus médian avec une équilibrage des classes d'actifs et les *hedge funds* en jeu sont :
 - Global Macro
 - CTA, Statistical arbitrage
- Dynamique (horizon 7 ans, 30% taux / 70% actions) : dans un profil plus agressif le risque prédomine et il peut être intéressant d'opérer une réduction de volatilité (« parachute ») par une exposition sur des *process* très actifs, tout en restant sur la classe d'actifs prépondérante, à savoir les actions :
 - Long / Short equity, Distressed securities
 - Event driven, Merger arbitrage

La question demeure ensuite de savoir combien d'alternatif intégrer. En reprenant l'étude précédente, on comprend que de manière *ex ante*, chaque stratégie répond à des caractéristiques en termes de couple rendement – risque mais aussi asymétrie – aplatissement. Ainsi, on sait que les stratégies d'arbitrage sont celles qui sont le plus fortement accompagnées d'un coefficient d'asymétrie et aplatissement défavorables à l'investisseur. Dès lors, et compte tenu du profil défensif dans lequel ce groupe de stratégies est intégré, il est préférable d'en inclure une partie plus faible, si la contrainte est par exemple la préservation du capital sur l'horizon indiqué avec comme objectif l'augmentation du ratio d'information (on peut donc maintenant quantifier les apports mais aussi les risques corrigés des spécificités de l'alternatif sur un horizon donné).

Inversement, l'exposition sur de l'alternatif dans le profil le plus risqué peut être plus importante, car malgré un profil également assez défavorable en termes de moments d'ordre supérieur (seules les stratégies incluses dans le profil Equilibré présentent finalement assez peu « d'anomalies »), ce profil accepte davantage de volatilité et l'horizon de gestion est plus long.

²⁹ étude menée, en dollars US, sur les indices *HFR* entre janvier 1990 et février 2003, ainsi que le *S&P 500* et l'indice *Salomon Smith Barney Broad Investment Grade*.

On voit que, sur leur horizon de gestion glissant respectif, chacun de ces groupes de stratégies répond plutôt bien à son objectif assigné sur la période, et que les stratégies d'arbitrage (sur le profil Défensif) sont entachées de queues de distribution se matérialisant par des sauts de performances (notamment 1998 avec la crise de liquidité).



Il est ainsi possible de proposer les pondérations suivantes :

- Défensif : 25% actions + 5% alternatif « arbitrage » + 70% taux
- Equilibré : 43% actions + 7% alternatif « décorrélation » + 50% taux
- Dynamique : 60% actions + 10% alternatif « parachute » + 30% taux

On peut regarder les apports de ces stratégies sur le ratio d'information par exemple, qui va croissant avec l'agressivité dans le profil d'investissement, de par la plus forte pondération en alternatif et du fait que ce sont des stratégies à plus forte valeur-ajoutée.

		Défensif	Equilibré	Dynamique
	Alternatif	5%	7%	10%
	S&P 500	25%	43%	60%
	SSB Broad Investement Grade	70%	50%	30%
Recherche d'alpha (fonds purs)	Excess return	0.18%	0.47%	0.74%
	Traking error	0.74%	0.85%	1.20%
	Ratio d'information	0.24	0.55	0.62
	Corrélation hausses de l'indice	-2	33	11
	Corrélation baisses de l'indice	37	51	68
	Skew	-1.85	0.11	-1.27
	Kurtosis	13.5	2.65	8.23

Une ultime question subsiste avec le choix du *benchmark* à retenir. Là encore, il est possible de scinder notre raisonnement avec une réponse sous forme de « recherche de rendement absolu » (auquel les fonds alternatifs répondent particulièrement bien dans la mesure où il s'agit là de leur objectif de gestion bien souvent retenu). Une autre réponse est la gestion *benchmarkée*.

