Université d'Orléans - Master ESA 2ème Année
Econométrie pour la Finance

Exercices Octobre 2004. C. Hurlin

Exercice 1

Ecrire la log-vraisemblance de tous les modèles ARCH / GARCH asymétriques vus en cours sous l'hypothèse de normalité de la loi conditionnelle des résidus.

Exercice 2

On considère un modèle de régression linéaire avec erreur ARCH(q) tel que :

$$Y_t = X_t \gamma + \varepsilon_t \tag{1}$$

$$E\left(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon_{t-1}}\right) = 0 \qquad V\left(\varepsilon_t / \underline{\varepsilon_{t-1}}\right) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \tag{2}$$

Question 1 : Ecrire la log-vraisemblance de ce modèle sous l'hypothèse de normalité de la loi conditionnelle des résidus. Précisez l'ensemble θ des paramètres du modèle.

Question 2 : En déduire les conditions du premier ordre définissant les estimateurs de MV en séparant les paramètres intervenant dans l'espérance conditionnelle ($\alpha = \gamma$) et les paramètres intervenant dans la variance conditionnelle $\beta = (\alpha_0, \alpha_1, .., \alpha_q)$.

Question 3 : Ré-ecrire les CPO en fonction des résidus normalisés

$$\widetilde{\varepsilon}_t = \frac{Y_t - m_t\left(\widehat{\theta}\right)}{h_t\left(\widehat{\theta}\right)^{1/2}} \tag{3}$$

où $m_t(\theta) = E\left(Y_t | \underline{Y_{t-1}}, X_t\right)$, $h_t(\theta) = V\left(Y_t | \underline{Y_{t-1}}, X_t\right)$ et où $\widehat{\theta}$ correspond à l'estimateur du MV des paramètres $\theta = (\gamma, \alpha_0, \alpha_1, .., \alpha_q)$ du modèle.

Question 4 : Dérivez la matrice de variance covariance asymptotique des estimateurs $\widehat{\theta}$ du MV.

Exercice 3

On considère un modèle AR(1)-GARCH(1,3) sur le rendement du SP500, tel que :

$$dlsp_t = c + \phi_1 dlsp_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \quad z_t \, N.i.d.\,(0,1) \tag{4}$$

$$h_t = \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \beta_3 h_{t-3} \tag{5}$$

Question 1 : Estimer ce modèle suivant sous SAS par la procedure MODEL.

Question 2 : Estimer ce modèle suivant sous SAS par la procedure AUTOREG.

Question 3 : En contôlant les différentes options de ces procédures, faites en sorte que les réusltats d'estimation coïncident exactement.

Exercice 4

On considère un modèle AR(1)-GARCH(1,3) sur le rendement du SP500, tel que :

$$dlsp_t = c + +\varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \tag{6}$$

$$h_t = \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \beta_3 h_{t-3} \tag{7}$$

On suppose que le bruit blanc z_t a une distribution de Cauchy.

Question 1 : Ecrire la vraisemblance du modèle.

Question 2 : Estimer le modèle par la procedure AUTOREG

Question 3 : Comparez sur un même graphique les variances conditionnelles estimées par ce modèle et celles estimées sous l'hypothèse de normalité. Qu'en concluez vous ?

Exercice 5

A partir d'une série de votre choix :

Question 1 : Testez la présence d'effets ARCH-GARCH dans cette série.

Question 2 : Construire une prévsion et un intervalle de confiance pour un seuil de 1% à partir d'une modélisation de type AR et de la modélisation AR avec différentes structures ARCH/GARCH sur les résidus. Comparez. Qu'en concluez vous ?

Exercice 6

On considère le modèle suivant :

$$x_t = c + \rho\, x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{8}$$

où ε_t est un bruit blanc .

