

# Université d'Orléans - Master ESA 2

## Macro-Econométrie

Examen Terminal Janvier 2010. C. Hurlin

### Exercice 1 (16 points) : Test GMM de validité d'intervalle de confiance

Dans un article récent, Dumitrescu, Hurlin et Madkour (2010) proposent un nouveau test GMM de validation des prévisions par intervalle de confiance basé sur les polynômes orthonormaux associés à une distribution binomiale. On considère une séquence  $x_t, t \in \{1, \dots, T\}$  d'un processus temporel  $x_t$ .

Soit  $\{[L_{t|t-1}(\alpha), U_{t|t-1}(\alpha)]\}_{t=1}^T$  la séquence de prévisions *out-of-sample* à l'horizon d'une période, pour un niveau de risque de  $\alpha\%$ , issues d'un modèle linéaire quelconque (AR, ARMA, SARIMA etc.).  $L_{t|t-1}(\alpha)$  et  $U_{t|t-1}(\alpha)$  désignent respectivement les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle de confiance obtenu *ex-ante* conditionnellement à un ensemble d'information  $\Omega_{t-1}$ , telles que :

$$\Pr(x_t \in [L_{t|t-1}(\alpha), U_{t|t-1}(\alpha)] \mid \Omega_{t-1}) = \alpha. \quad (1)$$

On définit une variable binaire  $I_t(\alpha)$  telle que :

$$I_t(\alpha) = \begin{cases} 1, & x_t \notin CI_{t|t-1}(\alpha) \\ 0, & x_t \in CI_{t|t-1}(\alpha) \end{cases}. \quad (2)$$

Christoffersen (1998) définit trois hypothèses permettant de traduire la validité d'un intervalle de confiance. La première correspond à l'hypothèse de couverture non conditionnelle (UC) :

$$H_{0,UC} : \mathbb{E}[I_t(\alpha)] = \alpha. \quad (3)$$

La seconde, dite hypothèse d'indépendance (IND), est telle que :

$$H_{0,IND} : \{I_t(\alpha)\}_{t=1}^T \text{ sont indépendantes}$$

Enfin, l'hypothèse de couverture conditionnelle (CC) s'écrit :

$$H_{0,CC} : \mathbb{E}[I_t(\alpha) \mid \Omega_{t-1}] = \alpha. \quad (4)$$

*Question 1* (2 points) : Commentez précisément les hypothèses UC, IND et CC dans ce contexte.

*Question 2* (2 points) : Sous l'hypothèse de couverture conditionnelle CC, quelle est la loi de la variable  $Y_t = \sum_{t=1}^T I_t(\alpha)$ . Dans la pratique, peut-on utiliser cette hypothèse distributionnelle pour tester l'hypothèse de CC d'un intervalle de confiance ?

*Question 3* (2 points) : On suppose que l'on découpe la séquence des  $T$  observations  $\{I_t(\alpha)\}_{t=1}^T$  en  $H$  sous-segments de taille  $N$ , où  $N = \lfloor T/H \rfloor$  et où  $\lfloor \cdot \rfloor$  désigne la partie entière inférieure. Pour chaque sous-échantillon on définit une somme partielle  $y_h$  telle que

$$y_h = \sum_{t=(h-1)N+1}^{hN} I_t(\alpha), \quad h \in \{1, \dots, H\} \quad (5)$$

Quelle loi suivent les variables  $y_h$  sous l'hypothèse de couverture conditionnelle CC ? Dans la pratique, peut-on utiliser cette hypothèse distributionnelle pour tester l'hypothèse de CC d'un intervalle de confiance ?

