Université d'Orléans - Maitrise Econométrie
Econométrie des Variables Qualitatives

Examen Décembre 2002. C. Hurlin

Exercice 1 (15 points) : Politique de Dividendes

On considère un problème de politique de distribution de dividendes dérivé de Maddala (1977). Soit une société par action susceptible de distribuer des dividendes à ses actionnaires de façon régulière à chaque date $t = 1, .., T$. On suppose que le montant des dividendes potentiels y_t^* dépend d'un ensemble de caractéristiques de l'entreprise parmi lesquelles le montant $x_{1,t}$ des bénéfices de l'année écoulée et le montant $x_{2,t}$ des investissements futurs anticipés de la firme à la date t selon la relation :

$$y_t^* = \beta_0 + \beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \varepsilon_t \quad \forall t \tag{1}$$

avec $\beta_1 > 0$, $\beta_2 < 0$ et où les perturbations ε_t sont *i.i.d.* $N\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$ et indépendantes de toutes les variables explicatives du modèle.

On suppose que des dividendes ne sont effectivement versé que lorsque les dividendes potentiels sont positifs. Le montant des dividendes effectif y_t correspond alors au montant des dividendes potentiels :

$$y_t = \begin{cases} y_t^* & \text{si } y_t^* > 0 \\ 0 & \text{si } y_t^* \leq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Partie I : Modélisation Probit (5 points) Dans un premier temps, en tant qu'analyste financier, les actionnaires vous demandent de déterminer la probabilité qu'à une date t l'entreprise étudiée verse effectivement des dividendes et cela sans analyser la valeur de ceux-ci. Vous utiliserez la variable :

$$z_t = \begin{cases} 1 & \text{si } y_t^* > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3}$$

Question 1 *(1 point)* : Modélisez la probabilité que l'entreprise verse des dividendes à la date t en fonction du vecteur de caractéristiques $x_t = (1\ x_{1,t}\ x_{2,t})$. Montrez que l'on obtient un modèle probit de paramètres :

$$\gamma_i = \frac{\beta_0}{\sigma_\varepsilon} \quad i = 0, 1, 2 \tag{4}$$

Question 2 *(1 point)* : Ecrivez la log-vraisemblance du modèle probit associé à un échnatillon de T observations $z = (z_1, .., z_T)$. Soit $\widehat{\gamma}$ l'estimateur du MV du vecteur de paramètres $\gamma = (\gamma_0\, \gamma_1\, \gamma_2)'$. Quelles sont les propriétés asympotiques de cet estimateur ?

Question 3 *(2 points)* : Déterminer l'effet marginal sur la probabilité de distribution des dividendes d'une augmentation d'une unité des bénéfices $x_{1,t}$ de l'entreprise à une date t quelconque. *Exprimez l'effet marginal sous forme d'élasticité et commentez vos résultats.*

Question 4 *(1 point)* : On vous communique une prévision des résultats de l'entreprise pour l'année $T+1$: $bénéfices = 100$ et $investisements\ prévus = 390$. Les résultats d'estimation du modèle probit sur l'échantillon sont les suivants :

$$\widehat{\gamma}_0 = 1 \qquad \widehat{\gamma}_1 = 0.05 \qquad \widehat{\gamma}_2 = -0.29 \tag{5}$$

Fournissez aux actionnaires (i) la probabilité estimée que les dividendes soient effectivement versés en $T+1$ (ii) l'élasticité de la probabilité de versement en $T+1$ par rapport à une augmentation de 1% des bénéfices attendus.

Partie II : Modélisation Tobit (12 points) Les actionnaires s'intéressent à présent à la valeur des dividendes versés et non plus uniquement à la probabilité qu'ils soient effectivement versés. Pour cela on considère que les dividendes effectifs à la date t, notés y_t, sont déterminés par le modèle :

$$y_t = \begin{cases} y_t^* & \text{si } y_t^* > 0 \\ 0 & \text{si } y_t^* \leq 0 \end{cases} \tag{6}$$

où les dividendes potentiels sont décrits par le même modèle que précédemment

$$y_t^* = \beta_0 + \beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \varepsilon_t \quad \forall t \tag{7}$$

avec $\beta_1 > 0$, $\beta_2 < 0$ et ε_t *i.i.d.* $N\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$. On cherche alors à estimer les paramètres β_i et à prévoir le montant des dividendes en fonction des bénéfices $x_{1,t}$ et des investissements $x_{2,t}$. On dispose pour cela d'un échantillon de T observations des dividendes passés $y = (y_1, .., y_T)$ parmi lesquelles on trouve $\overline{T}$ observations correspondent à des années pour lesquelles il n'y pas eu de dividendes versés.

