Université d'Orléans - Master ESA 2
Macro-Econométrie

Examen Terminal Février 2007. C. Hurlin
Tout Document Autorisé

Exercice 1 (12 points) : Test de Distribution et GMM

Cet exercice est basé sur l'article "*Testing Distributional Assumptions: A GMM Approach*" de Bontemps et Nour Meddahi (2006). L'objectif de l'article est de construire un test de distribution fondé sur les GMM. On dispose d'un échantillon $\{x_1, .., x_T\}$ de réalisations d'une variable aléatoire X et l'hypothèse nulle testée est de la forme H_0 : X suit une distribution particulière (normal, Student, gamma, beta, uniforme etc..). On admet que si X suit une loi de Student à v degrés de liberté, alors on peut définir des polynômes orthonormés dits polynômes de Romanovski, notés $P_n(x; v)$ tels que :

$$P_{n+1}(x; v) = \sqrt{\frac{(v-2n)(v-2n-2)}{(n+1)v(v-n)}} x P_n(x; v) - \sqrt{\frac{n(v-n+1)(v-2n-2)}{(n+1)(v-n)(v-2n+2)}} P_{n-1}(x; v) \tag{1}$$

Les trois premiers polynômes vérifient :

$$P_1(x; v) = \sqrt{\frac{v-2}{v}} x \tag{2}$$

$$P_2(x; v) = \sqrt{\frac{v-4}{2(v-1)}} \left(\frac{v-2}{v} x^2 - 1\right) \tag{3}$$

$$P_3(x; v) = \sqrt{\frac{(v-2)(v-6)}{6v(v-1)}} \left(\frac{v-4}{v} x^3 - 3x\right) \tag{4}$$

La propriété essentielle de ces polynômes orthonormés est que si la variable x suit effectivement une loi de Student à v degrés de liberté, alors :

$$E[P_n(x; v)] = 0 \quad \forall n \geq 1 \tag{5}$$

*Question 1 (*1.5 point*)* : Interpretez les conditions $E[P_n(x; v)]$ pour $n = 1, 2$ et 3.

*Question 2 (*1 point*)* : Ecrivez les contreparties empiriques des trois conditions d'orthogonalité $E[P_n(x; v)]$ pour $n = 1, 2$,et 3 sous la forme :

$$g(x_T, v) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{T} P_n(x_t; v) \tag{6}$$

Vous détaillerez l'écriture du vecteur $g(x_T, v)$.

*Question 3 (*2 points*)* : En vous inspirant du principe de la J-statistique, proposez une statistique de test simple de l'hypothèse H_0 : X suit une distribution de Student à v degrés de liberté (v est connu). *Vous justifierez précisèment votre proposition en supposant que l'on utilise p conditions d'orthogonalité* $E[P_n(x; v)] = 0,\ n = 1, ., p$.

*Question 4 (*1.5 points*)* : On suppose à présent que le nombre de degrés de liberté v est inconnu et l'on souhaite l'estimer. Proposez un estimateur GMM de v. *Vous détaillerez précisèment la construction de la matrice de poids optimale en discutant suivant la présence ou non d'autocorrélation.*

Question 5 (3 points*)* : Ecrivez un code SAS permettant d'estimer le nombre de degré de liberté v d'une loi de Student à partir d'un échantillon $\{x_1, .., x_t\}$ en utilisant trois conditions d'orthogonalité de la forme :

$$E\left[P_n\left(x; v\right)\right] = 0 \quad n = 1, 2, 3 \tag{7}$$

Vous utiliserez (i) une méthode de GMM en deux étapes, (ii) un estimateur kernel de la matrice de poids de type Quadratic Spectral, (iii) avec une correction de petit échantillon dans la construction des estimateurs de covariance

Question 6 (3 points*)* Commentez le code SAS suivant. (cf. infra)

Exercice 2 (11 points) : Famille de Pearson et Méthode de Moments

On attribue souvent à Karl Pearson la "paternité" de la méthode des moments (voir Berra et Bilias, 2002, pour une revue historique) et l'objectif de cet exercice est de comprendre le lien entre les propriétés des distribution de la famille de Pearson et les méthodes de moments. On admet que si une fonctin de densité $q(.)$ appartient à la famille de lois de Pearson, le ratio $q'(.)/q(.)$ est égal au ratio de deux polynômes $A(x)$ et $B(x)$ tels que :

$$\frac{q'(x)}{q(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{-(x+a)}{c_0 + c_1 x + c_2 x^2} \tag{8}$$

La famille de Pearson inclut notamment les distributions normales, Student, gamma, beta et uniforme.