Dans le premier cas, il n'existe pas de réponse satisfaisante si ce n'est d'affecter un budget de risque absolu aux *hedge funds* et ensuite d'identifier des références de comparaison toujours imparfaites (comme les indices dédiés aux *hedge funds* par exemple). Dans ce cas, on comprend que la multi-gestion se justifie pleinement puisqu'il s'agit d'introduire des *process* de gestion générant du *total return*.

À l'inverse, dans une gestion *benchmarkée*, on peut préconiser l'introduction de stratégies pures, qui sont d'ailleurs sur-performantes pour chacun des profils vis-à-vis de la multigestion (en historique au moins, comme nous le voyons sur le tableau ci-dessous). Il est plutôt recommandé, au regard des composantes spécifiques à la gestion alternative, de l'imputer sur la part d'actions.

		Défensif	Equilibré	Dynamique
Alternatif		5%	7%	10%
S&P 500		25%	43%	60%
SSB Broad Investement Grade		70%	50%	30%
Fonds de fonds	Excess return	0.14%	0.22%	0.35%
	Traking error	0.68%	0.95%	1.37%
	Ratio d'information	0.21	0.23	0.26

Il reste ensuite à trancher la variante gérant unique / multi-gérant. Sur le seul plan quantitatif, l'approche multigérant se justifie au moins sur le profil Dynamique où beaucoup de variantes différentes existent notamment sur les stratégies *Long / Short*. Cependant, pour une majorité d'investisseurs, cela passe par une délégation de gestion, puisqu'il n'est pas aisé de sélectionner soi-même ses fonds alternatifs. Le gérant qui opérera une diversification sur la base d'une ou quelques stratégies entre divers gestionnaires, n'aura en conséquence que ce choix de diversification pour lisser le risque (spécifique aux *hedge funds*) entre différents *process*.

En revanche, un gérant unique, même s'il est moins performant qu'un panel de spécialistes, pourra se passer de cette diversification à des fins de sécurité, s'il maîtrise la totalité de classes d'actifs (action / taux et alternatif) par le biais d'un contrôle des risques global. Il pourra même imprimer, en concertation avec un allocataire, des rebalancements tactiques (toujours délicats en gestion alternative), dans la mesure où ils possèdent le pilotage exhaustif du portefeuille.

V/ Conclusion

Nous avons vu que la gestion alternative se caractérise par une distribution des rendements particulière avec, bien souvent, une forte présence d'asymétrie et d'aplatissement. Malgré toutes les nuances de gestion existantes dans cet univers, il est alors possible de schématiser ces caractéristiques dans une allocation stratégique par un travail sur les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement, dont nous avons vu que leur importance décroît avec l'allongement de l'horizon de gestion.

Cela oblige de fait à envisager leur évolution sur des durées longues, pour savoir en quoi ils modifient une distribution des rendements qui serait générée à partir d'instruments traditionnels. Cela permet ainsi d'inclure toutes les sources de risque de manière synthétique. La finalité est de pouvoir introduire de l'alternatif plus sereinement avec des profils sur-mesure, qui correspondent aux objectifs de rendement et d'aversion pour le risque des investisseurs.