*Question 4 (2 points) :* On admet que si une variable  $Z$  suit une loi binomiale  $B(M, p)$  avec  $p \in [0, 1]$  et  $N > 1$ , alors on peut définir des polynômes orthonormaux associés  $P_j^{(M,p)}(Z)$ , appelés polynômes de Krawtchouk, par la formule de récurrence suivante :

$$P_{j+1}^{(M,p)}(Z) = \frac{p(M-j) + (1-p)j - Z}{\sqrt{p(1-p)(M-j)(j+1)}} P_j^{(M,p)}(Z) - \sqrt{\frac{j(M-j+1)}{(j+1)(M-j)}} P_{j-1}^{(M,p)}(Z), \quad (6)$$

where  $P_{-1}^{(M,p)}(Z) = 0$ ,  $P_0^{(M,p)}(Z) = 1$ , and  $j < N$ . Ces polynômes vérifient la propriété suivante :

$$\mathbb{E} \left[ P_j^{(M,p)}(Z) \right] = 0, \quad \forall j \quad (7)$$

En utilisant les variables  $y_h$  (question 3), traduisez l'hypothèse de couverture conditionnelle (CC) sous la forme de condition d'orthogonalité portant sur les polynômes de Krawtchouk associés.

*Question 5 (2 points) :* Ecrivez les conditions d'orthogonalité définissant l'hypothèse CC associés aux trois premiers polynômes de Krawtchouk ( $j = 1, 2$  et  $3$ ). Interpretez ces conditions.

*Question 6 (2 points) :* A partir d'une séquence  $\{y_h\}_{h=1}^H$ , écrivez les contreparties empiriques des trois conditions d'orthogonalité  $\mathbb{E} \left[ P_j^{(N,\alpha)}(y_h) \right]$  pour  $j = 1, 2$ , et  $3$  sous la forme :

$$g(Y_H; \alpha, H) = \frac{1}{\sqrt{H}} \sum_{h=1}^H P_j^{(N,\alpha)}(y_h) \quad (8)$$

*Vous détaillerez l'écriture du vecteur  $g(Y_H; \alpha, H)$ .*

*Question 7 (2 points) :* En vous inspirant du principe de la  $J$ -statistique, proposez une statistique de test simple de l'hypothèse  $H_0$  de couverture conditionnelle d'un intervalle de confiance de risque  $\alpha$ . Pour ce faire vous supposerez que l'on utilise  $p$  conditions d'orthogonalité associés aux  $p$  premiers polynômes  $E \left[ P_j^{(N;\alpha)}(y) \right] = 0$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Montrez que sous l'hypothèse de CC cette statistique converge une loi du chi deux à  $p$  degrés de liberté. *Rappel : on admet que les  $P_j^{(N;\alpha)}(y)$  sont orthogonaux.*

*Question 8 (2 points) :* Ecrivez un code SAS permettant de tester l'hypothèse de CC à partir d'un échantillon de sommes partielles  $\{y_1, \dots, y_H\}$  en utilisant trois conditions d'orthogonalité.

## Exercice 2 (4 points) : GMM et loi normale

Vous choisirez deux questions au choix parmi les 3 suivantes :

*Question 1 (2 points) :* on suppose que  $X$  suit une normale  $N(m, \sigma^2)$ . En utilisant les moments centrés d'ordre deux, trois et quatre, proposez un estimateur GMM des paramètres  $m$  et  $\sigma^2$  à partir d'un échantillon  $\{X_1, \dots, X_T\}$ . Rappel :

$$\mathbb{E} \left[ (X - m)^2 \right] = \sigma^2, \quad (9)$$

$$\mathbb{E} \left[ (X - m)^3 \right] = 0, \quad (10)$$

$$\mathbb{E} \left[ (X - m)^4 \right] = 3\sigma^4. \quad (11)$$

*Question 2 (2 points) :* A partir de la question 1, écrire un code SAS permettant d'estimer  $m$  et  $\sigma^2$ . Vous utiliserez (i) une méthode de GMM en deux étapes, (ii) un estimateur kernel de la matrice de poids de type Quadratic Spectral, (iii) avec une correction de petit échantillon dans la construction des estimateurs de covariance

*Question 3 (2 points) :* on suppose que  $X$  suit une normale  $N(0, 1)$ . En utilisant les moments centrés d'ordre trois et quatre, proposez un test simple (de type J statistique) de l'hypothèse nulle de normalité (à la Jarque et Berra).