Le CAPM *versus* le modèle de neutralité au risque :

Existence d'une région critique pour la prime de risque du marché

D. PEPIN*

Résumé. La pertinence empirique de tout modèle d'évaluation peut être établie par comparaison avec le simple modèle de neutralité au risque. Selon ce principe, et en utilisant comme critère de comparaison la distance de Hansen et Jagannathan [1997], nous montrons l'existence d'une région critique pour la prime de risque du marché au sein de laquelle le modèle de neutralité au risque est préféré au CAPM. Une application empirique sur données internationales indique que la prime de risque se situerait effectivement dans cette région critique.

Abstract. Empirical relevance of whichever valuation model can be proved by comparing it with the risk neutral model. According to this principe, using the Hansen and Jagannathan distance [1997] as a comparison criterion, we show that a critical area for the market risk premium exists, within which the risk neutral model is preferred to the CAPM. An empirical application on international data points out that the risk premium is actually in this critical area.

I. Introduction

En tant que premier modèle historique d'évaluation des actifs financiers, le *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) de Sharpe [1964], Lintner [1965] et Mossin [1966] est le modèle d'évaluation le plus connu et le plus utilisé. Il mène à une conclusion simple et facilement compréhensible, selon laquelle la rentabilité moyenne d'un actif est d'autant plus importante que son bêta est élevé.

Cette simple proposition a été soumise au cours des trois dernières décennies au crible d'une grande variété de tests économétriques, sans rendre sur la qualité du modèle un jugement unanimement accepté. Aujourd'hui, on s'accorde cependant à reconnaître que le CAPM présente des imperfections notables. Des modèles alternatifs ont en conséquence été proposés, mais des anomalies demeurent, qu'aucun d'entre eux ne parvient à expliquer. A l'instar de Campbell [2000], p.1557, on peut penser « qu'il est irréaliste d'espérer une explication basée sur le risque, pleinement rationnelle, de tous les faits empiriques qui ont été découverts dans les rentabilités des actions ». Il faut accepter que tout modèle d'évaluation

* Centre de Recherche sur l'Intégration Economique et Financière, Université de Poitiers.

puisse présenter certaines imperfections. La question qu'il faut en fait se poser est la suivante : jusqu'à quel point ces imperfections sont-elles admissibles?

Une réponse logique à cette question est basée sur le constat suivant : les modèles d'évaluation sont des modèles qui prennent en compte le risque inhérent aux marchés de capitaux, et qui tiennent compte de son influence sur l'évaluation des actifs. On attend donc logiquement de tout modèle d'évaluation qu'il donne une meilleure explication de la rentabilité des actifs que ne fait le modèle basique de neutralité au risque des investisseurs, qui écarte toute influence du risque sur l'évaluation des actifs. A quoi bon en effet tenir compte du risque si les modèles obtenus de la sorte ne sont pas meilleurs que ceux qui s'en passent ?

Si l'on veut utiliser le critère de comparaison précédent, reste à définir comment un modèle peut être qualifié de meilleur qu'un autre. A ce problème, il n'est pas de réponse unique. Aussi avons-nous porté arbitrairement notre choix sur la mesure d'erreur de spécification développée par Hansen et Jagannathan [1997]. Sur la base de l'erreur de spécification développée par ces auteurs, nous montrons qu'il existe une région critique pour la prime de risque du marché, qui conduit à considérer que le modèle de neutralité au risque est meilleur que le CAPM. Une étude empirique conduite sur données internationales montre que la prime de risque du marché international se situe effectivement dans cette région.

Ce papier est organisé comme suit. Dans une première partie, nous revenons sur les principales critiques et anomalies relatives au CAPM. Dans une deuxième partie, nous présentons rapidement la mesure de l'erreur de spécification développée par Hansen et Jagannathan [1997]. Dans une troisième partie, nous montrons comment la comparaison des erreurs de spécification du CAPM et du modèle de neutralité au risque conduit à dégager l'existence d'une région critique pour la prime de risque du marché. Enfin, dans la quatrième et dernière partie, on procède à une application empirique sur données internationales, afin d'observer si la prime de risque du marché international se situe ou non dans cette région critique.

