Université d'Orléans - Master Econométrie et Statistique Appliquée
Econométrie des Variables Qualitatives

Christophe HURLIN

Correction Examen Mai 2006. C. Hurlin

Question 1 : Le modèle de la variable latente y_i^* (équation **??**) n'inclut pas de constante car dans le cas contraire se poserait un problème d'identification des seuils c_1, c_2 et c_3.

Question 2 : Soit

$$\Pr[y_i = 1] = \Pr[\varepsilon_i < c_1 - x_i\beta] \tag{1}$$

Or on sait $E\left(\varepsilon_i^2\right) = \sigma_\varepsilon^2$, dès lors il vient :

$$E\left[\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_\varepsilon}\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^2\right] = \frac{\pi^2}{3} \tag{2}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\Pr[y_i = 1] &= \Pr\left[\frac{\varepsilon_i}{\sigma_\varepsilon}\frac{\pi}{\sqrt{3}} < \frac{c_1}{\sigma_\varepsilon}\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{x_i\beta}{\sigma_\varepsilon}\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right] \\ &= \Lambda\left(\frac{c_1}{\sigma_\varepsilon}\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{x_i\beta}{\sigma_\varepsilon}\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \qquad (3)\end{aligned}$$

De la même façon on a :

$$\begin{aligned}\Pr[y_i = 3] &= \Pr[c_2 - x_i\beta \leq \varepsilon_i < c_3 - x_i\beta] \qquad (4) \\ &= \Lambda\left(\frac{c_3}{\sigma_\varepsilon}\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{x_i\beta}{\sigma_\varepsilon}\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) - \Lambda\left(\frac{c_2}{\sigma_\varepsilon}\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{x_i\beta}{\sigma_\varepsilon}\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \qquad (5)\end{aligned}$$

Question 3 : (i)on sait que dans un modèle mutlinomial ordonné, **la valeur et le signe** des coefficients estimés ne renseigne pas sur le lien entre la variable explicative et les probabilité que l'endogène prenne certaines modalités (sauf les modalités "extrêmes"). (ii) On sait que :

$$\Pr[y_i = 1] = \Lambda\left(\frac{c_1}{\sigma_\varepsilon}\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{x_i\beta}{\sigma_\varepsilon}\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \tag{6}$$

avec

$$x_i\beta = \beta_1 ass_i + \beta_2 equ_i + \beta_3 growth_i + \beta_4 loa_i + \beta_5 metro_i + \beta_6 prl_i \tag{7}$$

Donc toutes choses égales par ailleurs, si $\beta_1 > 0$, une hausse de la variable ass conduit à une diminution de la quantité $\frac{c_1}{\sigma_\varepsilon}\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{x_i\beta}{\sigma_\varepsilon}\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ et donc à une baisse de la probabilité que la banque obtienne une note "*performance remarquable*".

Question 4 : Pour la banque 2, on a :

$$\Pr[y_i = 1] = \Lambda\left(\widehat{c}_1 - x_i\widehat{\beta}\right)$$

où $\widehat{\beta}$ est un estimateur convergent de $\frac{\beta}{\sigma_\varepsilon}\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ et $\widehat{c}_1$ est un estimateur convergent de $\frac{c_1}{\sigma_\varepsilon}\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. Ici, il vient :

$$\begin{aligned}\Pr[y_1 = 1] &= \Lambda\left(\widehat{c}_1 - x_1\widehat{\beta}\right) = \frac{1}{1+\exp\left[-\widehat{c}_1 + x_1\widehat{\beta}\right]} \\ &= \frac{1}{1+\exp[7.018335 + -6,27]} \simeq 0,321655475\end{aligned}$$

Ainsi on obtient :

$$\Pr[y_1 = 1] \simeq 0,32 \quad (8)$$

$$\Pr[y_1 = 2] \simeq 0.35 \quad (9)$$

$$\Pr[y_1 = 3] \simeq 0.26 \quad (10)$$

$$\Pr[y_1 = 4] \simeq 0.07 \quad (11)$$

Pour la banque 2, on obtient :

$$\Pr[y_2 = 1] \simeq 0.27 \quad (12)$$

$$\Pr[y_2 = 2] \simeq 0.35 \quad (13)$$

$$\Pr[y_3 = 3] \simeq 0.29 \quad (14)$$

$$\Pr[y_4 = 4] \simeq 0.09 \quad (15)$$

Question 5 : On prevoit la modalité pour laquelle la probabilité estimée est la plus forte :

$$\widehat{y}_1 = 2 \qquad \widehat{y}_1 = 2 \quad (16)$$

Dans ces deux cas précis, les deux prévisions sont fausses puisque $y_1 = 1$ et $y_2 = 3$.

