Université d'Orléans - Licence Economie et Gestion Statistique

C. Hurlin. Examen Décembre 2008

Exercice 1 *Barème : 14 points. Test Paramétrique et Lemme de Neyman Pearson*

Dans le cadre d'un processus de certification qualité de sa production, une entreprise souhaite tester le poids d'un de ses produits alimentaires. Le poids est représenté par une variable aléatoire X supposée suivre une loi normale $N\left(m, \sigma^2\right)$ d'écart type σ connu et égal à 5. L'entreprise vous contacte pour mettre en place une procédure de certification des lots, chaque lots comportant 10 produits. On admet que si la moyenne m du poids dans le lot est inférieur à 300 grammes, la marchandise est déclarée non conforme et détruite. Le fabricant souhaite effectuer le test suivant :

$$H_0 : m = m_0 = 300$$

$$H_1 : m = m_1 = 295$$

Pour cela, on considère un lot de $N = 10$ de dix mesures de poids $\{X_1, .., X_N\}$ supposées *i.i.d.* de même loi que X.

Partie I : Test d'hypothèses simples (8 points)

Question 1 (1 point) Commentez le choix du fabricant de l'hypothèse nulle H_0.

Question 2 (1 point) Montrez que le rapport des vraisemblances de l'échantillon sous les hypothèses nulle et alternative peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{L\left(X_1, .., X_{10}, m_0\right)}{L\left(X_1, .., X_{10}, m_1\right)} = \exp\left[\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i - m_1)^2 - \sum_{i=1}^{N}(X_i - m_0)^2\right)\right] \tag{1}$$

Question 3 (1 point) A partir du résultat de la question 2, démontrez que la région critique W du test UPP au sens de Neyman Pearson est de la forme :

$$W = \left\{ X_1, .., X_{10} \middle| \; \overline{X}_N < A \right\} \tag{2}$$

où $\overline{X}_N = (1/N) \sum_{i=1}^{N} X_i$ désigne la moyenne empirique des poids et où A est une constante déterminée par le niveau de risque de première espèce.

Question 4 (1 point) Déterminez le seuil critique A du test UPP pour un niveau de risque de première espèce $\alpha = 5\%$.

Question 5 (1 point) On suppose que pour un lot tiré au hasard, on observe une moyenne empirique des poids égale à 296 grammes. Que pouvez conclure quand à la qualité de la production de cette entreprise pour un risque de première espèce de 5% ?

Question 6 (1.5 point) Calculez la puissance de votre test. Interprétez économiquement cette grandeur.

Question 7 (1.5 points) Si le risque de première espèce reste fixé à 5%, quelle doit être la taille minimale de l'échantillon N pour que la puissance soit supérieure à 95%.

Partie II : Test d'hypothèse simple contre hypothèse multiple (6 points)

On considère à présent le test suivant :

$$H_0 : m = 300$$

$$H_1 : m < 300$$

Question 1 (1 point) En reprenant vos résultats concernant la région critique du test $H_0 : m = 300$ contre $H_1 : m = 295$, justifiez l'existence d'un test UPP pour $H_0 : m = 300$ contre $H_1 : m < 300$. Montrez que la région critique du test UPP pour un niveau de risque de première espèce $\alpha = 5\%$ est :

$$W = \left\{ X_1, .., X_{10} \mid \overline{X}_N < 297.39 \right\} \tag{3}$$

Question 2 (2 points) (i) Calculez les valeurs prises par la courbe de puissance ou courbe d'efficacité du test pour les valeurs suivantes de la moyenne m

$$m = 300 \quad m = 298 \quad m = 295 \quad m = 290 \tag{4}$$

et (ii) représentez graphiquement la courbe d'efficacité du test.

Question 3 (2 points) On souhaite enfin tester l'hypothèse :

$$H_0 : m = 300 \tag{5}$$

$$H_1 : m \neq 300 \tag{6}$$

Construisez la région critique associée à ce test pour un niveau de risque de première espèce de 5%. Que pouvez conclure quand à la qualité de la production si la moyenne empirique des poids d'un lot vaut 296 grammes ?

Question 4 (1 point) Donnez la formule de la puissance du test bilatéral en fonction de la valeur de m.

Exercice 2 *Test d'Indépendance : Application à l'Etude de la Relation Salaire / Diplôme (à partir d'un examen de Mme Bessec, Université Paris IX Dauphine). Barème : 4 points.*

On considère un échantillon établi par le CEREQ (Centre d'Etudes et de Recherches sur les Qualifications) et constitué de 705 jeunes peu diplômés sortis du système scolaire en juin 1989. On s'intéresse à la liaison entre le niveau de salaire des jeunes en euros (noté X) et leur niveau de formation (variable Y). On vous demande de tester **au seuil de 10%** l'indépendance du niveau de salaire des jeunes à leur niveau de formation. *Vous détaillerez précisément votre démarche.*

X \ Y	Bac	BEP-CAP	Sixième	Total
600-750	115	284	30	429
750-900	65	109	11	185
900-1650	45	44	2	91
Total	225	437	43	705

Exercice 3 *Test d'Adéquation : Barème : 4 points.*

On souhaite tester si le nombre journalier d'acheteurs d'un produit est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$. On note X_i le nombre de personnes ayant effectué un achat le $i^{ème}$ jour de l'étude où $i = 1, .., N$. La consultation des registres des ventes d'un grand magasin réalisées sur une 100 journées consécutives conduit aux résultats suivants :

X_i	0	1	2	3	4	5	6	7	Total
n_i	15	25	25	12	10	8	4	1	100

où n_i représente l'effectif associé à la modalité $X_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \text{ et } +\}$. Testez au seuil de 5%, l'hypothèse selon laquelle les ventes quotidiennes suivent une loi de Poisson de paramètre 2. *Remarque : on rappelle que si X_i suit une loi $P(\lambda)$, alors :*

$$P(X_i = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \tag{7}$$

Bon courage