II. Critiques et anomalies du CAPM

Il y a plus de 35 ans, Sharpe [1964], Lintner [1965] et Mossin [1966] ont montré que, dans un univers peuplé d'investisseurs obéissant aux règles du paradigme « moyenne-variance » de Markowitz [1952], les rentabilités espérées de tous les actifs financiers du marché doivent à l'équilibre obéir à la relation suivante :

$$E\left(\tilde{R}_t / \Im_t\right) = R_{ft}\iota + \beta\left[E\left(\tilde{R}_{mt} / \Im_t\right) - R_{ft}\right] \tag{01}$$

avec :

$$\beta = \frac{Cov(\tilde{R}_t, \tilde{R}_{mt} / \Im_t)}{V(\tilde{R}_{mt} / \Im_t)} \tag{02}$$

Les notations utilisées sont les suivantes : $\tilde{R}_t$ désigne le vecteur des rentabilités aléatoires des N actifs risqués du marché ; $\tilde{R}_{mt}$ désigne la rentabilité (aléatoire) du portefeuille de marché, et R_{ft} celle d'un actif sans risque, contenue dans l'ensemble informationnel $\Im_t$ des investisseurs ; ι désigne un N-vecteur composé de 1.

L'équation (01) décrit une relation de proportion entre les excès de rentabilités des actifs et leurs bêtas définis par (02). Elle quantifie la relation existant la rentabilité de tout actif, et son risque non diversifiable représenté par le bêta, rémunéré au prix de marché $E(\tilde{R}_{mt} / \Im_t) - R_{ft} > 0$.

L'équation (01) a sans doute été une des équations les plus testées de la finance. Les premières applications empiriques du CAPM, dont les classiques Black, Jensen et Scholes [1972] et Fama et MacBeth [1973], donnèrent des résultats plutôt favorables au modèle, les titres à bêtas élevés paraissant avoir des rentabilités plus élevées que les autres.

Après des résultats empiriques au début des années soixante-dix particulièrement favorables au CAPM, la fin de la même décennie vit apparaître les premières critiques sérieuses à l'encontre du modèle, ainsi que la découverte des premières anomalies. La critique la plus connue est sans doute celle de Roll [1977], qui fait remarquer qu'il est impossible de calculer avec exactitude la rentabilité du portefeuille de marché, puisqu'on ne dispose jamais que de *proxies* de celui-ci. A ce titre, le CAPM ne serait donc pas testable, les erreurs de mesure du portefeuille de marché pouvant fausser les résultats. Cependant, Stambaugh [1982] a montré empiriquement que les tests du modèle sont dans les faits moins sensibles au choix du *proxy* ou indice de marché que Roll [1977] ne le prévoyait. Les analyses théoriques de Kandel et Stambaugh [1987] et de Shanken [1987] abondent dans le même sens, montrant que les erreurs de mesure sur le portefeuille de marché n'affectent les résultats des tests du modèle que si la corrélation entre l'indice de marché utilisé et le vrai portefeuille de marché est suffisamment faible.

L'année même où Roll [1977] exposa sa critique, la littérature dite des anomalies vint alimenter l'argumentation des détracteurs du CAPM. Le premier article de cette littérature est celui de Basu [1977], qui montre l'existence de « l'effet PER » : les portefeuilles qui ont de petits PER (*Price-Earnings Ratio*) ont des rentabilités moyennes plus élevées que celles prévues à l'aide du CAPM (c'est-à-dire en fonction seulement de leurs bêtas), et inversement pour les portfeuilles qui ont d'importants PER. La deuxième anomalie connue est celle de Banz [1981] : c'est « l'effet taille », ou le fait que les actions à faibles capitalisations ont des rentabilités moyennes supérieures à celles prédites par le CAPM, et inversement pour les titres à fortes capitalisations. Reinganum [1981a] confirme l'existence de ces deux effets, et montre qu'ils sont reliés. Keim [1983] confirme l'existence de l'effet taille, et montre qu'il est aussi relié à l'existence d'un « effet janvier ».

La critique la plus importante du CAPM vient sans doute des articles de Reinganum [1981b], Lakonishok et Shapiro [1986], Chopra et Ritter [1989], et surtout du virulent article de Fama et French [1992], qui mentionnent l'inexistence d'une quelconque relation entre les bêtas des actifs et les rentabilités moyennes. La fin du bêta est alors clairement décrétée par certains auteurs. Dans la mouvance du « lynchage » du CAPM, des articles aux titres provocants et expéditifs sont publiés, du genre « Bye-Bye to Beta » (Dreman [1992]) et « Is Beta Dead Again ? » (Grinold [1993]).