Question 6 : On sait que :

$$\Pr[y_i = 1] = \Lambda\left(\widehat{c}_1 - x_i\widehat{\beta}\right) = \frac{1}{1+\exp\left(x_i\widehat{\beta} - \widehat{c}_1\right)}$$

$$\Pr[y_i = 2] = \Lambda\left(\widehat{c}_2 - x_i\widehat{\beta}\right) - \Lambda\left(\widehat{c}_1 - x_i\widehat{\beta}\right)$$

$$\Pr[y_i = 3] = \Lambda\left(\widehat{c}_3 - x_i\widehat{\beta}\right) - \Lambda\left(\widehat{c}_2 - x_i\widehat{\beta}\right)$$

$$\Pr[y_i = 4] = 1 - \Lambda\left(\widehat{c}_3 - x_i\widehat{\beta}\right)$$

Donc il vient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pr[y_1 = 1]}{\partial ass_i} &= -\frac{\exp\left(x_1\widehat{\beta}\right)}{\left[1+\exp\left(x_1\widehat{\beta} - \widehat{c}_1\right)\right]^2}\widehat{\beta}_1 \\ &= 0,000195352 * 0.463140 \\ &= 0,90475 > 0\end{aligned}$$

On retrouve ici le résultat de la question 3.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pr[y_1=2]}{\partial ass_i} &= \left\{ \frac{\exp\left(x_1\widehat{\beta}\right)}{\left[1+\exp\left(x_1\widehat{\beta}-\widehat{c}_1\right)\right]^2} - \frac{\exp\left(x_1\widehat{\beta}\right)}{\left[1+\exp\left(x_1\widehat{\beta}-\widehat{c}_2\right)\right]^2} \right\} \widehat{\beta}_1 \\
&= (0.000195352 - 0.000868592) * (-0.463140) \\
&= 0,000311804 >
\end{aligned}$$

Une hausse de l'actif conduit à une augmentation de la probabilité d'obtenir la note "performance satisfaisante".

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pr[y_1=3]}{\partial ass_i} &= \left\{ \frac{\exp\left(x_1\widehat{\beta}\right)}{\left[1+\exp\left(x_1\widehat{\beta}-\widehat{c}_2\right)\right]^2} - \frac{\exp\left(x_1\widehat{\beta}\right)}{\left[1+\exp\left(x_1\widehat{\beta}-\widehat{c}_3\right)\right]^2} \right\} \widehat{\beta}_1 \\
&= (0.000868592 - 0.001635074) * (-0.463140) \\
&= 3.5499 \times 10^{-4} > 0
\end{aligned}$$

Une hausse de l'actif conduit à une augmentation de la probabilité d'obtenir la note "performance à améliorer", par contre cela induit une baisse de la probabilité d'obtenir une note "performance déplorable" .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pr[y_1=4]}{\partial ass_i} &= \frac{\exp\left(x_1\widehat{\beta}\right)}{\left[1+\exp\left(x_1\widehat{\beta}-\widehat{c}_3\right)\right]^2} \widehat{\beta}_1 \\
&= 0.001635074 * (-0.463140) \\
&= -7.5727 \times 10^{-4} < 0
\end{aligned}$$

Exercice 2 : Modèles Tobit

Question 1 : On sait que la prévision de la variable latente dans le modèle tobit s'écrit :

$$E\left(c_i^*/x_i\right) = x_i\Upsilon$$

Dès lors, en l'absence d'action marketing ($m_i = 0$) on a :

$$x_i\widehat{\Upsilon} = 0.492956823 + 1.600256402 * R - 1.198180892 * P + 0.7886033013 * M + 2.771210716$$

La prévision est alors égale à :

$$E\left(c_i^*/x_i, m_i = 0\right) = -0.6761 \tag{17}$$

Etant donné que nous évaluons ici la consommation potentielle, il est possible d'obtenir une quantité négative. Dans le cas d'une action marketing, la prévision vaut :

$$E\left(c_i^*/x_i, m_i = 1\right) = 0.1125 \tag{18}$$

Ainsi, toutes choses égales par ailleurs la variation de la consommation potentielle imputable à l'action marketing est égale à:

$$E\left(c_i^*/x_i, m_i = 1\right) - E\left(c_i^*/x_i, m_i = 0\right) = 0.7886 \tag{19}$$

Question 2 *:* On sait que la prévision de la variable dépendante s'écrit dans ce cas :

$$E\left(c_i/x_i\right)=\Phi\left(\frac{x_i\widehat{\Upsilon}}{\widehat{\sigma}_\varepsilon}\right)x_i\widehat{\Upsilon}+\widehat{\sigma}_\varepsilon\phi\left(\frac{x_i\widehat{\Upsilon}}{\widehat{\sigma}_\varepsilon}\right)$$

Ainsi, en l'absence d'action marketing ($m_i=0$) on a :

$$E\left(c_i/x_i,m_i=0\right)=\Phi\left(\frac{-0.6761}{\widehat{\sigma}_\varepsilon}\right)(-0.6761)+\widehat{\sigma}_\varepsilon\phi\left(\frac{-0.6761}{\widehat{\sigma}_\varepsilon}\right)=0.0991$$

Avec action marketing ($m_i=1$) on a :

$$E\left(c_i/x_i,m_i=1\right)=\Phi\left(\frac{0.1125}{\widehat{\sigma}_\varepsilon}\right)0.1125+\widehat{\sigma}_\varepsilon\phi\left(\frac{0.1125}{\widehat{\sigma}_\varepsilon}\right)=0.2649$$

Ainsi, l'accroissement de consommation effective est de 0.1658.

Question 3 *:* Selon la décomposition de McDonald et Moffit (1980), la variation du revenu r_i a deux effets sur la prévision de la variable dépendante c_i :

$$\frac{\partial E\left(c_i/\,x_i\right)}{\partial r_i}=Prob\left(c_i>0\right)\frac{\partial E\left(c_i/\,x_i,c_{i>0}\right)}{\partial r_i}+E\left(c_i/\,x_i,c_{i>0}\right)\frac{\partial Prob\left(c_i>0\right)}{\partial r_i}$$

D'une part, la variation de r_i modifie l'espérance conditionnelle de c_i dans la partie positive de la distribution. D'autre part, la variation de r_i affecte la probabilité que l'observation c_i appartienne à cette partie de la distribution. On, montre que cette décomposition peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{\partial E\left(c_i/\,x_i\right)}{\partial r_i} &= \Phi\left(\frac{x_i\Upsilon}{\sigma_\varepsilon}\right)\beta_1\left\{1-\lambda_i\left(\frac{x_i\Upsilon}{\sigma_\varepsilon}\right)\left[\frac{x_i\Upsilon}{\sigma_\varepsilon}+\lambda_i\left(\frac{x_i\Upsilon}{\sigma_\varepsilon}\right)\right]\right\}\\ &\quad+\beta_1\phi\left(\frac{x_i\Upsilon}{\sigma_\varepsilon}\right)\left[\frac{x_i\Upsilon}{\sigma_\varepsilon}+\lambda_i\left(\frac{x_i\Upsilon}{\sigma_\varepsilon}\right)\right]\end{aligned}$$

On sait que si $m_i=0$, on a $x_i\widehat{\Upsilon}=-0.6761$ et $\widehat{\beta}_1=1.60$. Ainsi, ici il vient :

$$\begin{aligned}Prob\left(c_i>0\right)\frac{\partial E\left(c_i/\,x_i,c_{i>0}\right)}{\partial r_i} &= \Phi\left(\frac{x_i\widehat{\Upsilon}}{\widehat{\sigma}_\varepsilon}\right)\widehat{\beta}_1\left\{1-\lambda_i\left(\frac{x_i\widehat{\Upsilon}}{\widehat{\sigma}_\varepsilon}\right)\left[\frac{x_i\widehat{\Upsilon}}{\widehat{\sigma}_\varepsilon}+\lambda_i\left(\frac{x_i\widehat{\Upsilon}}{\widehat{\sigma}_\varepsilon}\right)\right]\right\}\\ &= \Phi\left(\frac{-0.6761}{0.5012}\right)\times1.60\times\left\{1-\lambda_i\left(\frac{-0.6761}{0.5012}\right)\left[\frac{-0.6761}{0.5012}+\lambda_i\left(\frac{-0.6761}{0.5012}\right)\right]\right\}\\ &= 0.0231\end{aligned}$$

De la même façon on a :

$$\begin{aligned}E\left(c_i/\,x_i,c_{i>0}\right)\frac{\partial Prob\left(c_i>0\right)}{\partial r_i} &= \widehat{\beta}_1\phi\left(\frac{x_i\widehat{\Upsilon}}{\widehat{\sigma}_\varepsilon}\right)\left[\frac{x_i\widehat{\Upsilon}}{\widehat{\sigma}_\varepsilon}+\lambda_i\left(\frac{x_i\widehat{\Upsilon}}{\widehat{\sigma}_\varepsilon}\right)\right]\\ &= 1.60\times\phi\left(\frac{-0.6761}{0.5012}\right)\left[\frac{-0.6761}{0.5012}+\lambda_i\left(\frac{-0.6761}{0.5012}\right)\right]\\ &= 0.1188\end{aligned}$$

On a donc un effet plus fort du revenu sur la probabilité d'obtenir une consommation positive que sur l'espérance conditionnelle de la consommation sur sa partie quantitative.