On suppose que les bénéfices et les investissements attendus sont exprimés en déviation à la moyenne :

$$E\left(x_{1,t}\right) = E\left(x_{2,t}\right) = 0 \quad \forall t = 1, .., T \tag{8}$$

et l'on suppose que les investissement de l'entreprise sont deux fois plus volatiles que les bénéfices et que les deux grandeurs sont indépendantes. On pose $x_t = (x_{1,t} \ x_{2,t})$:

$$E\left(x_t' x_t\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \sigma_x^2 \quad \forall t = 1, .., T \tag{9}$$

Question 1 *(3 points)* : Un "bon" ami vous conseille d'estimer les paramètres β_i par la méthodes des *Moindres Carrés Ordinaires* en utilisant les T observations y_i de l'échantillon. A partir des résultats du cours, montrez lui que l'estimateur des *MCO* $\widehat{\beta}_{LS}$ des paramètres $\beta = (\beta_1 \, \beta_2)'$ est alors non convergent et qu'il vérifie alors la propriété suivante :

$$\widehat{\beta}_{LS} \underset{T \to \infty}{\overset{p}{\longrightarrow}} \beta \times \Phi\left[\frac{\beta_0}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 + \left(\beta_1^2 + 2\beta_2^2\right)\sigma_x^2}}\right] \tag{10}$$

Commentez la forme du biais asymptotique et ses conséquences sur l'analyse des dividendes. Existe-t-il une condition sur σ_x^2 qui permette de faire disparaître ce biais asymptotique ?

Question 2 *(2 points)* : Proposez à votre "bon" ami un estimateur convergent de β à partir de son estimateur biaisé $\widehat{\beta}_{LS}$. *Commentez.*

Question 3 *(2 points)* : On se propose d'estimer les paramètres du modèle par maximum de vraisemblance.

(i) Ecrivez la **log-vraisemblance complète** du modèle Tobit associé à un ensemble d'observations $y = (y_1, .., y_T)$ de dividendes y_i et des paramètres $\left(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \sigma_\varepsilon^2\right)$.

(ii) Cette fonction est elle globalement concave ? Qu'implique ce résultat ?

(iii) Proposez une re-paramétrisation de la fonction de log-vraisemblance garantissant la concavité globale de cette fonction.

Question 4 *(3 points)* : Déterminez les effets marginaux associés à une augmentation de 1% des bénéfices de l'entreprise (i) sur les dividendes potentiels y_t^* (ii) sur les dividendes effectifs y_t. *Commentez.*

Question 5 *(2 points)* : Construisez un test du multiplicateur de Lagrange pour tester l'hétéroscédasticité dans un modèle où la variance des perturbations vérifie :

$$\sigma_{\varepsilon,t}^2 = \sigma_\varepsilon^2 \exp\left(\alpha_0 + \alpha_1 w_t\right) \quad \forall t = 1, .., T \tag{11}$$

où $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2 (4 points) : Modèle logit multinomial

Suite à une recrudescence du nombre d'accidents de la circulation, vous avez été embauché par une compagnie d'assurances en qualité d'économètre appliqué. L'objectif de votre travail est de déterminer les types d'individus à risque, c'est-à-dire ayant tendance à occasionner des accidents. Dans une première approche, vous allez vous intéresser aux personnes ayant occasionné au plus deux accidents. Le but de votre étude est alors de définir trois types d'assurés :

- ceux n'ayant pas eu d'accident,
- ceux ayant eu un accident,
- ceux ayant eu deux accidents.

Plusieurs modélisations peuvent être appliquées à votre problème. En particulier donnez une modélisation non séquentielle et une modélisation séquentielle en justifiant l'un et l'autre modèle. Ecrivez ensuite la vraisemblance des deux modèles en question.

Université d'Orléans - Maitrise Econométrie
Econométrie des Variables Qualitatives

Correction Examen Décembre 2002. C. Hurlin

Partie II : Modélisation Tobit (12 points) On considère le modèle suivant :

$$y_t = \begin{cases} y_t^* & \text{si } y_t^* > 0 \\ 0 & \text{si } y_t^* \leq 0 \end{cases} \tag{1}$$

avec $y_t^* = \beta_0 + \beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \varepsilon_t$ et $\beta_1 > 0$, $\beta_2 < 0$ et ε_t *i.i.d.* $N\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$.

