Université d'Orléans - Master ESA 2
Macro-Econométrie

Correction Examen 2007. C. Hurlin
Tout Document Autorisé

Exercice 1 : Test de Distribution et GMM

Cet exercice est basé sur l'article "*Testing Distributional Assumptions: A GMM Approach*" de Bontemps et Nour Meddahi (2006). L'objectif de l'article est de construire un test de distribution fondé sur les GMM. On dispose d'un échantillon $\{x_1, .., x_N\}$ de réalisations d'une variable aléatoire X et l'hypothèse nulle testée est de la forme H_0 : X suit une distribution particulière (normal, Student, gamma, beta, uniforme etc..). On admet que si X suit une loi de Student à v degrés de liberté, alors on peut définir des polynômes orthonormés dits polynômes de Romanovski, notés $P_n(x; v)$ tels que :

$$P_{n+1}(x; v) = \sqrt{\frac{(v-2n)(v-2n-2)}{(n+1)v(v-n)}} x P_n(x; v) - \sqrt{\frac{n(v-n+1)(v-2n-2)}{(n+1)(v-n)(v-2n+2)}} P_{n-1}(x; v) \tag{1}$$

Les trois premiers polynômes vérifient :

$$P_1(x; v) = \sqrt{\frac{v-2}{v}} x \tag{2}$$

$$P_2(x; v) = \sqrt{\frac{v-4}{2(v-1)}} \left(\frac{v-2}{v} x^2 - 1 \right) \tag{3}$$

$$P_3(x; v) = \sqrt{\frac{(v-2)(v-6)}{6v(v-1)}} \left(\frac{v-4}{v} x^3 - 3x \right) \tag{4}$$

La propriété essentielle de ces polynômes orthonormés est que si la variable x suit effectivement une loi de Student à v degrés de liberté, alors :

$$E[P_n(x; v)] = 0 \quad \forall n \geq 1 \tag{5}$$

*Question 1 (*1.5 points*)* :

$$E[P_1(x; v)] = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{v-2}{v}} E(x) = 0 \Leftrightarrow E(x) = 0 \tag{6}$$

$$\begin{aligned} E[P_2(x; v)] &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{v-4}{2(v-1)}} \left[\frac{v-2}{v} E\left(x^2\right) - 1 \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow E\left(x^2\right) = \frac{v}{v-2} \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} E[P_3(x; v)] &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(v-2)(v-6)}{6v(v-1)}} \left[\frac{v-4}{v} E\left(x^3\right) - 3E(x) \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{v-4}{v} E\left(x^3\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow E\left(x^3\right) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

On retrouve la définition des trois premiers moments de la loi de Student.

*Question 2 (*1 point*)* : On a :

$$g(x_N, v) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{T} P_n(x_t; v) \tag{9}$$

avec :

$$g(x_N, v) = \frac{1}{\sqrt{T}} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{v-2}{v}} \sum_{t=1}^{T} x_i \\ \sqrt{\frac{v-4}{2(v-1)}} \left(\frac{v-2}{v} \sum_{t=1}^{T} x_i^2 - T \right) \\ \sqrt{\frac{(v-2)(v-6)}{6v(v-1)}} \left(\frac{v-4}{v} \sum_{t=1}^{T} x_i^3 - 3 \sum_{t=1}^{T} x_i \right) \end{bmatrix} \tag{10}$$

*Question 3 (*2 points*) :* Bontemps et Nour Meddahi (2006) montrent que pour p conditions d'orthogonalités $E[P_n(x; v)] = 0$, $n = 1, .., p$, un test fondé sur la statistique :

$$g(x_N, v)' \Sigma^{-1} g(x_N, v) \underset{N \to \infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} \varkappa^2(p) \tag{11}$$

ou

$$\Sigma = \sum_{h=-\infty}^{\infty} E\left[g(x_t, v) g(x_{t-h}, v)' \right] \tag{12}$$

Le nombre de degré de liberté correspond ici au nombre de conditions d'orthogonalité puisque aucun paramètre n'est estimé contrairement au cas de la J-statistique.

Exercice 2 (3 points) : Famille de Pearson et Méthode de Moments

On attribue souvent à Karl Pearson la "paternité" de la méthode des moments (voir Berra et Bilias, 2002, pour une revue historique) et l'objectif de cet exercice est de comprendre le lien entre les propriétés des distribution de la famille de Pearson et les méthodes de moments. On admet que si une fonctin de densité $q(.)$ appartient à la famille de lois de Pearson, le ratio $q'(.)/q(.)$ est égal au ratio de deux polynômes $A(x)$ et $B(x)$ tels que :

$$\frac{q'(x)}{q(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{-(x+a)}{c_0 + c_1 x + c_2 x^2} \tag{13}$$

La famille de Pearson inclut notamment les distributions normales, Student, gamma, beta et uniforme.

*Question 1 (*2 points*)* : Dans le cas normal on a

$$\frac{q'(x)}{q(x)} = \frac{-(x-\mu)}{\sigma^2} \tag{14}$$

*Question 2 (*1.5 points*)* : Dans le cas d'une distribution de Student *à* v degrés de liberté, on a :

$$\frac{q'(x)}{q(x)} = -(v+1) \frac{x}{v+x^2} \tag{15}$$

Estimateurs de Moments

On cherche à présent à estimer par la méthode des moments les paramètres $\theta = (a, c_0, c_1, c_2)$ associés à une distribution donnée. On admet que dans le cas d'une fonction de distribution appartenant à la famille de Pearson, on a une relation de récurrence sur les moments de la forme :

$$[c_2(j+2) - 1] E\left[X^{j+1}\right] = [a - c_1(j+1)] E\left[X^j\right] - c_0 j E\left[X^{j-1}\right] \quad j \geq 1 \tag{16}$$

*Question 1 (*1 point) : Il est nécessaire de retenir 4 conditions d'orthogonalité pour que le système soit juste identifié.