Mais tandis qu'on décrète ci et là la mort du bêta, des auteurs présentent eux des résultats favorables au CAPM (Black [1993], Chan et Lakonishok [1993], Pettengill, Sundaram et Mathur [1995] et Grundy et Malkiel [1996]). Selon Black [1993], Fama et French [1992] ont d'ailleurs mal interprété leurs propres résultats. Ces derniers nuanceront par la suite leurs propos antérieurs ; il n'est alors plus question de parler de la mort du bêta, mais plus simplement de l'insuffisance de celui-ci comme mesure du risque (Fama et French [1996a], [1996b] et [1998]).

Bien d'autres anomalies ont été découvertes tout au long des années quatre-vingt et quatre-vingt-dix. Citons rapidement « l'effet valeur » (Basu [1983] et Fama et French [1992]), « l'effet surréaction » de Debondt et Thaler [1985], ou encore « l'effet momentum » de Jegadeesh et Titman [1993]. Comprendre l'interaction de toutes ces anomalies et leur trouver des explications rationnelles constitue d'ailleurs aujourd'hui un programme de recherche ouvert (voir par exemple Lee et Swaminathan [2000]).

Enfin, il n'est pas possible de terminer ce petit tour d'horizon relatif aux critiques et anomalies du CAPM sans mentionner l'existence d'un point de vue conservateur vis-à-vis du CAPM, qui rejetterait par référence aux pratiques de *data snooping* toutes ou certaines des anomalies précédentes[1]. Certaines d'entre elles n'auraient été « accidentellement » découvertes que par suite aux manipulations successives (et parfois excessives) des séries de rentabilités, et à ce titre peuvent être jugées comme fallacieuses (*spurious*). Les investisseurs qui auraient voulu profiter de « l'effet taille » l'ont appris à leurs dépens, les actions à petites capitalisations n'ayant pas exhibé les surperformances attendues, durant les années qui ont suivi les premières publications relatives à cette anomalie. Comme le fait remarquer White [2000], p. 1097, « à chaque fois qu'un bon modèle de prévision est obtenu suite à un intensif effort de spécification, il y a toujours le danger que la bonne performance observée soit non pas le résultat de la réelle capacité de prévision, mais plutôt celle de la chance ».

III. Mesurer l'imperfection d'un modèle d'évaluation : la distance de Hansen et Jagannathan [1997]

Nous ne nous situons pas ici dans une logique de test du CAPM, avec à la clef l'acceptation ou non du modèle. Que l'on puisse ou non accepter le bêta comme seule variable explicative de la rentabilité espérée d'un actif n'est pas le problème considéré ici. Au contraire, acceptons le principe que le CAPM ne soit pas un modèle parfait, et supposons que l'on dispose d'une mesure de son imperfection. Notre intention est de comparer cette mesure d'imperfection à celle du modèle basé sur l'hypothèse de neutralité au risque des investisseurs, lequel considère simplement que les actifs sont évalués selon la règle élémentaire :

$$E(\widetilde{R}_t / \Im_t) = R_{ft}\iota \qquad (03)$$

Selon ce modèle, la rentabilité espérée de tout actif est égale à l'équilibre à la rentabilité de l'actif sans risque[1]. Les rentabilités moyennes de tous les actifs sont alors égales. On comprend aisément pourquoi il en va ainsi : si tel n'était pas le cas, les investisseurs étant neutres au risque, ils délaisseraient les actifs à rentabilité moyenne moindre pour ne préférer que l'actif à la plus forte rentabilité. Le seul équilibre possible est alors nécessairement décrit par (03).

Insistons sur le fait que notre intention n'est pas de tester l'équation (01) contre l'équation (03). On admet au contraire que les deux sont imparfaitement vérifiées, et on recherche simplement la condition sous laquelle (01) est plus imparfaite que (03). Pour cela,

[1] Voir Lo et MacKinlay [1990] et White [2000] pour une discussion du *data snooping*.

on utilise comme mesure d'imperfection la distance de Hansen et Jagannathan [1997], dont on rappelle rapidement le principe.

Le point de départ de l'analyse réside dans la caractérisation de la loi du prix unique sur les marchés de capitaux. Lorsque ces derniers sont sans frottements, on sait depuis les travaux de Ross [1978], Harrison et Kreps [1979] et Kreps [1981], que la loi du prix unique se caractérise par l'existence d'une variable aléatoire $\tilde{m}_t$ telle que :

$$E(\tilde{m}_t\tilde{R}_t / \Im_t) = \iota \tag{04}$$

La variable $\tilde{m}_t$ est connue sous le nom de noyau d'évaluation ou de facteur d'actualisation stochastique. Tout modèle d'évaluation construit dans un cadre rationnel et en supposant l'absence de frottements est compatible avec l'équation (04). De façon générale, le facteur d'actualisation stochastique n'est pas défini de façon unique (hormis dans le cas de marchés complets). Notons $\mathcal{M}$ l'ensemble des facteurs d'actualisation stochastiques :

$$\mathcal{M} = \left\{\tilde{m}_t : E(\tilde{m}_t\tilde{R}_t / \Im_t) = \iota\right\} \tag{05}$$