Question 1 *(3 points)* :

On sait que l'application des MCO à l'ensemble des observations va conduire à des estimateurs biaisés des paramètres β_0, β_1 et β_2. L'ami n'est sans doute pas si "bon" que ça... Sous les hypothèses de Goldberger (1981), c'est à dire sous l'hypothèse de normalité des variables explicatives x_i, on montre en effet que l'estimateur des MCO est non convregent. Plus précisèment, la proposition 1.2 duc ours stipule que sous les hypothèses de Goldberger (1981), l'estimateur $\widehat{\beta}_{LS}$ des Moindres Carrés Ordinaires obtenu sur l'ensemble des observations (x_i, y_i) vérifie :

$$\widehat{\beta}_{LS} \underset{N\to\infty}{\overset{p}{\longrightarrow}} \beta \times \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma_y}\right)$$

où α correspond à la constante de l'équation $y_i^* = \alpha + x_i\beta + \varepsilon_i$ et $\sigma_y^2 = \sigma_\varepsilon^2 + \beta'\Omega\beta$, où Ω désigne la matrice de variance covariance des variables explicatives x_i. Dans le cadre de notre application, on pose $\beta = (\beta_1\, \beta_2)'$ et $\alpha = \beta_0$, il vient :

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \sigma_\varepsilon^2 + \beta' E\left(x_t' x_t\right)\beta \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_x^2 \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_x^2\left(\beta_1^2 + 2\beta_2^2\right) \end{aligned}$$

Ainsi, le biais asymptotique est défini par :

$$\widehat{\beta}_{LS} \underset{T\to\infty}{\overset{p}{\longrightarrow}} \beta \times \Phi\left[\frac{\beta_0}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 + \left(\beta_1^2 + 2\beta_2^2\right)\sigma_x^2}}\right] \tag{1.5 point}$$

La forme du biais appelle plsusieurs commentaires :

- L'application des MCO va conduire à sous estimer les paramètres β_1 et β_2, puisque par définition $\forall z$ $\Phi(z) \leq 1$, on a donc :

$$\left|\widehat{\beta}_i\right| < \left|\widehat{\beta}_i\right| \quad i = 1, 2 \tag{2}$$

  On va donc sous estimer l'impact des bénéfices et des investissements sur le montant des dividendes potentiels. Par exemple, en cas de repli des bénéfices, l'utilisation des MCO tend à minorer la baisse induite des dividendes versés (*0.5 point*).

- Le biais asymptotique sur les MCO est le même sur β_1 et sur β_2. En effet, on sait que sous l'hypothèse de normalité des variables x_i, le degré de sous estimation est totalement uniforme pour tous les éléments de β (*0.5 point*).

$$\frac{1}{\beta^{(k)}} \underset{N\to\infty}{plim}\ \widehat{\beta}_{y>0}^{(k)} = \xi \quad \forall k = 1, .., K \tag{3}$$

Enfin, il n'existe pas bien entendu de condition sur σ_x^2 perlmettant d'annuler le biais. Pour que celui-ci s'annule il faut que $\widehat{\beta}_{LS} \underset{T\rightarrow\infty}{\overset{p}{\longrightarrow}} \beta$. Il faut pour cela que la condition suivante soit satisfaite :

$$\Phi\left[\frac{\beta_0}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2+\left(\beta_1^2+2\beta_2^2\right)\sigma_x^2}}\right]=1 \Longleftrightarrow \lim_{\sigma_x^2\rightarrow h}\frac{\beta_0}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2+\left(\beta_1^2+2\beta_2^2\right)\sigma_x^2}}=\infty$$

Puisque $\left(\beta_1^2+2\beta_2^2\right)>0$ et $\sigma_\varepsilon^2>0$, il n'existe pas de condition permettant à σ_ε^2 donné de faire disparaître le biais. Même dans le cas où σ_x^2 tend vers 0 (cas où l'on tend vers des variables explicatives déterministes cf. cours), le biais demeure conformément aux démonstrations vues en cours (*0.5 point*).

Question 2 *(2 points)* :

Notre ami, pas si "bon" que cela que ce soit en économétrie ou en conseil, peut construire un estimateur convergent de β à partir de son estimateur biaisé $\widehat{\beta}_{LS}$. Pour cela il doit le corriger du rapport $T/\left(T-\overline{T}\right)$, c'est à dire du ratio du nombre total d'observations T au nombre d'observations pour lesquelles il y a eu effectivement distributions de dividendes, c'est à dire pour lesquelles il y a eu $y_t^*>0$. On peut en effet montrer que :

$$\widehat{\beta}_{LS}^{c}=\left(\frac{T}{T-\overline{T}}\right)\widehat{\beta}_{LS} \underset{T\rightarrow\infty}{\overset{p}{\longrightarrow}} \beta \qquad \text{(1.5 point)}$$

