Master Econométrie et Statistique Appliquée
Université d'Orléans
Cours d'Econométrie pour la Finance

Examen Terminal Février 2007. C. Hurlin

Exercice 1 : Vrai - Faux - Modèles GARCH Univariés (8 points)

Répondez par Vrai ou Faux et *Justifiez précisément vos réponses.*

Question 1 (1.5 point) : Si un processus X_t satisfait une représentation GARCH$(2,1)$ telle que :

$$X_t = z_t \sqrt{h_t} \tag{1}$$

$$z_t \ i.i.d. \, (0,1) \tag{2}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \alpha_2 X_{t-2}^2 + \beta_1 h_{t-1} \tag{3}$$

alors le processus X_t^2 satisfait une représentation $ARMA\,(1,2)$ telle que :

$$X_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + (\alpha_1 + \beta_1)\,\mu_{t-1} \tag{4}$$

où $\mu_t = X_t^2 - h_t$ est une innovation pour le processus X_t^2.

Question 2 (1.5 point) : Soit X_t un processus GARCH$(1,1)$ tel que

$$X_t = z_t \sqrt{h_t} \tag{5}$$

$$z_t \ i.i.d. \, (0,1) \tag{6}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \tag{7}$$

La variance non conditionnelle de X_t est égale à :

$$V\left(X_t\right) = \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_1 + \beta_1} \tag{8}$$

Question 3 (1 point) : On considère un modèle ARMA-GARCH pouvant s'écrire sous la forme suivante :

$$E\left(Y_t | \underline{Y_{t-1}}, X_t\right) = m_t\left(\underline{Y_{t-1}}, X_t, \theta\right) = m_t\left(\theta\right) \tag{9}$$

$$V\left(Y_t | \underline{Y_{t-1}}, X_t\right) = h_t\left(\underline{Y_{t-1}}, X_t, \theta\right) = h_t\left(\theta\right) \tag{10}$$

L'estimateur du Pseudo Maximum de Vraisemblance (PMV) des paramètres θ associée à un échantillon de T observations $(y_1, y_2, .., y_T)$ est obtenu par maximisation de la fonction suivante :

$$\log L\left(\theta\right) = -\frac{T}{2}\log\left(2\pi\right) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\log\left[h_t\left(\theta\right)\right] - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{\left[y_t - m_t\left(\theta\right)\right]^2}{h_t\left(\theta\right)} \tag{11}$$

Question 4 (1 point) : Le processus X_t statisfaisant la représentation suivante

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \tag{12}$$

$$\log(h_t) = \alpha_0 + a_1 z_{t-i} + b_1 \left[|z_{t-1}| - \frac{4\xi^2 \Gamma\left(\frac{1+v}{2}\right)\sqrt{v-2}}{\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)\sqrt{\pi}\,(v-1)\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \right] + \beta_1 \log\left(h_{t-1}\right) \tag{13}$$

satisfait une représentation GARCH symétrique sous loi conditionnelle normale si et seulement si $\xi = 1$ et v tend vers $+\infty$.

Question 5 (1 point) : Un modèle EGARCH permet de rendre compte d'une asymétrie dans la dynamique de la variance conditionnelle liée (*i*) au signe et (*ii*) à l'amplitude des chocs.

Question 6 (1 point) : Le modèle GJR-GARCH englobe le modèle EGARCH.

Question 7 (1 point) : Soit X_t un processus IGARCH$(1,1)$ tel que

$$X_t = z_t \sqrt{h_t} \tag{14}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + (1-\alpha_1)\, h_{t-1} \tag{15}$$

La prévision à de la variance conditionnelle à l'horison $t+k$ obtenue conditionnellement à l'information disponible à la date t s'écrit :

$$V\left(X_{t+k} | \, X_t\right) = \alpha_0 k + h_t \tag{16}$$

Exercice 2 : Vrai - Faux - Value-at-Risk (4 points)

Répondez par Vrai ou Faux et *Justifiez précisément vos réponses.*

Question 1 (1 point) : On suppose que le rendement d'un actif, noté X_t, satisfait une représentation GARCH$(1,1)$ telle que :

$$X_t = c + \varepsilon \tag{17}$$

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}$$

$$z_t \;\; N.i.d.\,(0,1) \tag{18}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \tag{19}$$

alors la VaR à la date t pour un niveau de confiance de $1-\alpha\%$ est égale à :