On supposera par la suite que $\mathcal{M} \neq \varnothing$. Dans les faits, les éléments de $\mathcal{M}$ sont inconnus, et on ne dispose que de facteurs d'actualisation candidats qui vérifient imparfaitement l'équation (04). Notons $\tilde{y}_t$ un tel facteur d'actualisation candidat, tel que $\tilde{y}_t \notin \mathcal{M}$. Conformément à Hansen, Heaton et Luttmer [1995] et Hansen et Jagannathan [1997], utilisons comme mesure d'imperfection du modèle d'évaluation associé à $\tilde{y}_t$ la distance $D^2_{\tilde{y}_t}$ (au sens des moindres carrés) entre $\tilde{y}_t$ et $\mathcal{M}$:

$$D^2_{\tilde{y}_t} = \min_{\tilde{m}_t \in \mathcal{M}} E\left[(\tilde{y}_t - \tilde{m}_t)^2 / \Im_t\right] \tag{06}$$

Hansen et Jagannathan [1997] ont résolu le problème de minimisation (06), et montré que la distance $D^2_{\tilde{y}_t}$ vaut :

$$D^2_{\tilde{y}_t} = \left[E\left(\tilde{y}_t\tilde{R}_t / \Im_t\right) - \iota\right]'\left[E\left(\tilde{R}_t\tilde{R}_t' / \Im_t\right)\right]^{-1}\left[E\left(\tilde{y}_t\tilde{R}_t / \Im_t\right) - \iota\right] \tag{07}$$

Hansen et Jagannathan [1997] ont par ailleurs montré que $\sqrt{D^2_{\tilde{y}_t}}$ est égal à l'erreur de *pricing* $E(\tilde{m}_t\tilde{R}_{pt} / \Im_t) - 1$ maximale que l'on peut commettre en évaluant un portefeuille de rentabilité $\tilde{R}_{pt}$, formé à partir des N actifs de base, et normé de sorte que $E(\tilde{R}^2_{pt} / \Im_t) = 1$.

[1] L'équation (03) peut s'obtenir comme cas particulier du modèle de Lucas [1978], en posant que les individus ont une fonction d'utilité linéaire.

Pour tout facteur d'actualisation candidat, on peut donc calculer grâce à (07) la distance de Hansen et Jagannathan [1997] qui lui est associée. Deux facteurs candidats quelconques peuvent alors être comparés sur la base de leurs distances de Hansen et Jagannathan [1997].

IV. L'existence d'une région critique pour la prime de risque du marché

Considérons les deux facteurs d'actualisation candidats $\tilde{y}_{1t}$ et $\tilde{y}_{2t}$:

$$\tilde{y}_{1t} = \frac{1}{R_{ft}} \tag{08}$$

$$\tilde{y}_{2t} = \frac{1}{R_{ft}} - \frac{E\left(\tilde{R}_{mt} / \Im_t\right) - R_{ft}}{R_{ft} V\left(\tilde{R}_{mt} / \Im_t\right)}\left[\tilde{R}_{mt} - E\left(\tilde{R}_{mt} / \Im_t\right)\right] \tag{09}$$

Si l'on suppose que $\tilde{y}_{1t} \in \mathcal{M}$, alors on a $E\left(\tilde{y}_{1t}\tilde{R}_t / \Im_t\right) = \iota$. Si on incorpore (08) dans cette équation, on retrouve le modèle de neutralité au risque (03). De même, si l'on suppose que $\tilde{y}_{2t} \in \mathcal{M}$, alors on retrouve l'équation (01) du CAPM en incorporant (09) dans $E\left(\tilde{y}_{2t}\tilde{R}_t / \Im_t\right) = \iota$. Les facteurs d'actualisation donnés par (08) et (09) sont donc les facteurs d'actualisation stochastiques associés respectivement au modèle de neutralité au risque et au CAPM.

Faisons l'hypothèse que $\tilde{y}_{1t} \notin \mathcal{M}$ et $\tilde{y}_{2t} \notin \mathcal{M}$. Aucun des deux modèles précédents ne permet alors de décrire parfaitement les rentabilités espérées des actifs. Sous quelle condition le CAPM est-il moins bon que le modèle de neutralité au risque (au sens de Hansen et Jagannathan [1997]) ?

