# Université d'Orléans - Master Econométrie et Statistique Appliquée
# Econométrie des Variables Qualitatives

Christophe HURLIN

Correction Examen Mai 2010. C. Hurlin

Exercice 1 (13 points) : Modèle Logit[1]

**Question 1** *(1 point)* : Sous ces hypothèse, la probabilité d'apparition de l'évenement $y_i = 1$ s'écrit :

$$\Pr(y_i = 1) = \Lambda(\alpha + \beta x_i) = \frac{1}{1 + \exp(-\alpha - \beta x_i)} \tag{1}$$

**Question 2** *(2 points)* : La log-vraisemblance de ce modèle logit s'écrit de la façon habituelle :

$$\ln L(y; \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{N} y_i \ln[\Lambda(\alpha + \beta x_i)] + (1 - y_i) \ln[1 - \Lambda(\alpha + \beta x_i)] \tag{2}$$

Dans le cadre de cette application, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \ln L(y; \alpha, \beta) &= 16 \times \ln[\Lambda(\alpha + \beta)] + 26 \times \ln[\Lambda(\alpha)] \\ &\quad + 32 \times \ln[1 - \Lambda(\alpha + \beta)] + 26 \times \ln[1 - \Lambda(\alpha)] \end{aligned} \tag{3}$$

Ce qui peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \ln L(y; \alpha, \beta) &= -16 \times \ln[1 + \exp(-\alpha - \beta)] - 26 \times \ln[1 + \exp(-\alpha)] \\ &\quad + 32 \times \ln[\exp(-\alpha - \beta)] - 32 \times \ln[1 + \exp(-\alpha - \beta)] \\ &\quad + 26 \times \ln[\exp(-\alpha)] - 26 \times \ln[1 + \exp(-\alpha)] \end{aligned} \tag{4}$$

Après simplification, on obtient :

$$\begin{aligned} \ln L(y; \alpha, \beta) &= -48 \times \ln[1 + \exp(-\alpha - \beta)] - 52 \times \ln[1 + \exp(-\alpha)] \\ &\quad - 58 \times \alpha - 32 \times \beta \end{aligned} \tag{5}$$

[1] D'après l'exemple donné dans le polycopié de cours de Jean Marc Robin "Econométrie des Variables Qualitatives", Université Paris 1.

**Question 3** *(2 points)* : On cherche les estimateurs du MV $\left(\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\right)$ tels que :

$$\left(\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\right) = \underset{\{\alpha,\beta\}}{\arg\max}\left[\ln\ L\left(y;\alpha,\beta\right)\right] \tag{6}$$

Les conditions nécessaires s'écrivent :

$$\left.\frac{\partial \ln\ L\left(y;\alpha,\beta\right)}{\partial\alpha}\right|_{\left(\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\right)} = 48\ \left[\frac{\exp\left(-\widehat{\alpha}-\widehat{\beta}\right)}{1+\exp\left(-\widehat{\alpha}-\widehat{\beta}\right)}\right] + 52\left[\frac{\exp\left(-\widehat{\alpha}\right)}{1+\exp\left(-\widehat{\alpha}\right)}\right] - 58 = 0 \tag{7}$$

$$-\left.\frac{\partial \ln\ L\left(y;\alpha,\beta\right)}{\partial\beta}\right|_{\left(\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\right)} = 48\ \left[\frac{\exp\left(-\widehat{\alpha}-\widehat{\beta}\right)}{1+\exp\left(-\widehat{\alpha}-\widehat{\beta}\right)}\right] - 32 = 0 \tag{8}$$

D'où l'on tire que :

$$\exp\left(-\widehat{\alpha}-\widehat{\beta}\right) = 2 \tag{9}$$

$$32 + 52\left[\frac{\exp\left(-\widehat{\alpha}\right)}{1+\exp\left(-\widehat{\alpha}\right)}\right] - 58 = 0 \tag{10}$$