Question 1 : On considère le prédicteur linéare optimal de x_t à l'ordre h connaisant les valeurs passées de X_t, noté :

$$\widehat{x}_t\left(h\right) = E\left(x_{t+h} \middle| \underline{x_t}\right) = E\left(x_{t+h} \middle| x_t, x_{t-1}, .., x_0\right) \tag{9}$$

Montrez que l'erreur de prévision, notée $e_h = x_{t+h} - \widehat{x}_t\left(h\right)$, vérifie

$$e_h = \varepsilon_{t+h} + \rho\varepsilon_{t+h-1} + ... + \rho^h \varepsilon_{t+1} \tag{10}$$

Question 2 : En déduire un intervalle de confiance au seuil de 5% sur $\widehat{x}_t\left(1\right)$ sous l'hypothèse que ε_t est un bruit blanc fort et gaussien avec $E\left(\varepsilon_t\right) = 0$ et $E\left(\varepsilon_t^2\right) = \sigma^2$. Généralisez au cas d'un intervalle de confiance au seuil de 5% sur $\widehat{x}_t\left(h\right)$. Vérifiez que cet intervalle ne dépend pas de ε_t.

Question 3 : On suppose à présent que ε_t n'est plus un bruit blanc fort, mais vérifie un processus ARCH(1) tel que :

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \quad z_t\, N.i.d. \left(0, 1\right) \tag{11}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \tag{12}$$

Calculez la variance conditionnelle de x_{t+1} sachant les valeurs passées de x_t, puis de façon générale $V\left(x_{t+h} \middle| \underline{x_t}\right)$.

Question 4 : En déduire un intervalle de confiance sur $\widehat{x}_t\left(1\right)$. Vérifiez que la taille de cet intervalle dépend de ε_t. Généralisez au cas $\widehat{x}_t\left(h\right)$.

Exercice 7

Estimer les trois processus GARCH(1,1)-M suivants sur le rendements SP500 par la procédure AUTOREG et par la procédure MODEL. Comparez vos résultats selon la spécification.

$$y_t = x_t b + \delta h_t + \varepsilon_t \quad \text{Forme Linéaire} \tag{13}$$

$$y_t = x_t b + \delta \log(h_t) + \varepsilon_t \quad \text{Forme Log-Linéaire} \tag{14}$$

$$y_t = x_t b + \delta \sqrt{h_t} + \varepsilon_t \quad \text{Forme Racine Carrée} \tag{15}$$

avec dans les trois cas :

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \quad z_t \text{ suit une loi de Student à } v \text{ degrés de liberté} \tag{16}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-i}^2 + \beta_1 h_{t-i} \tag{17}$$

Exercice 8

Estimer les trois processus GARCH(1,1)-M suivants sur le rendements SP500 par la procédure AUTOREG et par la procédure MODEL. Comparez vos résultats.

$$y_t = x_t b + \delta h_t + \varepsilon_t \quad \text{Forme Linéaire} \tag{18}$$

$$y_t = x_t b + \delta \log(h_t) + \varepsilon_t \quad \text{Forme Log-Linéaire} \tag{19}$$

$$y_t = x_t b + \delta \sqrt{h_t} + \varepsilon_t \quad \text{Forme Racine Carrée} \tag{20}$$

avec dans les trois cas :

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \quad z_t \text{ suit une loi de Student à } v \text{ degrés de liberté} \tag{21}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-i}^2 + \beta_1 h_{t-i} \tag{22}$$

Exercice 9

Simuler un échantillon de taille $T = 1000$ à partir du processus bilinéaire $BL(0,0,2,1)$ suivant :

$$X_t = \varepsilon_t + 0.02\, X_{t-2}\varepsilon_{t-1} \tag{23}$$

où ε_t est $N.i.d.\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$. Testez la présence d'effets ARCH sur la série simulée X_t.

Exercice 10

On souhaite estimer le modèle EGARCH(1,1) suivant sur le rendement du SP500 :

$$dlsp_t = c + \varepsilon_t \tag{24}$$

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \tag{25}$$

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \alpha_1\, g(z_{t-1}) + \beta_1 \log(h_{t-i}) \tag{26}$$

$$g(z_{t-1}) = \theta\, z_{t-1} + \gamma\, \left(|z_{t-1}| - E\,|z_{t-1}|\right) \tag{27}$$

On suppose que le résidu normalisé z_t admet une distribution GED de paramètre v.

Question 1 : Estimez les paramètres de ce modèle par la procédure MODEL.