Question 2 (1 point) : On considère 4 conditions définies par exemple par :

$$(3c_2-1)\,E\left[X^2\right]=(a-2c_1)\,E\left[X\right]-c_0 \tag{17}$$

$$(4c_2-1)\,E\left[X^3\right]=(a-3c_1)\,E\left[X^2\right]-2c_0E\left[X^1\right] \tag{18}$$

$$(5c_2-1)\,E\left[X^4\right]=(a-4c_1)\,E\left[X^3\right]-3c_0E\left[X^2\right] \tag{19}$$

$$(6c_2-1)\,E\left[X^5\right]=(a-5c_1)\,E\left[X^4\right]-4c_0E\left[X^3\right] \tag{20}$$

Ce qui peut se récrire sous la forme vectorielle :

$$E\left[h\left(X;\theta\right)\right]=0 \tag{21}$$

avec :

$$h\left(X;\theta\right)=\left[\begin{array}{l}(3c_2-1)\,X^2-(a-2c_1)\,X+c_0\\(4c_2-1)\,X^3-(a-3c_1)\,X^2+2c_0X^1\\(5c_2-1)\,X^4-(a-4c_1)\,X^3+3c_0X^2\\(6c_2-1)\,X^5-(a-5c_1)\,X^4+4c_0X^3\end{array}\right] \tag{22}$$

Question 3 (1 point) : La contrepartie empirique de ces conditions d'orthogonalité est :

$$g\left(X;\theta\right)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}h\left(x_i;\theta\right) \tag{23}$$

$$g\left(X;\theta\right)=\frac{1}{N}\left[\begin{array}{l}(3c_2-1)\sum_{i=1}^{N}x_i^2-(a-2c_1)\sum_{i=1}^{N}x_i+Nc_0\\(4c_2-1)\sum_{i=1}^{N}x_i^3-(a-3c_1)\sum_{i=1}^{N}x_i^2+2c_0\sum_{i=1}^{N}x_i^1\\(5c_2-1)\sum_{i=1}^{N}x_i^4-(a-4c_1)\sum_{i=1}^{N}x_i^3+3c_0\sum_{i=1}^{N}x_i^2\\(6c_2-1)\sum_{i=1}^{N}x_i^5-(a-5c_1)\sum_{i=1}^{N}x_i^4+4c_0\sum_{i=1}^{N}x_i^3\end{array}\right] \tag{24}$$

Question 4 (1 point) : L'estimateur des moments classiques $\widehat{\theta}$ construit par Pearson vérifie :

$$g\left(X;\widehat{\theta}\right)=0 \tag{25}$$

ou encore

$$\begin{array}{l}(3\widehat{c}_2-1)\sum_{i=1}^{N}x_i^2-(\widehat{a}-2\widehat{c}_1)\sum_{i=1}^{N}x_i+N\widehat{c}_0=0\\(4\widehat{c}_2-1)\sum_{i=1}^{N}x_i^3-(\widehat{a}-3\widehat{c}_1)\sum_{i=1}^{N}x_i^2+2\widehat{c}_0\sum_{i=1}^{N}x_i=0\\(5\widehat{c}_2-1)\sum_{i=1}^{N}x_i^4-(\widehat{a}-4\widehat{c}_1)\sum_{i=1}^{N}x_i^3+3\widehat{c}_0\sum_{i=1}^{N}x_i^2=0\\(6\widehat{c}_2-1)\sum_{i=1}^{N}x_i^5-(\widehat{a}-5\widehat{c}_1)\sum_{i=1}^{N}x_i^4+4\widehat{c}_0\sum_{i=1}^{N}x_i^3=0\end{array} \tag{26}$$

Question 5 (3 points) : Dans le cas d'une loi normale on sait que $a=-\mu$, $c_0=\sigma^2$, $c_1=0$ et $c_2=0$. On a donc uniquement un seul paramètre σ à estimer et donc on se limite à une condition d'orthogonalité, par exemple :

$$E\left[h\left(X;\theta\right)\right]=0 \tag{27}$$

avec :

$$h\left(X;\theta\right)=\left[-X^2+\mu X+\sigma^2\right] \tag{28}$$

ce qui peut se récrire :

$$\sigma^2=E\left(X^2\right)-\mu E\left(X\right)=E\left(X^2\right)-E\left(X\right)^2 \tag{29}$$

avec $E\left(X\right)=0$. On retrouve bien évidemment un estimateur $\widehat{\theta}$ standard de la variance :

$$g\left(X;\widehat{\theta}\right)=0$$

ou encore

$$(3\widehat{c}_2-1)\sum_{i=1}^{N}x_i^2-(\widehat{a}-2\widehat{c}_1)\sum_{i=1}^{N}x_i+N\widehat{c}_0=0 \tag{30}$$

$$\Leftrightarrow(-1)\sum_{i=1}^{N}x_i^2-(-\mu)\sum_{i=1}^{N}x_i+N\widehat{\sigma}^2=0 \tag{31}$$

$$\Leftrightarrow\sigma^2=(1/N)\sum_{i=1}^{N}x_i^2 \tag{32}$$