Ou encore :

$$\frac{\exp\left(-\widehat{\alpha}\right)}{1+\exp\left(-\widehat{\alpha}\right)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

On en déduit la valeur de $\widehat{\alpha}$ :

$$\exp\left(-\widehat{\alpha}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\exp\left(-\widehat{\alpha}\right) \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow \exp\left(-\widehat{\alpha}\right) = 1 \tag{12}$$

$$\widehat{\alpha} = 0 \tag{13}$$

On en déduit alors l'estimateur de MV de $\widehat{\beta}$ puisque :

$$\exp\left(-\widehat{\alpha}-\widehat{\beta}\right) = \exp\left(-\widehat{\beta}\right) = 2 \tag{14}$$

$$\widehat{\beta} = -\ln\left(2\right)$$

**Question 4** *(2 points)* : Déterminons l'effet marginal associé à la variable $x$. Sachant que la variable $x_i$ est dichotomique, cet effet marginal s'écrit sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{\,p_i|x_i} = \Pr\left(\left.y_i = 1\right| x_i = 1\right) - \Pr\left(\left.y_i = 1\right| x_i = 0\right) \tag{15}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\,p_i|x_i} &= \Lambda\left(\alpha+\beta\right) - \Lambda\left(\alpha\right) & (16)\\ &= \left(\frac{1}{1+\exp\left(-\alpha-\beta\right)}\right) - \left(\frac{1}{1+\exp\left(-\alpha\right)}\right) & (17)\end{aligned}$$

On vérifie d'ores et déjà, qu'étant donné la nature dichotomique de la variable $x_i$ et la spécification du modèle, l'effet marginal de la variable $x_i$ est le même pour tous les individus $i = 1, .., N$ de l'échantillon. L'estimation de l'effet marginal vaut :

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_{p_i|x_i} &= \Lambda\left(\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}\right) - \Lambda\left(\widehat{\alpha}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1+\exp\left(-\widehat{\alpha}-\widehat{\beta}\right)}\right) - \left(\frac{1}{1+\exp\left(-\widehat{\alpha}\right)}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1+\exp\left(\ln\left(2\right)\right)}\right) - \left(\frac{1}{1+\exp\left(0\right)}\right) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} && (18) \\
&= -\frac{1}{6} && (19)
\end{aligned}$$

**Question 5** *(2 points)* : On cherche à l'hypothèse nulle $H_0 : \beta = 0$ en utilisant un test de ratio de vraisemblance. On doit donc considérer la statistique suivante :

$$LRT = -2 \times \left[\ln\, L\left(y;\widehat{\alpha},0\right) - \ln\, L\left(y;\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\right)\right]$$

où $L\left(y;\widehat{\alpha},0\right)$ désigne la log-vraisemblance du modèle probit obtenue sous l'hypothèse nulle $H_0 : \beta = 0$. On sait que sous l'hypothèse alternative, on a :

$$\widehat{\alpha} = 0 \quad \widehat{\beta} = -\ln\left(2\right) \tag{20}$$

Dès lors la valeur de la log-vraisemblance sous l'hypothèse alternative est :

$$\begin{aligned}
\ln\, L\left(y;\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\right) &= -48 \times \ln\left[1+\exp\left(-\widehat{\alpha}-\widehat{\beta}\right)\right] - 52 \times \ln\left[1+\exp\left(-\widehat{\alpha}\right)\right] \\
&\quad -58 \times \widehat{\alpha} - 32 \times \widehat{\beta} \\
&= -48 \times \ln\left[1+\exp\left(\ln\left(2\right)\right)\right] - 52 \times \ln\left[1+\exp\left(0\right)\right] + 32 \times \ln\left(2\right) \\
&= -48 \times \ln\left(3\right) - 20 \times \ln\left(2\right) && (21) \\
&\simeq 66.59 && (22)
\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse nulle la log-vraisemblance s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\ln\, L\left(y;\alpha,0\right) &= -48 \times \ln\left[1+\exp\left(-\widehat{\alpha}\right)\right] - 52 \times \ln\left[1+\exp\left(-\widehat{\alpha}\right)\right] - 58 \times \widehat{\alpha} \\
&= -100 \times \ln\left[1+\exp\left(-\widehat{\alpha}\right)\right] - 58 \times \widehat{\alpha} && (23)
\end{aligned}$$