Question 2 : Faire un graphique de la variance conditionnelle estimé. Comparez vos résultats à ceux issus de l'estimation d'un modèle GARCH sous distribution GED. Commentez.

Exercice 11

On souhaite estimer le modèle GJR-GARCH(1,1) suivant sur le rendement du SP500 :

$$dlsp_t = c + \varepsilon_t \tag{28}$$

$$\varepsilon_t = z_t\sqrt{h_t} \tag{29}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_1\,\mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1}<0}\,\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \tag{30}$$

$$\mathbb{I}_{\varepsilon_{t-i}<0} = \left\{ \begin{array}{l} 1\,\text{si}\ \varepsilon_{t-i} < 0 \\ 1\,\text{si}\ \varepsilon_{t-i} \geq 0 \end{array} \right. \tag{31}$$

On suppose que le résidu normalisé z_t admet une distribution GED de paramètre v.

Question 1 : Pourquoi selon vous est il intéressant de combiner les hypothèses GED et GJR ?

Question 2 : Estimez les paramètres de ce modèle par la procédure MODEL.

Question 3 : Faire un graphique de la variance conditionnelle estimé. Comparez vos résultats à ceux issus de l'estimation d'un modèle GARCH sous distribution GED. Commentez.

Exercice 12

Estimer le processus IGARCH$(1,1)$ suivant sur le rendement SP500 en utilisant la procedure MODEL.

$$dlsp_t = c + \varepsilon_t \tag{32}$$

$$\varepsilon_t = z_t\sqrt{h_t} \quad z_t N.i.d.\,(0,1) \tag{33}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \quad \alpha_1 + \beta_1 = 1 \tag{34}$$

Exercice 13

On souhaite estimer le modèle APARCH(1,1) suivant sur le rendement du SP500 :

$$dlsp_t = c + \varepsilon_t \tag{35}$$

$$\varepsilon_t = z_t\sqrt{h_t} \tag{36}$$

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \alpha_1\left(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma_1\varepsilon_{t-1}\right)^\delta + \beta_1\sigma_{t-1}^\delta \tag{37}$$

où $\sigma_t = \sqrt{h_t}$ est l'écart-type conditionnel de ε_t, avec $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ et $-1 < \gamma_i < 1, i = 1, \ldots, q$, $\beta_i \geq 0, i = 1, \ldots, p$, $\delta > 0$. On suppose que le résidu normalisé z_t suit une distribution GED à v degrés de libertés. On rappelle que :

$$E\left[\left(|\varepsilon_t| - \gamma_i\varepsilon_t\right)^\delta\right] = h_t^{\frac{\delta}{2}}\,E\left[\left(|z_t| - \gamma_i z_t\right)^\delta\right] \tag{38}$$

avec

$$E\left[\left(|z_t| - \gamma_i z_t\right)^\delta\right] = \left\{(1+\gamma_1)^\delta + (1-\gamma_1)^\delta\right\} 2^{\frac{\delta-\nu}{v}} \frac{\Gamma\left(\frac{\delta+1}{\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)} \left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)2^{\frac{-2}{\nu}}}{\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)}\right\}^{\frac{\delta}{2}} \tag{39}$$

où $\Gamma\,(.)$ désigne la fonction gamma.

Question 1 : Estimez les paramètres de ce modèle par la procédure MODEL.

Question 2 : En fonction des estimateurs des paramètres de ce modèle, proposez un modèle contraint similaire. Estimez le modèle en question par la procédure MODEL.

Exercice 14

On cherche à estimer un modèle QGARCH(1,1) sur le rendement du SP500 tel que :

$$dlsp_t = c + \varepsilon_t \tag{40}$$

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \tag{41}$$

$$h_t = \alpha_0 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \tag{42}$$

On suppose que le résidu normalisé z_t suit une distribution GED à v degrés de libertés.

Question 1 : Estimez les paramètres de ce modèle par la procédure MODEL.

Question 2 : Pour la valeur des paramètres estimées du modèle, graphez la fonction quadratique $f(x) = \gamma_1 x + \alpha_1 x^2$. Déterminez son minimum : qu'en conluez quant à l'asymétrie du processus de variance conditionnelle ?