Références bibliographiques

- ALBRECHT, T.** - "The Mean -Variance Framework and Long Horizons", The Financial Analysts Journal, vol. 54, n° 4, July/August 1998, pp. 44-49.
- AMMANN, M. & REICH, C.** - "Value-at-Risk for Non-Linear Financial Instruments – Linear Approximation or Full Monte-Carlo?", WWZ/Department of Finance, Working Paper n°8, December 2001.
- BENASSENI, J.** - "Stabilité de l'Analyse en Composantes Principales par Rapport à une Perturbation des Données", Revue Statistiques Appliquées, 1986, vol.35, n°3, pp. 49-64.
- BLACK, F.** - "Estimating Expected Return", Financial Analysts Journal, Volume 49, number 8, September/October 1993, pp. 36-38.
- J. CVITANIC, J. ; LAZRAC, A. ; MARTELLINI, L. & ZAPATERO, F.** - " Optimal Allocation to Hedge Funds – an Empirical Analysis, Quantitative Finance, 3, 2003, pp. 1-12.
- FEUERVERGER, A. & WONG, A. C.** - "Computation of Value at Risk for Non-Linear Portfolios", Journal of Risk, 2000, vol. 3, n°1, pp.37-55.
- HALL, P.** - "Inverting an Edgeworth Expansion", The Annals of Statistics, vol. 39, 1983, pp. 1264-1273.
- HULL, J. & WHITE, A.** - "Value at Risk when Daily Changes in Market Variables are not Normally Distributed", Journal of Derivatives, 1998, Vol. 5, No. 1, pp. 9-19.
- JASCHKE, S.R.** - "The Cornish-Fisher-Expansion in the Context of Delta-Gamma-Normal Approximations", Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Berlin, 1.41, December 2001.
- KRAUS, A. & LITZENBEGER, R.** - "Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets", Journal of Finance, vol. 31, n°4, September 1976, pp. 1085-1100.
- KRITZMAN, M.** - "About Higher Moments", Financial Analysts Journal, vol. 50, n°5, 1994, pp. 10-17.
- LEE, Y. S. & LIN, T. K.** - "Higher-Order Cornish Fisher Expansion", Applied Statistics, 1992, vol. 41, pp. 233-240.
- LELAND, H.E.** - "Beyond Mean-Variance : Risk and Performance Measures for Portfolios with Non-Symmetric Distributions", Working Paper, Haas School of Business, U.C. Berkley, 1999.
- LI, D.X.** - "Value at Risk Based on the Volatility, Skewness and Kurtosis", 1999, RiskMetrics Group.
- LO, A.W.** - "Risk Management for Hedge Funds : Introduction and Overview, Forthcoming", Financial Analysts Journal, November/December 2001, pp. 16-23.
- LOBOSCO, A. & DIBARTOLOMEO, D.** - "Approximating the Confidence Intervals for Sharpe Style Weights", The Financial Analysts Journal, vol. 53, n° 4, July/August 1997, pp. 80-85.
- LUCAS, A. & KLAASSEN, P.** - "Extreme Returns, Downside Risk, and Optimal Asset Allocation", Journal of Portfolio Management, n°25, Fall 1998, pp.71-79.
- OWEN, A.** - "Empirical Likelihood Ratio Confidence Regions", The Annals of Statistics, 1990a, 18 , pp. 90-120.
- RUBINSTEIN, M.** - "Edgeworth Binomial Tree", Journal of Derivatives, Spring 1998, pp. 20-27.
- SAMUELSON, P.A.** - "The Fundamental Approximation Theorem of Portfolio Analysis in Terms of means, Variances and Higher Moments", Review of Economics Studies, October 1970.
- SORTINO, F. & FORSEY, H.** - "On the Use and Misuse of Downside Risk", Journal of Portfolio Management, vol. 22, n°2, 1996, pp. 35-42.
- ZANGARI, P.** - "A VaR Methodology for Portfolios that include Options", Risk Metrics™ - Monitor, 1st quarter 1996, pp. 12-29.

Annexe 1 : Valeurs typiques d'une distribution log-normale

À chaque période, le *log* du rendement peut être exprimé par un développement de *Taylor*. Nous savons que nous pouvons exprimer le logarithme d'un rendement avec :

$$\ln(1+r) \cong \ln(1+E) + \frac{(r-E)}{(1+E)} - \frac{(r-E)^2}{2.(1+E)^2} + \frac{(r-E)^3}{3.(1+E)^3} - \frac{(r-E)^4}{4.(1+E)^4} \dots$$

Pour que cette série converge, $r - E$ doit être inférieur à $1 + E$.