Dès lors la maximisation de la vraisemblance donne :

$$\left.\frac{\partial \log\, L\left(y;\alpha,0\right)}{\partial \alpha}\right|_{\widehat{\alpha}} = 100 \times \left[\frac{\exp\left(-\widehat{\alpha}\right)}{1+\exp\left(-\widehat{\alpha}\right)}\right] - 58 = 0 \tag{24}$$

D'om l'on tire que :

$$\exp\left(-\widehat{\alpha}\right) = \frac{58}{42} \tag{25}$$

Par conséquent, la valeur de la log-vraisemblance sous l'hypothèse nulle est :

$$\begin{aligned}
\ln\, L\left(y;\alpha,0\right) &= -100 \times \ln\left[1+\exp\left(-\widehat{\alpha}\right)\right] - 58 \times \widehat{\alpha} && (26) \\
&= -100 \times \ln\left[1+\frac{58}{42}\right] + 58 \times \ln\left(\frac{58}{42}\right) && (27) \\
&= -100 \times \ln\left(\frac{100}{42}\right) + 58 \times \ln\left(\frac{58}{42}\right) && (28) \\
&\simeq -68.02 && (29)
\end{aligned}$$

On en déduit la valeur de la statistique LRT :

$$\begin{aligned} LRT &= -2 \times \left[ \log\, L\left(y;\widehat{\alpha},0\right) - \log\, L\left(y;\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\right) \right] \\ &= -2 \times (-68.02 - 66.59) \\ &= 2.86 \end{aligned} \tag{30}$$

Sous $H_0$, cette statistique suit une loi du chi-deux à 1 degré de liberté. Pour un risque de première espèce, le seuil critique est égal à 3.84, donc on ne peut rejetter $H_0 : \beta = 0$.

**Question 6** *(2 point)* : Par définition, on a :

$$R^2 \text{ de McFadden (1974) } = 1 - \frac{\log\, L\left(y,\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\right)}{\log\, L\left(y,\alpha,0\right)} \tag{31}$$

Donc ici, on a :

$$R^2 \text{ de McFadden (1974)} = 1 - \frac{-66.59}{-68.02} = 0.021 \tag{32}$$

**Question 7** *(2 points)* : Calculons les probabilités estimées de réalisation de l'événement $y_i = 1$ à partir de la formule suivante :

$$\widehat{\Pr}\left(y_i = 1\right) = \Lambda\left(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}x_i\right) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\widehat{\alpha} - \widehat{\beta}x_i\right)}$$

| Nombre d'Observations | $y_i$ | $x_i$ | $\widehat{\Pr}\left(y_i = 1\right)$ |
|---|---|---|---|
| 16 observations | $y_i = 1$ | $x_i = 1$ | $\frac{1}{3}$ |
| 26 observations | $y_i = 1$ | $x_i = 0$ | $\frac{1}{2}$ |
| 32 observations | $y_i = 0$ | $x_i = 1$ | $\frac{1}{3}$ |
| 26 observations | $y_i = 0$ | $x_i = 0$ | $\frac{1}{2}$ |

ROC Curve cf. cours

## Exercice 2 (7 points) : Probit polytomique ordonné[2]

**Question 1** *(1 point)* : Bien évidemment dans cette formulation du probit ordonné, $s_0 = -\infty$ et $s_4 = \infty$. Pour les seuils réels, on a :

$$\widehat{s}_1 = -1.178 \quad \widehat{s}_2 = -0.237 \quad \widehat{s}_3 = 0.0692 \tag{33}$$

**Question 2** *(1 point)* : On peut interpréter les coefficients des variables explicatives soit en terme d'effet sur la variable latente $y_i^*$ lorsqu'elle a un sens economique, soit en termes d'effet marginal sur les probabilités relatives à la fréquentation du cinéma. Si l'on raisonne par rapport à la variable latente $y_i^*$, que l'on peut qualifier ici de propesnion à aller au cinéma, on peut faire l'analyse suivante. L'effet du revenu est positif : ceux qui ont un

[2] D'après le contrôle 2009 du cours de Jean Marc Robin "Econométrie des Variables Qualitatives", Université Paris 1, proposé par Jérôme Lê (PSE).

revenu plus élevé sont ceux qui ont une propension plus grande à fréquenter réguliérement les cinémas (par rapport à la modalité de référence des individus gagnant moins de 27000 euros). L'effet de l'âge est parabolique : $g(age) = -0.0505771 + 0.0002515 age^2$. L'effet marginal $\partial g(.)/\partial age < 0$ si $age < 100$ ans environ. Dès lors, l'effet de l'âge est donc globalement n´egatif sur la fr´equentation du cin´ema : les plus âgés sortent moins souvent au cinéma. Le fait d'habiter une grande ville est corrélé positivement au fait d'avoir une plus grande propension à se rendre au cinéma, on peut supposer que cela résulte d'un effet d'offre : dans les grandes villes, il y a plus de cinémas. L'effet du diplôme est positif. Comme on a contrôlé par le revenu, il ne peut s'agir d'une contrainte financière : on peut supposer que la fréquentation du ciné ma est positivement liée au capital culturel. Maitenant, si l'on raisonne en termes d'effet marginal sur les probabilités, on sait que le signe des coefficients ne peut pas être interprétés sauf dans les probabilités extrêmales ($F = 0$ et $F = 3$).

**Question 3** *(1 point)* : Dans un modèle probit ordonné, on ne peut pas identifier simultanément les seuils, la constante et la variance de $\varepsilon_i$.

$$\begin{aligned} \Pr(F_i = 1) &= \Pr(s_1 < y_i^* \leq s_2) = \\ &= \Phi\left(\frac{s_2}{\sigma_\varepsilon} - \frac{x_i\beta}{\sigma_\varepsilon}\right) - \Phi\left(\frac{s_1}{\sigma_\varepsilon} - \frac{x_i\beta}{\sigma_\varepsilon}\right) \end{aligned} \quad (34)$$

où $\Phi(.)$ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

**Question 4** *(1 point)* : Soit $\widehat{s}_2$ l'estimateur du MV de $s_i/\sigma_\varepsilon$ et $\widehat{\beta}$ l'estimateur du MV de $\beta/\sigma_e$. On a donc :

$$\Pr(F_i = 1) = \Phi\left(\widehat{s}_2 - x_i\widehat{\beta}\right) - \Phi\left(\widehat{s}_1 - x_i\widehat{\beta}\right). \quad (35)$$

Dans notre cas, on a :

$$x_i\widehat{\beta} = 0.7555 - 0.0506 * 35 + 0.0003 * 352 = -0.9099. \quad (36)$$

$$\widehat{s}_2 = -0.2379. \quad (37)$$

$$\widehat{s}_1 = -1.178. \quad (38)$$

On a donc :

$$\Pr(F_i = 1) = 0.3553. \quad (39)$$

**Question 5** *(2 points)* : L'effet marginal est alors le suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pr(F_i = 1)}{\partial age_i} &= \frac{\partial \Phi\left(\widehat{s}_2 - x_i\widehat{\beta}\right)}{\partial age_i} - \frac{\partial \Phi\left(\widehat{s}_1 - x_i\widehat{\beta}\right)}{\partial age_i} \\ &= \left[\phi\left(\widehat{s}_2 - x_i\widehat{\beta}\right) - \phi\left(\widehat{s}_1 - x_i\widehat{\beta}\right)\right] \frac{\partial x_i\widehat{\beta}}{\partial age_i}, \end{aligned} \quad (40)$$

où $\phi(.)$ désigne la densité d'une loi normale standard et où $x_i\widehat{\beta}$ désigne l'index

$$x_i\widehat{\beta} = \alpha + \widehat{\beta}_1 age_i + \widehat{\beta}_2 (age_i)^2, \quad (41)$$

Dès lors :

$$\frac{\partial \Pr(F_i = 1)}{\partial age_i} = \left[\phi\left(\widehat{s}_2 - x_i\widehat{\beta}\right) - \phi\left(\widehat{s}_1 - x_i\widehat{\beta}\right)\right]\left(\widehat{\beta}_1 + 2\widehat{\beta}_2 age_i\right), \quad (42)$$

De façon générale, on ne peut donc pas conclure sur le signe de cet effet marginal, et cela même si $\widehat{\beta}_1 + 2\widehat{\beta}_2 age_i > 0$. Tout dépend de l'écart entre $\phi\left(\widehat{s}_2 - x_i\widehat{\beta}\right)$ et $\phi\left(\widehat{s}_1 - x_i\widehat{\beta}\right)$. Pour un individu de 35 ans, l'index vaut :

$$x_i\widehat{\beta} = -0.0505771 * 35 + 0.0002515 * 35\hat{}^2 = -1.4621 \tag{43}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pr(F_i = 1)}{\partial age_i} &= [\phi(-0.2379 + 1.4621) - \phi(-1.178 + 1.4621)](-0.0505771 + 0.0002515 * 35) \\ &= -0.0116 \end{aligned} \tag{44}$$

On vérifie que pour cet individu l'effet est négatif.

**Question 6** *(2 points)* : Pour le diplôme, on en peut adopter le raisonnement marginal précédent pour déterminer l'effet marginal. On considère une référence : le cas sans dipôme en l'occurence, et l'on cherche à déterminer la variation de probabilité induite par le passage de cette référence à un niveau de diplôme donnée, toutes caractéristiques données par ailleurs. Pour un non diplômé on a :

$$\Pr(F_i = 1|\, Z_i = 0) = \Phi(\widehat{s}_2 - w_i\widehat{\gamma}) - \Phi(\widehat{s}_1 - w_i\widehat{\gamma}). \tag{45}$$

Pour un titulaire du bac, on a :

$$\Pr(F_i = 1|\, Z_i = 3) = \Phi(\widehat{s}_2 - w_i\widehat{\gamma} - \pi_3) - \Phi(\widehat{s}_1 - w_i\widehat{\gamma} - \pi_3). \tag{46}$$

Dès lors l'effet marginal est :

$$\begin{aligned} & \Pr(F_i = 1|\, Z_i = 3) - \Pr(F_i = 1|\, Z_i = 0) \\ = \; & \Phi(\widehat{s}_2 - w_i\widehat{\gamma} - \pi_3) - \Phi(\widehat{s}_1 - w_i\widehat{\gamma} - \pi_3) - \Phi(\widehat{s}_2 - w_i\widehat{\gamma}) + \Phi(\widehat{s}_1 - w_i\widehat{\gamma}) \end{aligned} \tag{47}$$

**Question 7** *(1 point)* : On pose :

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } y_i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall i = 1.., N \;\; \forall j = 0, 1, .., m$$

Seuls les paramètres $\widetilde{\beta} = \beta/\sigma_\varepsilon$ et $\widetilde{c_j} = c_j/\sigma_\varepsilon$ sont identifiables. La vraisemblance s'écrit alors en fonction de ces paramètres comme suit :

$$L\left(y, \widetilde{\beta}, \widetilde{c}_1, .., \widetilde{c}_m\right) = \prod_{i=1}^{N}\prod_{j=0}^{3}\left[\Phi\left(\widetilde{s}_{j+1} - x_i\widetilde{\beta}\right) - \Phi\left(\widetilde{s}_j - x_i\widetilde{\beta}\right)\right]^{y_{ij}} \tag{48}$$