Considérons le cas où $\beta_0=0$. Etant donné que $\Phi(0)=0.5$, lorsque il n'y pas de constante dans la définition de la variable latente y_t^* ($\beta_0=0$), alors on obtient une relation du type *plim* $\left(\widehat{\beta}_{LS}\right)=0.5\times\beta$. Dans ce cas, l'estimateur obtenu sur la totalité de l'échantillon converge asymptotiquement vers la moitié de la vraie valeur β des paramètres. En effet, sous l'hypothèse de normalité avec $E(x_t)=0$, si la constante β_0 est nulle, on a alors $E(y_t^*)=0$. La variable y_t^* est centrée et distribuée selon une loi symétrique, la loi normale $N\left(x_t\beta,\sigma_\varepsilon^2\right)$. Dès lors sous l'hypothèse de Goldberger lorsque $\beta_0=0$, on a $Prob\left(y_t^*>0\right)=Prob\left(y_t^*\leq 0\right)=0.5$. Il y a autant de chance que les dividendes soient versés qu'il ne le soient pas. Pour un échantillon de taille T suffisante, on a donc approximativement autant d'observations nulles de y_t que d'observations strictement positives : $T-\overline{T}\simeq T/2$. Dès lors, la prise en compte de l'ensemble des observations dans l'estimation des MCO va conduire à un estimateur de β convergeant vers la moitié de la vraie valeur du vecteur β (*0.5 point*).

Question 3 *(2 points)* :

On se propose d'estimer les paramètres du modèle par maximum de vraisemblance. Commençons par écrire la log-vraisemblance du modèle tobit. On pose $\beta=(\beta_0\ \beta_1\ \beta_2)'$ et $x_t=(1\ x_{1,t}\ x_{2,t})$. On sait que pour un échantillon de T observations y_t, noté $y=(y_t,..,y_T)$, la vraisemblance de ce modèle est définie par :

$$L\left(y,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\sigma_\varepsilon^2\right)=\prod_{t:\,y_t=0}\left[1-\Phi\left(\frac{x_t\beta}{\sigma_\varepsilon}\right)\right]\prod_{t:\,y_t>0}\left(\frac{1}{\sigma_\varepsilon}\right)\phi\left(\frac{y_t-x_t\beta}{\sigma_\varepsilon}\right)$$

Le premier terme correspond à la probabilité que l'observation y_t soit nulle tandis que le second terme correspond à la densité marginale des dividendes $y_t=y_t^*$ sachant qu'il y a

$$\log L\left(y,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\sigma_\varepsilon^2\right)=\sum_{t:\,y_t=0}\log\left[1-\Phi\left(\frac{x_t\beta}{\sigma_\varepsilon}\right)\right]+\sum_{t:\,y_t>0}\log\left(\frac{1}{\sigma_\varepsilon}\right)\phi\left(\frac{y_t-x_t\beta}{\sigma_\varepsilon}\right) \qquad (4)$$

En arrangeant cette expression, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\log L\left(y,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\sigma_\varepsilon^2\right) &= \sum_{t:\,y_t=0}\log\left[1-\Phi\left(\frac{x_t\beta}{\sigma_\varepsilon}\right)\right]-\left(\frac{T-\overline{T}}{2}\right)\log\left(\sigma_\varepsilon^2\right) \qquad \text{(1 point)}\\ &\quad -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t:\,y_t>0}\left(y_t-x_t\beta\right)-\left(\frac{T-\overline{T}}{2}\right)\ln 2-\left(\frac{T-\overline{T}}{2}\right)\ln\pi^2\end{aligned}$$

On sait d'après les résultats d'Amemiya (1973) que cette fonction de vraisemblance du modèle Tobit paramétrée en β et σ_ε n'est pas globalement concave. Cette propriété est alors particulièrement gênante puisque nous savons que les solutions des algorithmes d'optimisation numérique sont généralement sensibles au problème du choix des conditions initiales. S'il existe des extrema locaux de la fonction à optimiser, en l'occurrence ici la fonction de log-vraisemblance, il peut arriver que l'algorithme converge vers ces extrema locaux. En effet, si l'on utilise des conditions initiales dans l'algorithme d'optimisation relativement proches des extrema locaux de la fonction de log-vraisemblance, alors il y a des risques que l'algorithme d'optimisation s'arrête en ces points pour lesquels le gradient est nul, mais qui ne maximisent pas de façon globale la fonction de log-vraisemblance. On risque alors d'obtenir des estimateurs non convergents des vrais paramètres du modèle Tobit, non pas en raison de mauvaises propriétés de la méthode économétrique utilisée (maximum de vraisemblance), mais simplement en raison de la défaillance de l'algorithme d'optimisation numérique utilisé pour maximiser la log-vraisemblance. (*0.5 point*)