$$VaR_t(\alpha) = \sqrt{h_t}\; \Phi^{-1}(1-\alpha) + c \tag{20}$$

où $\Phi(.)$ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Question 2 (1 point) : On suppose que le rendement d'un actif, noté X_t, satisfait une représentation GARCH$(1,1)$ identique au modèle de la question précédente et que l'on dispose d'un échantillon de rendements $(x_1,..,x_T)$. La prévision out-of sample optimale de la VaR pour un taux de couverture de $\alpha\%$ à la date $T+1$ est égale à :

$$\widehat{V}aR_{T+1|T}(\alpha) = \sqrt{\widehat{\alpha}_0 + \widehat{\alpha}_1 \left(X_T - \widehat{c}\right)^2 + \widehat{\beta}_1 h_T}\; \Phi^{-1}(\alpha) + \widehat{c} \tag{21}$$

où les paramètres $\widehat{\alpha}_0$, $\widehat{\alpha}_1$, $\widehat{\beta}_1$ et $\widehat{c}$ ont été estimés sur l'échantillon $(x_1,..,x_T)$.

Question 3 (1 point) : On note $\widehat{V}aR_{T+1|T}(\alpha)$ la prévision out-of sample de VaR pour la date $T+1$ et pour un taux de couverture égal à $\alpha\%$. Cette prévision est valide si et seulement si :

$$\Pr\left[r_{T+1} < \widehat{V}aR_{T+1|T}(\alpha)\right] = \alpha \tag{22}$$

Question 4 (1 point) : On suppose que le rendement d'un actif, noté X_t, satisfait une représentation GARCH$(1,1)$ identique au modèle précédent et l'on estime (à tort) la VaR par la méthode de simulation historique. On rappelle que la VaR estimée par la méthode HS correspond au fractile empirique d'ordre α de la chronique des rentabilités passées observée sur une fenêtre de taille Te. Si $Te = T$ tend vers l'infini, la VaR HS converge vers :

$$VaR(\alpha) = \sqrt{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1}}\; \Phi^{-1}(1-\alpha) + c \tag{23}$$

Figure 1: Sortie SAS

(Modele GARCH-M) 16:48 Saturday, February

The AUTOREG Procedure

Dependent Variable dlsp

Ordinary Least Squares Estimates

SSE	0.40117	DFE	3754
MSE	0.0001069	Root MSE	0.01034
SBC	-23672.063	AIC	-23678.294
Regress R-Square	0.0000	Total R-Square	0.0000
Durbin-Watson	2.0103		

Variable	DDL	Estimation	Standard Error	t Value	Approx Pr > |t|
Intercept	1	0.000318	0.000169	1.88	0.0598

Algorithm converged.

GARCH Estimates

SSE	0.40131594	Observations	3755
MSE	0.0001069	Uncond Var	.
Log Likelihood	14570.4102	Total R-Square	.
SBC	-29091.435	AIC	-29128.82
Normality Test	3502.1769	Pr > ChiSq	<.0001

Variable	DDL	Estimation	Standard Error	t Value	Approx Pr > |t|
Intercept	1	0.000391	0.000354	1.11	0.2690
ARCH0	1	2.851E-7	1.2507E-7	2.28	0.0226
ARCH1	1	0.0463	0.006039	7.66	<.0001
GARCH1	1	0.9529	0.005757	165.53	<.0001
DELTA	1	0.0203	0.0438	0.46	0.6438
TDFI	1	0.1743	0.0151	11.58	<.0001

Exercice 3 : Modèles GARCH et Value-at-Risk (8 points) - Applications sous SAS

Question 1 (3 points) : Ecrivez un programme SAS permettant d'estimer un modèle EGARCH sous loi GED en utilisant la proc MODEL.

Question 2 (3 points) : Commentez la sortie SAS suivante.

Question 3 (2 points) : Expliquez ce que permet de réaliser le programme SAS suivant.

Figure 2: Code SaS

```
proc model data = donnees parmsdata=val_init1;
      parms  alpha0 alpha1 beta1 phi df 5;
      /* Esperance Conditionnelle */
      rdt = intercept ;
              if zlag(resid.rdt) > 0 then
         h.rdt = alpha0 + alpha1*zlag(resid.rdt**2) + beta1*zlag(h.rdt);
      else
         h.rdt = alpha0 + alpha1*zlag(resid.rdt**2) + beta1*zlag(h.rdt)+phi*zlag(resid.rdt**2);
              errormodel rdt ~ t(h.rdt,df);
              /* Estimation */
      fit rdt  / fiml method=marquardt out=varin outest=val_init2;
              outvars h.rdt resid.rdt date alpha;
run;

data Varin;
set varin;VaR=7.492E-7+tinv(0.05,6.23)*sqrt(h_rdt);
run;
```