Nous pouvons alors approximer l'espérance de return capitalisé avec :

$$E \left[\frac{\sum_{t=1}^n \ln(1+r_t)}{n} \right] \cong \ln(1+E) - \frac{\text{var}(r)}{2.(1+E)^2} + E \left[\frac{(r-E)^3}{3.(1+E)^3} \right] - E \left[\frac{(r-E)^4}{4.(1+E)^4} \right]$$

En substituant dans cette équation les définitions conventionnelles pour le *skew* ξ_3 et la *kurtosis* κ_4 on obtient :

$$E \left[\frac{\sum_{t=1}^n \ln(1+r_t)}{n} \right] \cong \ln(1+E) - \frac{\text{var}(r)}{2.(1+E)^2} + \frac{\xi_3(r)V(r)^{\frac{3}{2}}}{3.(1+E)^3} - \frac{\kappa_4(r)V(r)^2}{4.(1+E)^4}$$

On constate ici que l'investisseur aura une préférence pour le *skew* positif et une aversion pour la *kurtosis* positive.

Annexe 2 : Corrélation à horizon n de deux actifs X et Y

$$\text{En posant : } \begin{cases} X = R_X^{o,n} = \exp\left(\mu_X + \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} Z_X\right) - 1 \\ Y = R_Y^{o,n} = \exp\left(\mu_Y + \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} Z_Y\right) - 1 \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} Z_X \sim N(0;1) \\ Z_Y = \rho \cdot Z_X + \sqrt{1-\rho^2} \cdot Z \\ \text{avec } Z \sim N(0;1) \end{cases}$$

et Z_X indépendant de Z , nous avons alors : Corrélation $(Z_X, Z_Y) = \rho$

On peut écrire : Corrélation $(R_X^{o,n}, R_Y^{o,n}) = (X - E_X) \cdot (Y - E_Y)$

$$\Leftrightarrow (X - E_X) \cdot (Y - E_Y) = \left(\exp\left(\mu_X + \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} Z_X\right) - 1 \right) \left(\exp\left(\mu_Y + \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} Z_Y\right) - 1 \right) - E_Y \cdot X - E_X \cdot Y + E_X \cdot E_Y$$

$$\Leftrightarrow (X - E_X) \cdot (Y - E_Y) = \exp\left(\mu_X + \mu_Y + \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} Z_X + \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} Z_Y\right) - (X+1) - (Y+1) + 1 - E_Y \cdot X - E_X \cdot Y + E_X \cdot E_Y$$

En prenant l'espérance, il vient :

$$E[(X - E_X)(Y - E_Y)] = E \left[\exp\left(\mu_X + \mu_Y + \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} Z_X + \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} Z_Y\right) \right] - (1 + E_Y) \cdot E_X - (1 + E_X) \cdot E_Y + E_X \cdot E_Y - 1$$

$$\Leftrightarrow E[(X - E_X)(Y - E_Y)] = E \left[\exp\left(\mu_X + \mu_Y + \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} Z_X + \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} Z_Y\right) \right] - (1 + E_X) \cdot (1 + E_Y)$$

$$\text{Nous posons : } \begin{cases} A = E \left[\exp \left(\mu_X + \mu_Y + \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} Z_X + \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} Z_Y \right) \right] \\ B = (1 + E_X) \cdot (1 + E_Y) \end{cases}$$

$$\text{Or : } \mu_X + \mu_Y + \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} Z_X + \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} Z_Y = \mu_X + \mu_Y + \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} Z_X + \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} (\rho Z_X + \sqrt{1 - \rho^2} Z)$$