Olsen a proposé une re-paramétrisation permettant d'obtenir une fonction de vraisemblance globalement concave. On sait en effet que la log-vraisemblance d'un modèle Tobit re-paramétrée en $\theta_i = \beta_i/\sigma_\varepsilon$, $i = 0, 1, 2$ et $h = \sigma_\varepsilon^{-1}$ est globalement concave. La log-vraisemblance concentrée devient (*0.5 point*) :

$$\log L(y, \theta_0, \theta_1, \theta_2, h) = \sum_{t:\, y_t=0} \log[1 - \Phi(x_t\theta)] + \left(T - \overline{T}\right) \log(h) \tag{5}$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{t:\, y_t>0} (hy_t - x_t\theta)^2 \tag{6}$$

Question 4 *(3 points)* :

Les effets marginaux dans un modèle de régression censuré correspondent à la déformation des prévisions sur une variable continue engendrée par une variation d'une unité d'une des variables explicatives. Il y alors plusieurs prévisions possible dans le cas du modèle Tobit suivant que l'on s'intéresse à la variable censurée y_t ou à la variable latente y_t^*. Tout d'abord en ce qui concerne les dividendes potentiels y_t^*, on a :

$$\frac{\partial E(y_t^* / x_t)}{\partial x_{1,t}} = \frac{\partial(\beta_0 + \beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t})}{\partial x_{1,t}} = \beta_1 \qquad \forall t = 1, .., T \tag{7}$$

ou par l'élasticité $\varepsilon_{y_i^*/x_i^{[k]}}$:

$$\varepsilon_{y_t^*/x_1} = \frac{\partial E(y_t^* / x_t)}{\partial x_{1,t}} \frac{x_{1,t}}{E(y_t^* / x_t)} = \frac{\beta_1 x_{1,t}}{\beta_0 + \beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t}} \tag{8}$$

Ainsi une augmentation de 1% des bénéfices engendre une augmentation (car $\beta_1 > 0$) de $\varepsilon_{y_t^*/x_1}$% des dividendes potentiels y_t^* (*1 point*). Dans ce cas, l'élasticité moyenne vaut :

$$\overline{\varepsilon}_{y_t^*/x_1} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{\beta_1 x_{1,t}}{\beta_0 + \beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t}} \right)$$

On peut en outre calculer les effets marginaux sur les dividendes effectifs y_t :

$$\frac{\partial E(y_t / x_t)}{\partial x_{1,t}} = \Phi\left(\frac{\beta_0 + \beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t}}{\sigma_\varepsilon} \right) \beta_1 \qquad \forall t = 1, .., T \tag{9}$$

Puisque $\Phi(z) \leq 1$, on a bien naturellement la relation :

$$\frac{\partial E(y_t / x_t)}{\partial x_{1,t}} < \frac{\partial E(y_t^* / x_t)}{\partial x_{1,t}}$$

De la même façon on peut exprimer cette quantité sous forme d'élasticité :

$$\varepsilon_{y_t/x_{1,t}} = \frac{\partial E\left(y_t/\,x_t\right)}{\partial x_{1,t}} \frac{x_{1,t}}{E\left(y_t/\,x_t\right)} = \frac{x_{1,t}\beta_1}{x_i\beta + \sigma_\varepsilon \lambda\left(\frac{x_i\beta}{\sigma_\varepsilon}\right)} \qquad \forall i = 1,..,N \tag{10}$$

avec $x_i\beta = \beta_0 + \beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t}$. Une augmentation de 1% des bénéfices engendre une augmentation (car $\beta_1 > 0$) de $\varepsilon_{y_t^*/x_1}$% des dividendes effectifs y_t (*1 point*). Dans ce cas, l'élasticité moyenne vaut :

$$\overline{\varepsilon}_{y_t/x_1} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{x_{1,t}\beta_1}{x_i\beta + \sigma_\varepsilon \lambda\left(\frac{x_i\beta}{\sigma_\varepsilon}\right)}\right)$$

Cet effet marginal peut se décomposer sous la forme de McDonald et Moffit (1980).

$$\frac{\partial E\left(y_t/\,x_t\right)}{\partial x_{1,t}} = Prob\left(y_t > 0\right)\frac{\partial E\left(y_t/\,x_t, y_{t>0}\right)}{\partial x_{1,t}} + E\left(y_t/\,x_t, y_{t>0}\right)\frac{\partial Prob\left(y_t > 0\right)}{\partial x_{1,t}}$$

Remark 1 *1. D'une part, la variation des bénéfices $x_{1,t}$ modifie l'espérance conditionnelle des dividendes y_t dans la partie positive de la distribution : cela modifie donc le montant des dividendes si ceux-ci sont versés.*

2. D'autre part, la variation des bénéfices $x_{1,t}$ affecte la probabilité que les dividendes soit effectivement versés (1point).

Question 5 *(2 points)* :

Dans ce cas le test de l'hypothèse nulle d'homoscédasticité revient à tester la nullité du coefficient α_1 (et pas de α_0). On a donc un test (*0.5 point*) :

$$H_0 : \alpha = 0$$
$$H_1 : \alpha \neq 0$$

Il y a trois façon de construire la statistique de Lagrange associée à ce test (au choix) :

3. La première consiste tout simplement à appliquer la définition suivante :

$$LM = \left(\left.\frac{\partial \log L\left(y, \widehat{\beta}, \widehat{\sigma}_\varepsilon, \alpha\right)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\right)' Q_{\alpha'\alpha}\left(\left.\frac{\partial \log L\left(y, \widehat{\beta}, \widehat{\sigma}_\varepsilon, \alpha\right)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\right) \tag{11}$$

où $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\sigma}_\varepsilon$ désignent les estimateurs du MV des paramètres β et σ_ε^2 obtenus sous l'hypothèse nulle $\alpha = 0$, et où la matrice $Q_{\alpha'\alpha}$ désigne le bloc de dimension $(1,1)$ correspondant au vecteur de paramètre α de la matrice inverse de la matrice d'information de Fischer estimée sous H_0 :

$$\left.\underset{(5,5)}{I\left(\widehat{\beta}, \widehat{\sigma}_\varepsilon^2, \alpha\right)^{-1}}\right|_{\alpha=0} = \left(\begin{array}{c|c|c} \underset{(3,3)}{Q_{\beta\beta'}} & \underset{(3,1)}{Q_{\beta\sigma_\varepsilon^2}} & \underset{(3,1)}{Q_{\beta'\alpha}} \\ \hline \underset{(1,3)}{Q_{\beta'\sigma_\varepsilon^2}} & \underset{(1,1)}{Q_{\sigma_\varepsilon^2}} & \underset{(1,1)}{Q_{\alpha'\sigma_\varepsilon^2}} \\ \hline \underset{(1,3)}{Q_{\alpha'\beta}} & \underset{(1,1)}{Q_{\alpha\sigma_\varepsilon^2}} & \underset{(1,1)}{Q_{\alpha\alpha'}} \end{array}\right) \tag{12}$$

4. Une autre expression de la statistique LM du test de l'hypothèse nulle d'homoscédasticité $H_0 : \alpha = 0$ est :

$$\underset{(1,1)}{LM} = \underset{(1,T)}{e_T'}\ \underset{(T,5)}{G\left(\widehat{\beta}, \widehat{\sigma}_\varepsilon^2, 0\right)}\left[\underset{(5,T)}{G\left(\widehat{\beta}, \widehat{\sigma}_\varepsilon^2, 0\right)'}\underset{(T,5)}{G\left(\widehat{\beta}, \widehat{\sigma}_\varepsilon^2, 0\right)}\right]^{-1}\underset{(5,T)}{G\left(\widehat{\beta}, \widehat{\sigma}_\varepsilon^2, 0\right)'}\underset{(T,1)}{e_T} \tag{13}$$

où e_T désigne un vecteur unitaire de dimension $(T,1)$ et où $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\sigma}_{\varepsilon}$ désignent les estimateurs du MV des paramètres β et σ_{ε}^2 obtenus sous l'hypothèse nulle $\alpha = 0$ avec

$$\left. \underset{(T,5)}{G\left(\widehat{\beta},\widehat{\sigma}_{\varepsilon}^2,0\right)} \right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} \underset{(1,5)}{g_1\left(\widehat{\beta},\widehat{\sigma}_{\varepsilon}^2,0\right)} \\ ... \\ \underset{(1,5)}{g_T\left(\widehat{\beta},\widehat{\sigma}_{\varepsilon}^2,0\right)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{a}_1 x_1' & \widehat{b}_1 & \widehat{\sigma}_{\varepsilon}^2 \widehat{b}_1 w_1' \\ & ... & \\ \widehat{a}_T x_T' & \widehat{b}_T & \sigma_{\varepsilon}^2 \widehat{b}_T w_T' \end{pmatrix}$$

$$a_t = -\frac{1}{\sigma_{\varepsilon}}\left(1-z_t\right)\widetilde{\lambda}\left(\frac{x_t\beta}{\sigma_{\varepsilon}}\right) + \frac{z_t}{\sigma_{\varepsilon}}\left(y_t - x_t\beta\right) \tag{14}$$

$$b_t = \frac{1}{2\sigma_{\varepsilon}^3}\left(1-z_t\right)x_t\beta\,\widetilde{\lambda}\left(\frac{x_t\beta}{\sigma_{\varepsilon}}\right) - \frac{z_t}{2\sigma_{\varepsilon}^2} + \frac{z_t}{2\sigma_{\varepsilon}^4}\left(y_t - x_t\beta\right)^2 \tag{15}$$

avec $\widetilde{\lambda}(z) = \phi(z)/[1-\Phi(z)] = \lambda(-z)$ et où la quantité z_t correspond à la variable dichotomique simple suivante :

$$z_t = \begin{cases} 1 & \text{si } y_t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{16}$$

5. Une troisième expression de la statistique LM du test de l'hypothèse nulle d'homoscédasticité H_0 : $\alpha = 0$ est :

$$LM = T\ R^2 \tag{17}$$

où T désigne le nombre d'observations et où R^2 est le coefficient de détermination de la régression du vecteur unitaire $e_T = (1,...1)'$ de dimension $(T,1)$ sur les 5 colonnes de la matrice $G\left(\widehat{\beta},\widehat{\sigma}_{\varepsilon}^2,0\right)$.

Quelle que soit la mainère de construire LM, on montre alors que sous H_0 cette statistique converge en loi :

$$LM \underset{N\to\infty}{\overset{L}{\longrightarrow}} \chi^2(1) \tag{18}$$

Ainsi, si la réalisation de la statistique LM est supérieure au fractile de la loi du chi-2 à 1 degrés de liberté, alors on rejette l'hypothèse nulle d'homoscédasticité. Les résidus du modèle Tobit sont hétéroscédastiques : les estimateurs du MV des paramètres β et σ_{ε}^2 sont asymptotiquement biaisés selon les résultats d'Arabmazar et Schmidt (1981) (*1 point*).

$\boxed{\textbf{Correction Décembre 2002}}$

Exercice 1

<u>Partie I : Modélisation Probit</u>

Q1 - La probabilité que l'entreprise verse des dividendes est déterminée par:

$$\Pr\text{ob}(z_t = 1) = \Pr\text{ob}(y_t^* > 0)$$

ce qui peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \Pr\text{ob}(z_t = 1) &= \Pr\text{ob}(\varepsilon_t) - x_t\beta) \\ &= 1 - F(-x_t\beta) \end{aligned} \qquad \text{(0,5pt)}$$

avec $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)'$ et $x_t = (x_{1,t}, x_{2,t})$.

Sachant que $\varepsilon_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, on a alors :

$$\begin{aligned} \Pr\text{ob}(z_t &= 1) = \Pr\text{ob}(\frac{\varepsilon_t}{\sigma_\varepsilon} > -x_t\frac{\beta}{\sigma_\varepsilon}) \\ &\Leftrightarrow \Pr\text{ob}(z_t = 0) = \Phi(x_t\frac{\beta}{\sigma_\varepsilon}) \end{aligned}$$

où $\Phi(x)$ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. On reconnaît ici la probabilité associé à un modèle probit de paramètre $\widetilde{\beta}$:

$$\Pr\text{ob}(z_t = 1) = \Phi(x_t, \widetilde{\beta}) \qquad \text{(0,5 pt)}$$

avec $\widetilde{\beta} = \beta/\sigma_\varepsilon$ ou encore $\widetilde{\beta} = (\widetilde{\beta}_0, \widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2)$

$$\widetilde{\beta}_0 = \frac{\beta_0}{\sigma_\varepsilon} \qquad \widetilde{\beta}_1 = \frac{\beta_1}{\sigma_\varepsilon} \qquad \widetilde{\beta}_2 = \frac{\beta_2}{\sigma_\varepsilon}$$

Q2 - La log-vraisemblance associée à un échantillon de T observations noté $z = (z_1, ..., z_T)$. On a une observation z_t

$$L(z_t, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) = p_t^{z_t}(1 - p_t)^{1-z_t} \text{ avec } p_t = \Pr\text{ob}(z_t = 1) = \Phi(x_t, \gamma)$$

Dès lors la log-vraisemblance associée à l'échantillon $z = (z_1, z_2, ..., z_T)$ est :

$$\log\ L(z_t, \gamma) =_{t=1}^{T} z_t\ \log[\Phi(x_t, \gamma) + (1 - z_t)\log[1 - \Phi(x_t, \gamma)]$$

avec $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)'$ et où la variable dichotomique z_t est définie par :

$$z_t = \begin{cases} 1 & \text{si } y_t^* = x_t\beta + \varepsilon_t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On sait d'après le cours, que sous certaines conditions de régularité, l'estimateur du $\mathcal{N}$ est convergent

$$\widehat{\gamma}\overrightarrow{T \to \infty}^{P} \gamma$$

De plus on a le résultat suivant :

$$\sqrt{T}(\widehat{\gamma} - \gamma) \underset{T \to \infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} \mathcal{N}(0, I(\gamma)) \qquad (0{,}5 \text{ pt})$$

où

$$I(\gamma) = -E\left[\frac{\partial^2 \log L(y,\gamma)}{\partial\gamma\partial\gamma'}\right] =_{t=1}^{\mathcal{N}} \frac{\phi(x_t,\gamma)^2}{\Phi(x_t,\gamma)[1 - \Phi(x_t,\gamma)]} x_t', x_t$$

où $\phi(.)$ désigne la densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Q3 - L'effet marginal mesure ici l'augmentation de la probabilité de versement de dividende suscitée par l'augmentation des bénéfices. Formellement, on a :

$$\begin{aligned} \forall t \ \frac{U \Pr\text{ob}(z_t = 1)}{U x_{1,t}} &= \frac{\partial}{\partial x_1, t}\Phi(x_t,\gamma) = \frac{\partial\Phi(.)}{\partial(x_t,\gamma)}\frac{\partial(x_t,\gamma)}{\partial x_1, t} \\ &= \phi(x_t,\gamma).\gamma_1 = \phi(x_t,\gamma).\frac{\beta_1}{\sigma_\varepsilon} \end{aligned}$$

où $\phi(.)$ désigne la fonction de distribution de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.L'élasticité correspondante est la suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon p_t/x_{1,t} &= \frac{\partial \Pr\text{ob}(x_t = 1)}{\partial x_{1,t}} \cdot \frac{x_{1,t}}{\Pr\text{ob}(z_t = 1)} 0,5pt \qquad (1) \\ &\Leftrightarrow \ \varepsilon p_t/x_{1,t} = \phi(x_t,\gamma) \cdot \frac{\gamma_1.x_{1,t}}{\Phi(x_t,\gamma)} \\ &\Leftrightarrow \ \varepsilon p_t/x_{1,t} = \lambda(x_t,\gamma) \cdot \gamma_1.x_{1,t} \qquad \forall t \end{aligned}$$

où $\lambda(.)$ désigne le ratio de Mill.

Commentaire : Une hausse de 1 % des bénéfices de l'entreprise augmente de $\varepsilon p_t/x_{1,t}\%$ la probabilité que l'entreprise verse effectivement des dividendes à cette date. On constate que via le ratio de Mill, cette élasticité dépend des autres variables ($x_{z,t}$ ici) qui déterminent l'environnement économique de l'entreprise.

Q4 - On suppose ici à la date $T+1$

$$x_{1,T+1} = 100 \qquad x_{2,T+1} = 390.$$

Les estimations au point moyen de l'échantillon donnent :

$$\widehat{\gamma}_0 = 1 \qquad \widehat{\gamma}_1 = 0,05 \qquad \widehat{\gamma}_2 = -0,29$$

(i) Probabilité de versement de dividendes en $T+1$:

$$\begin{aligned} \Pr\mathrm{ob}(z_{T+1} &= 1) = \Phi(x_{T+1}\widehat{\gamma}) \\ &= \Phi(1 + 0,05 \times 100 - 0,29 \times 390) \\ &= \Phi(-0,10) = 1 - \Phi(0,10) \end{aligned}$$

On a donc

$$\Pr\mathrm{ob}(z_{T+1} = 1) = 0,4602 \qquad \text{(0,5 pt)}$$

(ii) élasticité

On a vu que :

$$\widetilde{e} = ep_{T+1}/x_{1,T+1} = \lambda(x_{T+1}, \widehat{\gamma}) \cdot \widehat{\gamma}_1.x_{1,T+1}.$$

Ici

$$\begin{aligned} \widetilde{e} &= \frac{\phi(-0,10)}{\Phi(-0,10)} \times 0,05 \times 100 \\ &\Leftrightarrow \widetilde{e} = \frac{\phi(0,10)}{1 - \Phi(0,10)} \times 0,05 \times 100 \end{aligned}$$

$$\widetilde{e} \simeq 8,62 \qquad \text{(0,5 pt)}$$

Si les bénéfices attendus en $T+1$ augmentent de 1 % cela augmente la probabilité de versement de dividendes de 8,62 %.