The Title

The Author

The Date

Abstract

Replace this text with your own abstract.

Partie II : Estimation d'une Courbe de Phillips Hybride par GMM

*Question 1 (*1.5 point*) :*

$$E\left[h\left(\theta_0, w_t\right)\right] = E\begin{pmatrix} \left[i_t - \alpha\, i_{t+1} - (1-\alpha)\ i_{t-1} - \beta\, z_t\right]\ i_{t-1} \\ \left[i_t - \alpha\, i_{t+1} - (1-\alpha)\ i_{t-1} - \beta\, z_t\right]\ z_t \\ \left[i_t - \alpha\, i_{t+1} - (1-\alpha)\ i_{t-1} - \beta\, z_t\right]\ z_{t-1} \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

On a donc :

$$h\left(\theta_0, w_t\right) = \begin{pmatrix} \left[i_t - \alpha\, i_{t+1} - (1-\alpha)\ i_{t-1} - \beta\, z_t\right]\ i_{t-1} \\ \left[i_t - \alpha\, i_{t+1} - (1-\alpha)\ i_{t-1} - \beta\, z_t\right]\ z_t \\ \left[i_t - \alpha\, i_{t+1} - (1-\alpha)\ i_{t-1} - \beta\, z_t\right]\ z_{t-1} \end{pmatrix}$$

$$g\left(Y_T, \theta\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} h\left(\theta, w_t\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\begin{pmatrix} \left[i_t - \alpha\, i_{t+1} - (1-\alpha)\ i_{t-1} - \beta\, z_t\right]\ i_{t-1} \\ \left[i_t - \alpha\, i_{t+1} - (1-\alpha)\ i_{t-1} - \beta\, z_t\right]\ z_t \\ \left[i_t - \alpha\, i_{t+1} - (1-\alpha)\ i_{t-1} - \beta\, z_t\right]\ z_{t-1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Question 2 (1.5 point) : Système sur-identifé, 1 condition suridentifiante. Donc l'estimateur GMM $\widehat{\theta}_T$ est obtenu en minimisant la fonction critère (ou fonction de perte) :

$$Q\left(\theta, Y_T\right) = \underset{(1,r)}{\left[g\left(Y_T, \theta\right)\right]'} \underset{(r,r)}{S^{-1}} \underset{(r,1)}{g\left(Y_T, \theta\right)} \quad (3)$$

avec

$$\underset{(r,r)}{S} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \sum_{v=-\infty}^{\infty} E\left[h\left(\theta_0, w_t\right) h\left(\theta_0, w_{t-v}\right)'\right] \tag{4}$$

Question 3 (2 points) : Donnez l'expression de la matrice de poids optimale en fonction des paramètres α et β. Si l'on suppose la stationnarité, on se ramène à :

$$\begin{aligned}
\underset{(3,3)}{S} &= \sum_{v=-\infty}^{\infty} E\left[h\left(\theta_0, w_t\right) h\left(\theta_0, w_{t-v}\right)'\right] \\
&= \sum_{v=-\infty}^{\infty} E\left[\varepsilon_t \varepsilon_{t-v} \begin{pmatrix} i_{t-1} i_{t-v-1} & i_{t-1} z_{t-v} & i_{t-1} z_{t-v-1} \\ & z_t z_{t-v} & z_t z_{t-v-1} \\ & & z_{t-1} z_{t-v-1} \end{pmatrix}\right]
\end{aligned}$$

où $\varepsilon_{t-v} = \left[i_{t-v} - \alpha\, i_{t-v+1} - (1-\alpha)\, i_{t-v-1} - \beta\, z_{t-v}\right]$. Que devient cette matrice lorsque les résidus ε_t ne sont pas auto-corrélés ?

$$\begin{aligned}
\underset{(3,3)}{S} &= \sum_{v=-\infty}^{\infty} E\left[h\left(\theta_0, w_t\right) h\left(\theta_0, w_{t-v}\right)'\right] \\
&= E\left[h\left(\theta_0, w_t\right) h\left(\theta_0, w_t\right)'\right] \\
&= \sum_{v=-\infty}^{\infty} E\left[\varepsilon_t^2 \begin{pmatrix} i_{t-1}^2 & i_{t-1} z_t & i_{t-1} z_{t-1} \\ & z_t^2 & z_t z_{t-1} \\ & & z_{t-1}^2 \end{pmatrix}\right]
\end{aligned}$$

Question 4 (2 points) : On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\widehat{S}_{NW} &= \widehat{\Gamma}_0 + \sum_{v=1}^{q} \left[1 - \frac{v}{q+1}\right] \left(\widehat{\Gamma}_v + \widehat{\Gamma}'_v\right) \\
&= \widehat{\Gamma}_0 + \sum_{v=1}^{3} \left[1 - \frac{v}{4}\right] \left(\widehat{\Gamma}_v + \widehat{\Gamma}'_v\right) \\
&= \widehat{\Gamma}_0 + \frac{3}{4}\left(\widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma}'_1\right) + \frac{1}{2}\left(\widehat{\Gamma}_2 + \widehat{\Gamma}'_2\right) + \frac{1}{4}\left(\widehat{\Gamma}_3 + \widehat{\Gamma}'_3\right)
\end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned}
\widehat{S}_G &= \widehat{\Gamma}_0 + \sum_{v=1}^{3} K\left(\frac{v}{q+1}\right) \left(\widehat{\Gamma}_v + \widehat{\Gamma}'_v\right) && (5) \\
&= \widehat{\Gamma}_0 + K\left(\frac{1}{4}\right)\left(\widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma}'_1\right) + K\left(\frac{1}{2}\right)\left(\widehat{\Gamma}_2 + \widehat{\Gamma}'_2\right) + K\left(\frac{3}{4}\right)\left(\widehat{\Gamma}_3 + \widehat{\Gamma}'_3\right) && (6)
\end{aligned}$$

où q désigne un paramètre de troncature et $K(u)$ désigne une fonction kernel de Parzen telle que

$$K(u)=\begin{cases}1-6\left|u\right|^{2}+6\left|u\right|^{3} & \text{si } 0\leq\left|u\right|\leq1/2\\ 2\left(1-\left|u\right|\right)^{3} & \text{si } 1/2\leq\left|u\right|\leq1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\tag{7}$$

D'où l'on tire que :

$$K\left(\frac{1}{4}\right)=1-6\left|\frac{1}{4}\right|^{2}+6\left|\frac{1}{4}\right|^{3}=0.71875$$

$$K\left(\frac{1}{2}\right)=1-6\left|\frac{1}{2}\right|^{2}+6\left|\frac{1}{2}\right|^{3}=0.25$$

$$K\left(\frac{3}{2}\right)=2\left(1-\left|\frac{3}{4}\right|\right)^{3}=0.0\,3125$$