Et comme Z_X indépendant de Z , on a :

$$\mu_X + \mu_Y + \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} Z_X + \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} (\rho Z_X + \sqrt{1 - \rho^2} Z) \sim N \left(\mu_X + \mu_Y ; \left(\frac{\sigma_X + \rho \sigma_Y}{\sqrt{n}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_Y^2 (1 - \rho^2)}{n} \right) \right)$$

$$\text{Or : } E(e^X) = \exp \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \text{ quand } X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\text{Donc : } A = \exp(\mu_X + \mu_Y) \cdot \exp \left[\left(\frac{\sigma_X + \rho \sigma_Y}{2n} \right)^2 + \frac{\sigma_Y^2 (1 - \rho^2)}{2n} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Et : } B &= (1 + E_X) \cdot (1 + E_Y) = E \left[\exp \left(\mu_X + \frac{\sigma_X}{n} Z_X \right) \right] \cdot E \left[\exp \left(\mu_Y + \frac{\sigma_Y}{n} Z_Y \right) \right] \\ &= (1 + E_X) \cdot (1 + E_Y) = \exp \left(\mu_X + \mu_Y + \frac{\sigma_X^2}{2n} + \frac{\sigma_Y^2}{2n} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et donc : } A - B &= \exp(\mu_X + \mu_Y) \left\{ \exp \left[\frac{(\sigma_X + \rho \sigma_Y)^2}{2n} + \frac{\sigma_Y^2 (1 - \rho^2)}{2n} \right] - \exp \left(\frac{\sigma_X^2}{2n} + \frac{\sigma_Y^2}{2n} \right) \right\} \\ &= \exp(\mu_X + \mu_Y) \left[- \exp \left(\frac{\sigma_X^2}{2n} + \frac{\sigma_Y^2}{2n} \right) + \exp \left(\frac{\sigma_X^2 + 2 \rho \sigma_X \sigma_Y + \rho^2 \sigma_Y^2 + \sigma_Y^2 - \rho^2 \sigma_Y^2}{2n} \right) \right] \\ &= \exp(\mu_X + \mu_Y) \left[- \exp \left(\frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{2n} \right) + \exp \left(\frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{2n} \right) \cdot \exp \left(\frac{\rho \sigma_X \sigma_Y}{n} \right) \right] \\ &= \exp \left(\mu_X + \mu_Y + \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{2n} \right) \left[\exp \left(\frac{\rho \sigma_X \sigma_Y}{n} \right) - 1 \right] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \text{Covariance}(\mathbf{R}_X^{0,n}, \mathbf{R}_Y^{0,n}) = \exp \left(\mu_X + \mu_Y + \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{2n} \right) \left[\exp \left(\frac{\rho \sigma_X \sigma_Y}{n} \right) - 1 \right]$$

$$\text{De plus : } \sigma(\mathbf{R}_X^{0,n}) \cdot \sigma(\mathbf{R}_Y^{0,n}) = \exp \left(\mu_X + \mu_Y + \frac{\sigma_X^2}{2n} + \frac{\sigma_Y^2}{2n} \right) \sqrt{\exp \left(\frac{\sigma_X^2}{n} \right) - 1} \sqrt{\exp \left(\frac{\sigma_Y^2}{n} \right) - 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{Covariance}(\mathbf{R}_X^{0,n}, \mathbf{R}_Y^{0,n})}{\sigma(\mathbf{R}_X^{0,n}) \cdot \sigma(\mathbf{R}_Y^{0,n})} = \frac{\exp \left(\frac{\rho \sigma_X \sigma_Y}{n} \right) - 1}{\sqrt{\exp \left(\frac{\sigma_X^2}{n} \right) - 1} \sqrt{\exp \left(\frac{\sigma_Y^2}{n} \right) - 1}} = (E)$$

Or nous avons : Développement Limité en 0 de : $\exp(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \dots + 0(X)$

$$\text{Développement Limité en 1 de (E) est : } \frac{1 + \frac{\rho \sigma_X \sigma_Y}{n} - 1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_X^2}{n}} - 1 \sqrt{1 + \frac{\sigma_Y^2}{n}} - 1} = \frac{\rho \sigma_X \sigma_Y}{n} = \rho$$

Ce qui nous donne le résultat suivant : $\text{Corrélation}(\mathbf{R}_X^{0,n}, \mathbf{R}_Y^{0,n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho$