Université Paris IX Dauphine

UFR Economie Appliquée

Maîtrise Economie Appliquée

SERIES TEMPORELLES

CONTRÔLE NOVEMBRE 2001

Tout Document Autorisé, Calculatrice Autorisée

Durée : 2 heures 30

Objectif : *Cet examen a pour objectif de proposer un modélisation économétrique du concept macroéconomique de convergence des économies réelles. Il s'agit ici plus particulièrement de lier ce concept à la notion de stationnarité.*

Convergence des Pib par tête (10,5 points)

Contexte : Une des implications forte des représentations traditionnelles de la croissance, comme le modèle de Solow, réside dans la **propriété de convergence**, dite convergence absolue :

« Dans le modèle de Solow, la stabilité de l'équilibre régulier implique que deux économies qui ne différeraient ni par la technologie, ni par les comportements d'épargne, ni par la démographie, mais seulement par leur niveau de capital par tête, convergeraient l'une vers l'autre sur le même sentier régulier où elles obtiendraient le même revenu par tête » (Jacques et Rebeyrol, *Croissance et Fluctuations*, Dunod 2001)

Le but de cet examen est de traduire ce concept économique de convergence en hypothèse statistique testable. Soit $\mathrm{y}_{1,\mathrm{t}}$ le niveau du PIB par tête du pays 1 à la date *t* et soit $\mathrm{y}_{2,\mathrm{t}}$ le niveau du PIB par tête du pays 2 à la date *t*.

Question n°1 : On note $\hat{y}_{1,t+k}$ (respectivement $\hat{y}_{2,t+k}$) la prévision, à un horizon de *k* périodes, du niveau de PIB par tête du pays 1 (respectivement 2) conditionnellement à l'information disponible à la date *t* (*1.5 points*):

$$\hat{y}_{1,t+k} = E\left(y_{1,t+k} / y_{1,t}, y_{1,t-1}, y_{1,t-2}, ...\right) \qquad \hat{y}_{2,t+k} = E\left(y_{2,t+k} / y_{2,t}, y_{2,t-1}, y_{2,t-2}, ...\right)$$

(i) **Sans faire aucun calcul, à partir de la définition économique**, expliquez quelle relation entre $\hat{y}_{1,t+k}$ et $\hat{y}_{2,t+k}$, implique le concept de convergence absolue entre les pays 1 et 2, lorsque l'on considère des horizons k de prévisions très éloignés (c'est à dire lorsque k tend vers l'infini) **(1.5 points)**

(ii) Dans un article de référence, Bernard et Durlauf (1995) proposent une **définition statistique de la notion de convergence**. Selon cette définition, il y a convergence des PIB par tête des pays 1 et 2 si et seulement si :

$$\lim_{k\to\infty} E\left(y_{1,t+k} - y_{2,t+k} / I_t\right) = 0 \qquad (1)$$

où I_t désigne l'ensemble d'information disponible à la date t. Montrez que la relation entre $\hat{y}_{1,t+k}$ et $\hat{y}_{2,t+k}$ obtenue à la question précédente peut être exprimée sous la forme (1) **(1 point)**.

<u>Question n°2 :</u> *L'objectif de cette question est de montrer si le processus* $(x_t, t \in Z)$ *correspondant aux écarts de PIB par tête,* $x_t = y_{1,t} - y_{2,t}$*, est stationnaire, alors sous certaines conditions sur* $E(x_t)$*, la définition de la convergence absolue peut être satisfaite*. Soit un processus $(x_t, t \in Z)$ des écarts de PIB par tête entre deux pays tel que :

$$x_t = c + \frac{5}{8} x_{t-1} - \frac{1}{16} x_{t-2} + \mu_t$$

avec μ_t *i.i.d.*$(0, \sigma_\mu^2)$ et $c \in \mathbb{R}$.

(i) Vérifiez que le processus $(x_t, t \in Z)$ est stationnaire, au sens de la stationnarité du second ordre. Calculez son espérance en fonction de la constante c **(1 point)**.

(ii) Déterminez la forme générale de la décomposition de Wold associée à ce processus. Montrez que les paramètres de cette forme MA(∞) satisfont une équation de récurrence. Trouvez la solution générale de cette équation et caractérisez complètement la forme des paramètres de la décomposition de Wold **(4 points)**

(iii) En utilisant la forme MA(∞) associée à la décomposition de Wold, exprimez la prévision sur l'écart de PIB par tête à un horizon k quelconque, notée $\hat{x}_{t+k} = E\left(x_{t+k} / x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, ...\right)$, comme une moyenne mobile des chocs passés $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1,...}$ et en fonction de la constante c. **(2 points)**

(iv) En utilisant l'expression précédente, et en considérant la réalisation des chocs passées $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1,...}$ comme données, montrez que :

$$\lim_{k\to\infty} \hat{x}_{t+k} = \lim_{k\to\infty}\left(\hat{y}_{1,t+k} - \hat{y}_{2,t+k}\right) = \frac{16c}{7}$$

Ainsi si le processus $(x_t, t \in Z)$ est stationnaire quelle condition sur *c*, et donc sur $E(x_t)$, garantit l'existence d'un processus de convergence des PIB par tête ? **(2 points)**.

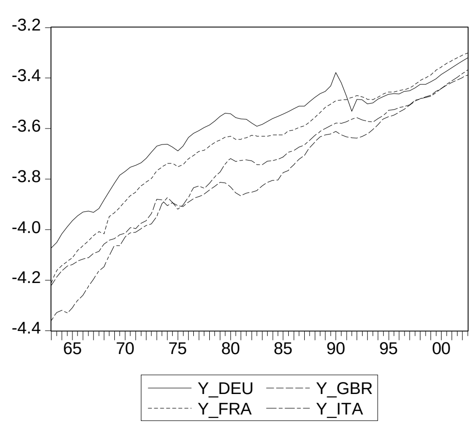
Conclusion : *On montre ainsi que pour qu'il y ait convergence des PIB par tête au sens de la définition de Bernard et Durlauf, il est nécessaire que le processus des écarts des PIB par tête soit stationnaire et centré. Par opposition, on montre que si le processus d'écart des PIB par tête est non stationnaire, cela implique qu'il n'existe pas de processus de convergence pour le couple de pays considéré.* ***Dès lors, un moyen de tester la convergence revient à tester la stationnarité des écarts de PIB par tête et la nullité de la moyenne du processus. C'est ce que nous allons faire à présent.***

PARTIE EMPIRIQUE (13 points)

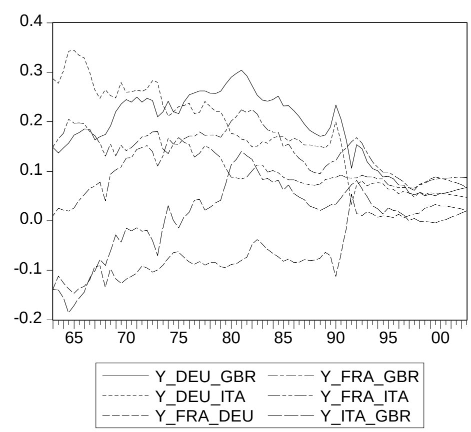
On considère quatre séries de PIB en volume[1] par tête pour les pays suivants de la zone euro : France (FRA), Allemagne (DEU), Italie (ITA) et Royaume Uni (GBR). On cherche à tester la convergence économique, au sens de Bernard et Durlauf, pour cette sélection de pays de la zone euro.

Question n°1 : *(i)* En observant les graphiques suivants, portez un diagnostic quant à la stationnarité des quatre séries de PIB par tête étudiées. Justifiez précisément votre réponse **(0.5 point)**.

PIB par Tête



Ecarts de PIB par Tête



[1] Données prix PPP constants 1995. Source : Economic Outlook, Compendium 2001 OCDE, disponible à la bibliothèque de Dauphine.

(ii) Compte tenu de la définition proposée du concept de convergence, à votre avis existe-t-il un processus de convergence pour ces pays de la zone euro. Justifiez précisément votre réponse **(0.5 point)**.

Question n°2 : On se propose d'étudier la stationnarité du PIB par tête français. Pour cela, on réalise le test de Dickey Fuller dont les résultats sont reproduits ci-dessous.

(i) Quelle est votre conclusion si vous utilisez un risque de première espèce de 5% ? *Justifiez précisément votre réponse* **(1.5 points)**

ADF Test Statistic	-3.744083	1% Critical Value*	-4.0771
		5% Critical Value	-3.4666
		10% Critical Value	-3.1597

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(Y_FRA)
Method: Least Squares
Date: 12/17/01 Time: 14:17
Sample(adjusted): 1963:2 2002:2
Included observations: 79 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Y_FRA(-1)	-0.074352	0.019858	-3.744083	0.0003
C	-0.282134	0.080464	-3.506331	0.0008
@TREND(1963:1)	0.000530	0.000198	2.675898	0.0091

R-squared	0.267588	Mean dependent var	0.011514
Adjusted R-squared	0.248314	S.D. dependent var	0.011806
S.E. of regression	0.010236	Akaike info criterion	-6.288561
Sum squared resid	0.007963	Schwarz criterion	-6.198582
Log likelihood	251.3981	F-statistic	13.88335
Durbin-Watson stat	1.729782	Prob(F-statistic)	0.000007

(ii) D'après ces résultats, quel modèle économétrique proposez vous pour représenter le PIB par tête en France ? Quelle est la principale propriété de ce type de modélisation en terme de persistance des chocs ? et en termes de décomposition tendance / cycle ? **(1 point)**

(iii) Admettons que l'on retrouve exactement le même type de représentation pour les séries de PIB par tête des autres pays de la zone euro. Dans ce cas, par quelle contrainte sur les paramètres des modèles nationaux se traduit l'hypothèse de convergence économique ? A quelle référence de théorie macroéconomique cela vous fait il penser ? Déduisez en (sans faire aucun calcul) un test naturel de l'hypothèse de convergence pour le PIB par tête des pays de la zone euro. **(1 points)**

(iv) Vos résultats vous semblent ils compatibles avec ceux généralement obtenus notamment sur données macroéconomiques? D'où peut venir cette «contradiction» ? **(0.5 point)**

Question n°3 : *(i)* En utilisant les résultats des tests ADF ci-dessous proposez un diagnostic quant à la stationnarité du PIB par tête de la France. **Pour les différents tests, vous utiliserez des seuils correspondant à un risque de première espèce de 10% et vous donnerez la valeur de ces seuils.** *Vous justifierez précisément votre démarche* **(3 points)**.

Dependent Variable: DY_FRA
Method: Least Squares
Date: 12/17/01 Time: 15:21
Sample(adjusted): 1964:2 2002:2
Included observations: 77 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Y_FRA(-1)	-0.059254	0.022457	-2.638502	0.0102
DY_FRA(-1)	0.113161	0.112123	1.009261	0.3162
DY_FRA(-2)	0.085985	0.107964	0.796428	0.4284
C	-0.225400	0.090064	-2.502654	0.0146
@TREND(1963:1)	0.000434	0.000212	2.044354	0.0446

R-squared	0.216316	Mean dependent var	0.010931
Adjusted R-squared	0.172778	S.D. dependent var	0.011154
S.E. of regression	0.010145	Akaike info criterion	-6.280998
Sum squared resid	0.007410	Schwarz criterion	-6.128803
Log likelihood	246.8184	F-statistic	4.968439
Durbin-Watson stat	2.026030	Prob(F-statistic)	0.001358

Dependent Variable: DY_FRA
Method: Least Squares
Date: 12/17/01 Time: 15:22
Sample(adjusted): 1964:2 2002:2
Included observations: 77 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Y_FRA(-1)	-0.015084	0.006258	-2.410254	0.0185
DY_FRA(-1)	0.121968	0.114454	1.065652	0.2901
DY_FRA(-2)	0.104153	0.109915	0.947573	0.3465
C	-0.046691	0.022148	-2.108167	0.0384

R-squared	0.170825	Mean dependent var	0.010931
Adjusted R-squared	0.136750	S.D. dependent var	0.011154
S.E. of regression	0.010363	Akaike info criterion	-6.250547
Sum squared resid	0.007840	Schwarz criterion	-6.128791
Log likelihood	244.6461	F-statistic	5.013121
Durbin-Watson stat	2.019655	Prob(F-statistic)	0.003241

Dependent Variable: DY_FRA
Method: Least Squares
Date: 12/17/01 Time: 15:20
Sample(adjusted): 1964:2 2002:2
Included observations: 77 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DY_FRA(-1)	0.196455	0.113727	1.727426	0.0883
DY_FRA(-2)	0.195068	0.106542	1.830900	0.0711
C	0.006498	0.001938	3.353262	0.0013

R-squared	0.104840	Mean dependent var	0.010931
Adjusted R-squared	0.080646	S.D. dependent var	0.011154
S.E. of regression	0.010695	Akaike info criterion	-6.199950
Sum squared resid	0.008464	Schwarz criterion	-6.108632
Log likelihood	241.6981	F-statistic	4.333388
Durbin-Watson stat	2.066477	Prob(F-statistic)	0.016608

Dependent Variable: DY_FRA
Method: Least Squares
Date: 12/17/01 Time: 15:23
Sample(adjusted): 1964:2 2002:2
Included observations: 77 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DY_FRA(-1)	0.379140	0.106429	3.562385	0.0006
DY_FRA(-2)	0.359701	0.100807	3.568212	0.0006

R-squared	-0.031180	Mean dependent var	0.010931
Adjusted R-squared	-0.044930	S.D. dependent var	0.011154
S.E. of regression	0.011402	Akaike info criterion	-6.084467
Sum squared resid	0.009750	Schwarz criterion	-6.023589
Log likelihood	236.2520	Durbin-Watson stat	2.207986

(ii) A partir de ces résultats quel modèle économétrique proposez vous pour le PIB par tête de la France. Qu'est ce qui explique alors, selon vous, la différence avec les résultats de la question 2 **(1 point)**.

<u>Question n°4 :</u> *On suppose que tous les PIB par tête de tous les pays de la zone euro satisfont une représentation de type I(1). On essaye à présent de s'intéresser aux propriétés de* **convergence économique**. Pour cela on considère la série Y_FRA_DEU définit comme l'écart entre le PIB par tête français et le PIB par tête allemand.

(i) D'après les résultats suivants donnez un diagnostic quant à la stationnarité de la série d'écart des PIB, notée Y_FRA_DEU. **Vous utiliserez pour cela des seuils définis pour un risque de première espèce de 5%**. Quelle représentation en déduisez pour l'écart des PIB par tête ? **(2 points)**

Dependent Variable: DY_FRA_DEU
Method: Least Squares
Date: 12/17/01 Time: 16:12
Sample(adjusted): 1963:2 2002:2
Included observations: 79 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000766	0.002755	-0.277866	0.7819
Y_FRA_DEU(-1)	-0.046283	0.034168	-1.354576	0.1795

R-squared	0.023275	Mean dependent var	0.001997
Adjusted R-squared	0.010590	S.D. dependent var	0.016555
S.E. of regression	0.016467	Akaike info criterion	-5.349891
Sum squared resid	0.020880	Schwarz criterion	-5.289905
Log likelihood	213.3207	F-statistic	1.834876
Durbin-Watson stat	1.865723	Prob(F-statistic)	0.179514

Dependent Variable: DY_FRA_DEU
Method: Least Squares
Date: 12/17/01 Time: 16:16
Sample(adjusted): 1963:2 2002:2
Included observations: 79 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Y_FRA_DEU(-1)	-0.039256	0.022837	-1.718919	0.0896

R-squared	0.022296	Mean dependent var	0.001997
Adjusted R-squared	0.022296	S.D. dependent var	0.016555
S.E. of regression	0.016370	Akaike info criterion	-5.374205
Sum squared resid	0.020901	Schwarz criterion	-5.344212
Log likelihood	213.2811	Durbin-Watson stat	1.877185

(ii) Est ce que la représentation obtenue pour les écarts des PIB par tête vous semble cohérente avec le corrélogramme de la série Y_FRA_DEU. **Justifiez votre réponse**. **(1 point)**

Date: 12/17/01 Time: 16:24
Sample: 1963:1 2002:2
Included observations: 80

<table>
<tr><th>Autocorrelation</th><th>Partial Correlation</th><th></th><th>AC</th><th>PAC</th><th>Q-Stat</th><th>Prob</th></tr>
<tr><td>. |*******|</td><td>. |*******|</td><td>1</td><td>0.928</td><td>0.928</td><td>71.577</td><td>0.000</td></tr>
<tr><td>. |*******|</td><td>. | . |</td><td>2</td><td>0.860</td><td>-0.011</td><td>133.84</td><td>0.000</td></tr>
<tr><td>. |****** |</td><td>. | . |</td><td>3</td><td>0.801</td><td>0.023</td><td>188.45</td><td>0.000</td></tr>
<tr><td>. |****** |</td><td>. | . |</td><td>4</td><td>0.751</td><td>0.044</td><td>237.14</td><td>0.000</td></tr>
<tr><td>. |***** |</td><td>.*| . |</td><td>5</td><td>0.696</td><td>-0.065</td><td>279.47</td><td>0.000</td></tr>
<tr><td>. |***** |</td><td>. | . |</td><td>6</td><td>0.647</td><td>0.023</td><td>316.59</td><td>0.000</td></tr>
<tr><td>. |***** |</td><td>. | . |</td><td>7</td><td>0.599</td><td>-0.019</td><td>348.88</td><td>0.000</td></tr>
<tr><td>. |**** |</td><td>. | . |</td><td>8</td><td>0.556</td><td>0.000</td><td>377.04</td><td>0.000</td></tr>
<tr><td>. |**** |</td><td>. | . |</td><td>9</td><td>0.520</td><td>0.038</td><td>402.04</td><td>0.000</td></tr>
<tr><td>. |**** |</td><td>. | . |</td><td>10</td><td>0.490</td><td>0.022</td><td>424.56</td><td>0.000</td></tr>
<tr><td>. |*** |</td><td>.*| . |</td><td>11</td><td>0.445</td><td>-0.121</td><td>443.37</td><td>0.000</td></tr>
<tr><td>. |*** |</td><td>. |*. |</td><td>12</td><td>0.418</td><td>0.116</td><td>460.25</td><td>0.000</td></tr>
<tr><td>. |*** |</td><td>. | . |</td><td>13</td><td>0.390</td><td>-0.034</td><td>475.16</td><td>0.000</td></tr>
<tr><td>. |*** |</td><td>. | . |</td><td>14</td><td>0.359</td><td>-0.043</td><td>488.00</td><td>0.000</td></tr>
<tr><td>. |*** |</td><td>. | . |</td><td>15</td><td>0.330</td><td>0.024</td><td>498.99</td><td>0.000</td></tr>
</table>

(iii) Compte tenu de ces différents résultats, quelle est alors votre conclusion quant à l'existence d'un processus de convergence (au sens de Bernard et Durlauf) entre le PIB par tête allemand et le PIB par tête français ? **(1 point)**

Université Paris IX Dauphine

UFR Economie Appliquée

Maîtrise Economie Appliquée

SERIES TEMPORELLES

CORRECTION

Novembre 2001

Tout Document Autorisé, Calculatrice Autorisée

Durée : 2 heures 30

PREMIERE PARTIE

Question n°1 : *(i)* La définition du concept économique de convergence absolue implique que les PIB par tête convergent vers le même sentier de croissance. Dès lors, la prévision que je peux faire aujourd'hui pour le PIB par tête de mon pays à un horizon très éloigné sera strictement identique à celle que l'on pourrait faire pour un tout autre pays possédant les mêmes caractéristiques techniques puisque ces derniers seront alors sur le même sentier de croissance équilibrée. Sur le plan économétrique :

$$\lim_{k\to\infty} E\left(\hat{y}_{1,t+k} / I_t\right) = \lim_{k\to\infty} E\left(\hat{y}_{2,t+k} / I_t\right)$$

où I_t désigne l'ensemble d'information disponible à la date *t*.

(ii) On a donc convergence si et seulement si :

$$\lim_{k\to\infty} E\left(\hat{y}_{1,t+k} / I_t\right) = \lim_{k\to\infty} E\left(\hat{y}_{2,t+k} / I_t\right) \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\left[E\left(\hat{y}_{1,t+k} / I_t\right) - E\left(\hat{y}_{2,t+k} / I_t\right)\right] = 0$$

Ce qui peut se réécrire sous la forme :

$$\lim_{k\to\infty} E\left(y_{1,t+k} - y_{2,t+k} / I_t\right) = 0$$

On retrouve alors la définition de Bernard et Durlauf (1995).

Question n°2 : Soit $x_t = y_{1,t} - y_{2,t}$ tel que :

$$x_t = c + \frac{5}{8} x_{t-1} - \frac{1}{16} x_{t-2} + \mu_t$$

avec $\mu_t iid\left(0,\sigma_\mu^2\right)$ et $c \in R$.

(i) Vérifions que $\left(x_t, t \in Z\right)$ est stationnaire.

$$\Phi(L)x_t = \varepsilon_t \Rightarrow \Phi(L) = 1 - \frac{5}{8}L + \frac{1}{16}L^2$$

Ce polynôme a deux racines : $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 8$. Ces deux racines ont supérieures à l'unité en module, le processus AR(2) $\left(x_t, t \in Z\right)$ est stationnaire. Son espérance est définie par :

$$E(x_t) = \frac{c}{\Phi(1)} = \frac{16c}{7}$$

(ii) On sait d'après le théorème de Wold que :

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \kappa_t = \Psi(L) + \kappa_t$$

Déterminons la forme générale de cette décomposition. On sait que :

$$x_t = \Phi(L)^{-1}\varepsilon_t + \Phi(1)^{-1}c$$

On en déduit donc $\Psi(L) = \Phi(L)^{-1}$. On procède par identification :

$$\Psi(L)\Phi(L) = 1 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{5}{8}L + \frac{1}{16}L^2\right)\lim_{q\to\infty}\left(\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \psi_3 L^3 + \ldots\ldots + \psi_q L^q\right) = 1$$

On en déduit une relation de récurrence de la forme :

$$\psi_0 = 1 \quad \psi_1 = \frac{5}{8} \quad \psi_n = \frac{5}{8}\psi_{n-1} + \frac{1}{16}\psi_{n-2} \quad \forall n > 2$$

La solution générale de cette équation de récurrence est de la forme :

$$\psi_n = A_1\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^n + A_2\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^n = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + A_2\left(\frac{1}{8}\right)^n$$

En utilisant les conditions initiales on obtient $A_1 = 4/3$ et $A_2 = -1/3$. D'où :

$$\psi_n = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^n$$

On obtient alors :

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^j - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^j\right]\varepsilon_{t-j} + \frac{16c}{7}$$

(iii) On montre alors que

$$\hat{x}_{t+k} = E(x_{t+k} / x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots) = E(x_{t+k} / \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots)$$

D'où en utilisant la forme de Wold :

$$\hat{x}_{t+k} = \sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^j - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^j\right]E(\varepsilon_{t+k-j} / \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots) + \frac{16c}{7}$$

En simplifiant il vient :

$$\hat{x}_{t+k} = \sum_{j=k}^{\infty}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^j - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^j\right]\varepsilon_{t+k-j} + \frac{16c}{7}$$

(iv) si l'on considère les réalisations de ε_t $(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots)$ comme connues, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\hat{x}_{t+k} &= \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^j - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^j\right]\varepsilon_{t+k-j} + \frac{16c}{7}\right) \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\left[\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^k\right]\varepsilon_t + \left[\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^{k+1}\right]\varepsilon_{t-1} + \ldots\right) + \frac{16c}{7} \\
&= \frac{16c}{7}
\end{aligned}$$

Si c=0 alors la limite de $\hat{x}_{t+k}$ est nulle, il y a convergence au sens de Bernard et Durlauf. Le processus d'écart doit donc être **stationnaire et centré** pour qu'il existe un processus de convergence absolue.

PARTIE EMPIRIQUE

<u>Question n°1 :</u> *(i)* Chacune des séries historiques de PIB par tête semble être issue d'un processus non stationnaire. En effet, au moins la première condition de la définition de la stationnarité semble violée : $E(x_t = \mu)$.

(ii) Nous avons vu que seul un processus d'écart des PIB par tête stationnaire peut satisfaire la définition de la convergence au sens de Bernard et Durlauf. Or il semble ici que les écarts de PIB par tête soient issus de processus stationnaires, bien que rien ne permette à ce niveau de l'analyse de

l'analyse de l'affirmer. L'espérance ainsi que les moments d'ordre du processus d'écart deux semblent indépendant du temps.

__Question n°2 :__ *(i)* On fait ici un test de Dickey Fuller simple. On suppose ainsi qu'il n'existe pas d'autocorrélation des innovations (ε_t bruits blancs). On commence ainsi par considérer le modèle le plus large incluant une constante et trend (modèle 3). On constate que la réalisation de la statistique de test DF, à savoir –3.74, est inférieure au seuil théorique à 5% (-3.46). Donc on en conclut que la série Y_FRA ne comporte pas de racine unitaire (1 point). On vérifie alors que le coefficient de la tendance est non nul. Pour cela on utilise la statistique du test de Student associée au test beta=0 et on la compare aux seuils d'une une loi normale. On vérifie alors que la réalisation de la t-statistique, à savoir 2.67, est supérieure au seuil de significativité à 5%, 1.96, donc le coefficient de la tendance est non nul. Le modèle 3 est le bon modèle : on confirme le résultat quant à l'absence de racine unitaire (1 point).

(ii) On arrive ainsi à une représentation de type TS au sens de Nelson et Plosser (1982) pour le PIB par tête de la France :

$$Y\_FRA_t = f_t + z_t \quad avec \; E(z_t) = 0$$

Cette modélisation implique en particulier que les innovations du processus du PIB par tête n'aient qu'un effet transitoire sur le niveau de cette variable. Il y a donc une propriété d'absence d'hystèrese des chocs (0.5 points). Cela conduit en outre à la présence d'une tendance déterministe (ici linéaire) dans l'adoption d'un schéma de décomposition tendance cycle et d'une indépendance des composantes de cycle et des composantes conjoncturelles (0.5 points).

(iii) Si les PIB par tête des autres pays de la zone euro satisfont une représentation de type TS, l'hypothèse de convergence se ramène alors à une identification des composantes tendancielles des différents modèles (1 point) :

$$\hat{y}_{1,t+k} = \hat{y}_{2,t+k} \Leftrightarrow f_{1,t+k} = f_{2,t+k}$$

Cela fait bien entendu penser au modèle de Solow (cf. citation) : 0.5 points. Dès lors il suffit pour tester l'hypothèse de convergence de tester l'égalité des paramètres beta (et des constantes alpha, si l'on veut tester une convergence dite absolue comme dans Bernard et Durlauf) à partir des représentations TS des PIB par tête. Si ces paramètres sont identiques pour deux pays, on peut dire que ces pays converge (1 point) :

$$f_{1,t+k} = f_{2,t+k} \Leftrightarrow a_1(t+k) + b_1 = a_2(t+k) + b_2 \quad \forall (t,k)$$

(iv) Le résultat selon lequel le PIB par tête est un processus TS tranche quelque peu avec ceux de la littérature empirique depuis notamment les résultats de Nelson et Plosser (1982). La conclusion obtenue peut être due tout d'abord à un manque de puissance des tests de Dickey Fuller (cf. Madalla et Kim 2001) : dans le tableau précédent pour un risque de première espèce de 1%, on accepte l'hypothèse de racine unitaire (0.5 point).

Deuxièmement, cela peut provenir du fait que l'on fait ici un test DF simple en supposant l'absence d'autocorrélation des résidus : or si une telle autocorrélation existe, cela induit une modification des lois asymptotiques de la statistique du test DF qui peuvent alors conduire à des résultats fallacieux si l'on utilise les seuils obtenus sous l'hypothèse de bruit blanc. Il faut dans ce cas « blanchir » les résidus et adopter un test ADF ou un de Phillips Perron (0.5 point).

<u>*Question n°3 :*</u> (i) On commence par le modèle 3 : la réalisation de la statistique de Student vaut –2.638. Elle est largement supérieure à la valeur du seuil à 10% de cette statistique pour le modèle 3 : à savoir –3.15 pour T=100. Donc on accepte l'hypothèse nulle de racine unitaire. On vérifie alors la non nullité du coefficient de la tendance conditionnellement à la racine unitaire. La statistique de test F3 est définie à partir des éléments suivants : SCR3 = 0.00741 et SCR3C=0.008464, T=77. On obtient une réalisation de F3 égale à 5.1206. Cette réalisation est inférieure au seuil à 10% de la statistique F3 pour T=100, à savoir 5.47 : donc on accepte l'hypothèse nulle de nullité du coefficient de la tendance. (2 points)

On fait donc le test ADF dans le modèle 2. La réalisation de la statistique de Student est alors égale à –2.41. Elle est supérieure à la valeur du seuil à 10% de cette statistique pour le modèle 2 : à savoir –2.58 pour T=100. Donc on accepte l'hypothèse nulle de racine unitaire. On vérifie alors la non nullité du coefficient de la constante conditionnellement à la racine unitaire. La statistique de test F2 est définie à partir des éléments suivants : SCR2 = 0.007840 et SCR3C=0.009750, T=77. On obtient une réalisation de F2 égale à 8.8922. Cette réalisation est largement supérieure au seuil à 10% de la statistique F2 pour T=100, à savoir 3.86 : donc on rejette l'hypothèse nulle de nullité de la constante. Ainsi, la série Y_FRA est issue d'un processus comportant une racine unitaire. (2 points)

(ii) Dès lors, le PIB par tête de la France peut être représenté par un processus AR(3) I(1) (0.5 points) et le taux de croissance (différence des logarithmes) est lui modélisé comme un processus AR(2) stationnaire autour d'une constante (0.5 points) :

$$\Delta x_t = \phi_1 \Delta x_{t-1} + \phi_2 \Delta x_{t-2} + \varepsilon_t$$

La différence entre les deux réponse tient à la prise en compte de l'autocorrélation des résidus. (0.5 points)

<u>Question n°4 :</u> (i) On vérifie que la réalisation de la statistique de Student vaut –1.35. Elle est largement supérieure à la valeur du seuil à 5% de cette statistique pour le modèle 2 : à savoir –2.89 pour T=100. Donc on accepte l'hypothèse nulle de racine unitaire. On vérifie alors la non nullité du coefficient de la constante conditionnellement à la racine unitaire. Dans ce cas la réalisation de la statistique de test F2 est donnée dans le tableau Eviews (puisque l'on teste la nullité de tous les coefficients) : elle vaut 1.83. Cette réalisation est inférieure au seuil à 5% de la statistique F2 pour T=100, à savoir 4.71 : donc on accepte l'hypothèse nulle de nullité du coefficient de la tendance. On fait donc le test DF dans le modèle 1. La réalisation de la statistique de Student est alors égale à –1.71. Elle est supérieure à la valeur du seuil à 5% de cette statistique pour le modèle 1 : à savoir –1.95 pour T=100. Donc on accepte l'hypothèse nulle de racine unitaire. On obtient donc une représentation pour l'écart de type AR(1) stationnaire sans constante (2 points) :

$$x_t = \rho x_{t-1} + \varepsilon_t$$

Donc les écarts de PIB par tête sont stationnaires et d'espérance nulle (0.5 points)

(ii) on observe sur le corrélogramme que l'autocorrélation décroît de façon exponentielle tandis que la FAP chute brusquement à l'ordre 2 et s'annule à partir de cet ordre. C'est le profil typique d'un processus AR(1) ce qui coïncide avec le résultat précédent. (1 point)

(iii) on a montré dans la partie théorique que l'hypothèse de convergence au sens de Bernard et Durlauf impliquait que le processus d'écart des PIB par tête soit stationnaire et d'espérance nulle. Ici l'écart entre PIB allemand et PIB français satisfait ces deux propriétés : on peut donc ici évoquer l'existence d'une convergence des PIB par tête entre ces deux pays.