Par définition, la distance de Hansen et Jagannathan [1997] associée au facteur $k \in \{1\ ,\ 2\}$ vaut :

$$D^2_{\tilde{y}_{kt}} = \left[E\left(\tilde{y}_{kt}\tilde{R}_t / \Im_t\right) - \iota\right]'\left[E\left(\tilde{R}_t\tilde{R}_t' / \Im_t\right)\right]^{-1}\left[E\left(\tilde{y}_{kt}\tilde{R}_t / \Im_t\right) - \iota\right] \tag{10}$$

Pour répondre à la question ci-dessus, le CAPM n'est pas meilleur que le modèle de neutralité au risque au sens de Hansen et Jagannathan [1997] lorsque $D^2_{\tilde{y}_{2t}} \geq D^2_{\tilde{y}_{1t}}$. Dans ce cas, l'erreur de *pricing* maximale qu'il est possible de commettre en utilisant le CAPM est supérieure à celle commise en utilisant le modèle de neutralité au risque. Formons la différence de $D^2_{\tilde{y}_{2t}}$ et $D^2_{\tilde{y}_{1t}}$:

$$D^2_{\tilde{y}_{2t}} - D^2_{\tilde{y}_{1t}} = \left[E\left(\tilde{y}_{2t}\tilde{R}_t / \Im_t\right) - \iota\right]' \left[E\left(\tilde{R}_t\tilde{R}_t' / \Im_t\right)\right]^{-1} \left[E\left(\tilde{y}_{2t}\tilde{R}_t / \Im_t\right) - \iota\right]$$
$$- \left[E\left(\tilde{y}_{1t}\tilde{R}_t / \Im_t\right) - \iota\right]' \left[E\left(\tilde{R}_t\tilde{R}_t' / \Im_t\right)\right]^{-1} \left[E\left(\tilde{y}_{1t}\tilde{R}_t / \Im_t\right) - \iota\right] \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow D^2_{\tilde{y}_{2t}} - D^2_{\tilde{y}_{1t}} = \left[E\left((\tilde{y}_{2t} - \tilde{y}_{1t})\tilde{R}_t / \Im_t\right)\right]' \left[E\left(\tilde{R}_t\tilde{R}_t'\right)\right]^{-1} \left[E\left((\tilde{y}_{2t} - \tilde{y}_{1t})\tilde{R}_t / \Im_t\right)\right]$$
$$+ 2\left[E\left((\tilde{y}_{2t} - \tilde{y}_{1t})\tilde{R}_t / \Im_t\right)\right]' \left[E\left(\tilde{R}_t\tilde{R}_t'\right)\right]^{-1} \left[E\left(\tilde{y}_{1t}\tilde{R}_t / \Im_t\right) - \iota\right] \tag{12}$$

Le passage de (11) à (12) s'obtient en notant que pour une matrice carré A symétrique, on a l'égalité : $y'Ay - x'Ax = (y-x)'A(y-x) + 2(y-x)'Ax$. En tenant compte de (08) et (09), l'équation (12) peut être réécrite :

$$D^2_{\tilde{y}_{2t}} - D^2_{\tilde{y}_{1t}} = \left[\frac{E\left(\tilde{R}_{mt} / \Im_t\right) - R_{ft}}{R_{ft}}\right]^2 \beta'\left[E\left(\tilde{R}_t\tilde{R}_t' / \Im_t\right)\right]^{-1}\beta$$
$$-2\left[\frac{E\left(\tilde{R}_{mt} / \Im_t\right) - R_{ft}}{R_{ft}}\right]\beta'\left[E\left(\tilde{R}_t\tilde{R}_t' / \Im_t\right)\right]^{-1} E\left(\frac{1}{R_{ft}}\tilde{R}_t - \iota / \Im_t\right) \tag{13}$$

Remarquons que la différence des deux distances s'annule dans le cas trivial $E\left(\tilde{R}_{mt} / \Im_t\right) - R_{ft} = 0$. Ce résultat est obtenu du fait que dans ce cas, les deux facteurs d'actualisation candidats sont identiques : $E\left(\tilde{R}_{mt} / \Im_t\right) - R_{ft} = 0 \Rightarrow \tilde{y}_{2t} = \tilde{y}_{1t}$. Nous supposons par la suite que $E\left(\tilde{R}_{mt} / \Im_t\right) - R_{ft} > 0$.

La forme quadratique $\beta'\left[E\left(\tilde{R}_t\tilde{R}_t' / \Im_t\right)^{-1}\right]\beta$ est définie positive. On suppose de surcroît que les bêtas des actifs ne peuvent être tous nuls (puisque dans le cas contraire le CAPM se réduirait au modèle de neutralité au risque). On a alors $\beta'\left[E\left(\tilde{R}_t\tilde{R}_t' / \Im_t\right)^{-1}\right]\beta > 0$, et l'inverse de cette quantité est donc toujours définie. De l'équation (13), on tire alors l'équivalence des deux inégalités suivantes :

$$D^2_{\tilde{y}_{2t}} - D^2_{\tilde{y}_{1t}} \geq 0 \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow E\left(\tilde{R}_{mt} / \Im_t\right) - R_{ft} \geq 2R_{ft} \frac{\beta'\left[E\left(\tilde{R}_t\tilde{R}_t' / \Im_t\right)\right]^{-1} E\left(\frac{1}{R_{ft}}\tilde{R}_t - \iota / \Im_t\right)}{\beta'\left[E\left(\tilde{R}_t\tilde{R}_t' / \Im_t\right)\right]^{-1}\beta} \tag{15}$$

L'inégalité (15) définit une région critique pour la prime de risque du marché. Si cette prime vérifie cette inégalité, alors le facteur d'actualisation associé au CAPM n'est pas meilleur que celui associé au modèle de neutralité au risque, le premier conduisant à une erreur de *pricing* maximale plus grande. Cela ne signifie pas que l'on doive accepter que les rentabilités des actifs s'établissent à l'équilibre du marché des capitaux comme si les investisseurs étaient effectivement neutres au risque. Cela signifie seulement que tenir compte du risque à travers le bêta ne conduit pas à une explication de ces rentabilités meilleure que celle obtenue à l'aide du seul taux sans risque.

IV. Application

La prime de risque du marché se situe-t-elle ou non dans la zone critique définie par (15) ? La réponse dépend du marché et de la période retenus, du sous-ensemble des actifs utilisé, de l'ensemble informationnel prêté aux investisseurs, ainsi que de la façon dont sont appréhendés les différents moments conditionnels apparaissant dans (15).

Notre application empirique porte sur le marché international du capital, pour la période allant de janvier 1995 à décembre 1999 (en données mensuelles). Notre échantillon se compose des rentabilités mensuelles (dividendes compris), calculées à partir des indices MSCI (*Morgan Stanley Capital International*) de cinq marchés nationaux (l'Allemagne, les Etats-Unis, la France, la Grande-Bretagne et le Japon), et du portefeuille de marché international. On se place dans le cadre empirique le plus simple possible, c'est-à-dire celui supposant $\Im_t \equiv \varnothing, R_{ft} = R_f \ \forall t$. Sous ces conditions, les moments conditionnels apparaissant dans (15) se réduisent aux moments inconditionnels, lesquels sont estimés par leurs équivalents empiriques.

On note $\overline{R}_m$ la rentabilité moyenne (la variance estimée) du portefeuille de marché international sur cette période, $\overline{R}$ le vecteur des rentabilités moyennes des cinq portefeuilles de marchés nationaux, $\hat{\Phi} = \frac{1}{T}\sum_t R_t R_t'$ la matrice estimée des moments d'ordre deux, et $\hat{\beta}$ l'estimateur des Moindres Carrés Ordinaires de β dans le modèle de régression multivariée $\widetilde{R}_t = \alpha + \beta\, \widetilde{R}_{mt} + \widetilde{\varepsilon}_t$.

La région critique estimée pour la prime de risque de marché est alors donnée par :

$$\overline{R}_m - R_f \geq 2R_f \frac{\hat{\beta}'\hat{\Phi}^{-1}\left[\frac{1}{R_f}\overline{R} - \iota\right]}{\hat{\beta}'\hat{\Phi}^{-1}\hat{\beta}} \qquad (16)$$

Pour ce qui est de la rentabilité de l'actif sans risque, nous avons retenu la moyenne des taux sur les dépôts à Londres (mensuels) en Eurodollars sur la période considérée, ce qui correspond à une rentabilité $R_f \approx 1{,}00444$ en base mensuelle, ou à un taux d'intérêt en base annuelle de 5,46%.

Après calculs, on observe que la rentabilité du portefeuille marché international vaut $\overline{R}_m \approx 1{,}0161$ en base mensuelle. Les données relatives aux cinq marchés nationaux (rentabilités moyennes et bêtas) sont présentées dans le tableau 1 ci-dessous :

Tableau 1. rentabilités moyennes, variances et bêtas

	Rentabilités moyennes	bêtas
Allemagne	1,0174	0,9947
Etats-Unis	1,0227	0,9738
France	1,0189	0,9717
Grande-Bretagne	1,0159	0,6436
Japon	1,0036	1,1452

Les données présentées dans ce tableau semblent indiquer que le bêta ne permet pas d'expliquer parfaitement les rentabilités moyennes des différents marchés, attestant de l'imperfection du CAPM. Le marché japonais possède ainsi le bêta le plus important alors qu'il présente la rentabilité moyenne la plus faible. Ces données sont-elles plus favorables au modèle de neutralité au risque ?

Pour répondre à cette question, nous estimons la région critique de la prime de risque de marché. Après calculs des deux membres de (16), on observe que :

$$\overline{R}_m - R_f \approx 0{,}0117 > 2R_f \frac{\hat{\beta}'\hat{\Phi}^{-1}\left[\frac{1}{R_f}\overline{R} - \iota\right]}{\hat{\beta}'\hat{\Phi}^{-1}\hat{\beta}} \approx 0{,}0002 \qquad (17)$$

La prime de risque de marché se situe effectivement dans la région critique estimée. La prime de risque estimée est assez importante, alors que le membre de droite de cette inégalité apparaît quasi-nul.

Selon ces résultats, le CAPM (inconditionnel) appliqué sur les données de ces 5 marchés, et sur la période considérée, donne des résultats qui sont moins bons que ceux du modèle de neutralité au risque, du moins en utilisant la mesure d'erreur de spécification de Hansen et Jagannathan [1997].

V. Conclusion

La moindre des choses que l'on puisse attendre d'un modèle qui tient compte de l'impact du risque sur la rentabilité des actifs, est qu'il conduise à une prévision meilleure de ces rentabilités que ne le fait un modèle qui au contraire ignore l'influence du risque sur l'évaluation des actifs. Sur la base d'un tel raisonnement, nous avons montré qu'il existe une région critique pour la prime de risque du marché qui, lorsqu'elle est atteinte, conduit à préférer le modèle de neutralité au risque au CAPM. Il ne s'agit pas à proprement parler d'un nouveau test du CAPM, puisque de toute façon nous nous situons *stricto sensus* en dehors de toute perspective de test du modèle. Lorsque cette région critique est atteinte, cela signifie que l'erreur de *pricing* maximale commise en utilisant le CAPM est plus grande que celle commise en utilisant le modèle de neutralité au risque. Au sens de Hansen et Jagannathan [1997], nous sommes alors conduits dans cette situation à dire du second modèle qu'il est meilleur que le premier.

Une application empirique conduite sur données internationales a montré que la prime de risque de marché semble se situer effectivement dans cette région critique, lorsque l'on retient comme actifs de base les marchés allemands, américains, français, britanniques et japonais. Le simple modèle de neutralité au risque semble donc donner, pour ces marchés et sur la période retenue, de meilleurs résultats que le CAPM. La pertinence du bêta comme variable explicative de la rentabilité moyenne d'un titre serait donc assez faible, puisque l'omission du bêta ne conduit pas à une erreur de *pricing* maximale plus grande.

Références

BANZ R.W. [1981], « The Relationship Between Return and Market Value of Common Stocks », *Journal of Financial Economics*, 9, 3-18.

BASU S. [1977], « Investment Performance of Common Stocks in Relation to their Price-Earning Ratios: A Test of the Efficient Market Hypothesis », *Journal of Finance*, 32, 663-682.

BASU S. [1983], « The Relationship between Earnings Yield, Market Value, and Return for NYSE Common Stocks : Further Evidence », *Journal of Financial Economics*, 12, 129-156.

BLACK F., JENSEN M.C. et SCHOLES M. (1972), « The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests », in M.C. JENSEN (éd.), *Studies in the Theory of Capital Markets*, Praeger Publishers, New York.

BLACK F. [1993], « Beta and Return », *Journal of Portfolio Management*, 20, 8-18.

CAMPBELL J.Y. [2000], « Asset Pricing at the Millenium », *Journal of Finance*, 55, 1515-1567.

CHAN L.K.C. et LAKONISHOK J. [1993], « Are the Reports of Beta's Death Premature », *Journal of Portfolio Management*, 19,51-62.

CHOPRA N. et RITTER J.R. [1989], « Portfolio Rebalancing and the Turn-of-the-Year Effect », *Journal of Finance*, 44, 149-166.

DE BONDT W.F.M. et THALER R. [1985], « Does the Market Overreact ? », *Journal of Finance*, 40, 793-805.