Questions Préliminaires

Question 1 (1.5 points*)* : Déterminez la valeur des paramètres a, c_0, c_1 et c_2 dans le cas d'une distribution normale $N\left(\mu, \sigma^2\right)$.

Question 2 (1.5 points*)* : Déterminez la valeur des paramètres a, c_0, c_1 et c_2 dans le cas d'une distribution de Student *à* v degrés de liberté. On rappelle que :

$$q(x; v) = v^{-1/2}\left[B\left(\frac{v}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]^{-1}\left[1 + \frac{x^2}{v}\right]^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)} \tag{9}$$

où $B(.)$ désigne la fonction Beta.

Estimateurs des Moments Classiques

On cherche à présent à estimer par la méthode des moments les paramètres $\theta = (a, c_0, c_1, c_2)$ associés à une distribution donnée. On admet que dans le cas d'une fonction de distribution appartenant à la famille de Pearson, on a une relation de récurrence sur les moments de la forme :

$$\left[c_2(j+2) - 1\right] E\left[X^{j+1}\right] = \left[a - c_1(j+1)\right] E\left[X^j\right] - c_0 j E\left[X^{j-1}\right] \quad j \geq 1 \tag{10}$$

Question 1 (1 point) : Combien faut-il utiliser de conditions d'orthogonalité afin d'obtenir un estimateur des moments classiques (juste identifié) du vecteur θ ?

Question 2 (2 points) : A partir de l'équation de récurrence (10) proposez un ensemble de conditions d'orthogonalité permettant d'estimer θ pour n'importe quelle distribution de la famille de Pearson par la méthode des moments classiques (système juste identifié). On écrira ces conditions sous la forme vectorielle :

$$E\left[h\left(X; \theta\right)\right] = 0 \tag{11}$$

Question 3 (1 point) : On considère un N-échantillon $\{x_1, ..,_N\}$ de réalisations de X. Construisez la contrepartie empirique de ces conditions d'orthogonalité, notée $g\left(X; \theta\right)$.

Question 4 (1 point) : A partir des moments empiriques $g(X;\theta)$, donnez l'équation qui permet de définir l'estimateur des moments classiques $\widehat{\theta}$ construit par Pearson.

Question 5 (3 points) : On suppose que X suit une loi normale $N(0,\sigma^2)$. Réecrivez les conditions d'orthogonalité permettant d'obtenir un estimateur des **moments classiques (juste identifié)** sous la forme $E[h(X;\theta)] = 0$ et déterminez l'estimateur de $\widehat{\sigma}^2$.

Figure 1: Sortie SAS. Encadré 1

```
                         BM              15:40 Monday, February 21, 2

                     The MODEL Procedure

                        Model Summary

                  Parameters                1
                  Equations                 3
                  Number of Statements      3


                 Parameters(Value)  v(30)
                         Equations  h1 h2 h3
OTE: The parameter v is shared by all 3 of the equations to be estimated.

                 The 3 Equations to Estimate

                           h1 =  F(v)
                           h2 =  F(v)
                           h3 =  F(v)
                    Instruments   1 x

        NOTE: At ITGMM Iteration 12 CONVERGE=0.001 Criteria Met.
```

Figure 2: Sortie SAS (suite)

BM 15:4

The MODEL Procedure
ITGMM Estimation Summary

Data Set Options

DATA= DONNEES

Minimization Summary

Parameters Estimated	1
Kernel Used	PARZEN
l(n)	3.981072
Method	Gauss
Iterations	12

Final Convergence Criteria

R	0.000539
PPC(v)	1.793E13
RPC(v)	9.055E14
Object	1.49E-15
Trace(S)	22.66239
Objective Value	0.335098
S	1.03E-15

Observations Processed

Read	1000
Solved	1000

Figure 3: Sortie SAS (Fin)

BM 15:40 Monday, February 21, 2005

The MODEL Procedure

Nonlinear ITGMM Summary of Residual Errors

Equation	DF Model	DF Error	SSE	MSE	Root MSE	R-Square	Adj R-Sq
h1	0.333	999.7	2053.5	2.0542	1.4332		
h2	0.333	999.7	5137.7	5.1394	2.2670		
h3	0.333	999.7	15463.6	15.4687	3.9330		

Nonlinear ITGMM Parameter Estimates

Parameter	Estimation	Approx Std Err	t Value	Approx Pr > |t|
v	1.447E31	2.63E46	0.00	1.0000

Number of Observations

Used	1000
Missing	0

Statistics for System

Objective	0.3351
Objective*N	335.0984