DREMAN D. [1992], « Bye-Bye to Beta », *Forbes*, 30, 148.

FAMA E.F. et FRENCH K.R. [1992], « The Cross-Section of Expected Stock Returns », Journal of Finance, 47, 427-465.

FAMA E.F. et MACBETH J.D. [1973], « Risk, Return, and Equilibrium : Empirical Tests », *Journal of Political Economy*, 81, 607-636.

FAMA E.F. et FRENCH K.R. [1996a], « The CAPM is Wanted, Dead or Alive », *Journal of Finance*, 51, 1947-1958.

FAMA E.F. et FRENCH K.R. [1996b], « Multifactor Explanations af Asset Pricing Anomalies », *Journal of Finance*, 51, 55-84.

FAMA E.F. et FRENCH K.R. [1998], « Value versus Growth: The International Evidence », *Journal of Finance*, 53, 1975-1999.

GRINOLD R.C. [1993], « Is Beta Dead Again ? », *Financial Analysts Journal*, 49, 28-34.

GRUNDY K. et MALKIEL B.G. [1996], « Reports of Beta's Death Have Been Greatly Exaggerated », *Journal of Portfolio Management*, 22, 36-44.

HANSEN L.P., HEATON J. et LUTTMER E.G.J. [1995], « Econometric Evaluation of Asset Pricing Models », *Review of Financial Studies*, 8, 237-274.

HANSEN L.P. et JAGANNATHAN R. [1997], « Assessing Specification Errors in Stochastic Discount Factor Models », *Journal of Finance*, 52, 557-590.

HARRISON J.M. et KREPS D. [1979], « Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets », *Journal of Economic Theory*, 20, 381-408.

JEGADEESH N. et TITMAN S. [1993], « Returns to Buying Winners and Selling Losers : Implications for Stock Market Efficiency », *Journal of Finance*, 48, 65-91.

KEIM D.B. [1983], « Size-related Anomalies and Stock Returns Seasonality: Further Empirical Evidence », *Journal of Financial Economics*, 12, 13-32.

KREPS D.M. [1981], « Arbitrage and Equilibrium in Economies with Infinitely Many Commodities », *Journal of mathematical Economics* », 8, 15-35.

LAKONISHOK J. et SHAPIRO A.C. [1986], « Systematic Risk, Total Risk and Size as Determinants of Stock Market Returns », *Journal of Banking and Finance*, 10, 115-132.
LEE C.M.C. et SWAMINATHAN B. [2000], « Price Momentum and Trading Volume », *Journal of Finance*, 55, 2017-2069.
LINTNER J. [1965], « The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets », *Review of Economics and Statistics*, 47, 13-37.
LO A.W. et MACKINLAY A.C. [1990], « Data-Snooping Biases in Tests of Financial Assert Pricing Models », *Review of Financial Studies*, 3, 431-467.
LUCAS R.E. [1978], « Asset Prices in an Exchange Economy », *Econometrica*, 46, 1429-1145.
MARKOWITZ H. [1952], « Portfolio Selection », *Journal of Finance*, 7, 77-91.
MOSSIN J. [1966], « Equilibrium in a Capital Asset Market », *Econometrica*, 34, 768-783.
PETTENGILL G.N., SUNDARAM S. et MATUR I. [1995], « The Conditional Relation between Beta and Returns », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 30, 101-116.
REINGANUM M.R. [1981a], « Misspecification of Capital Asset Pricing: Empirical Anomalies Based on Earnings' Yields and Market Values », *Journal of Financial Economics*, 9, 19-46.
REINGANUM M.R. [1981b], « A New Empirical Perspective on the CAPM », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 16, 439-462.
ROLL R. [1977], « A critique of the Asset Pricing theory's tests: Part I: On Past and Potential Testability of the Theory », *Journal of Financial Economics*, 4, 129-176.
ROSS S.A. [1978], « A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams », *Journal of Business*, 51, 453-475.
SHANKEN J. [1987], « Multivariate Proxies and Asset Pricing Relations: Living with the Roll Critique », *Journal of Financial Economics*, 18, 91-110.
SHARPE W.F. [1964], « Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk », *Journal of Finance*, 19, 425-442.
STAMBAUGH R.F. [1982], « On the Exclusion of Assets from the Two-Parameter Model: A Sensitivity Analysis », *Journal of Financial Economics*, 10, 237-268.
WHITE H. [2000], « A Reality Check for Data Snooping », *Econometrica*, 68, 1097-1126.