Université d'Orléans - Licence Economie et Gestion Statistique

C. Hurlin. Examen Décembre 2009

Exercice 1 *Barème : 16 points. Ratio de Sharpe et tests paramétriques*

Le ratio de Sharpe (1966) est une mesure de performance souvent utilisée en finance de marché. Elle mesure[1] l'écart de rentabilité du portefeuille d'actifs financiers considérés (des actions par exemple) par rapport au taux de rendement d'un placement sans risque (autrement dit la prime de risque, positive ou négative), divisé par un indicateur de risque, à savoir l'écart type de la rentabilité de ce portefeuille (autrement dit sa volatilité). Soit r la rentabilité du portefeuille et soit r^f le rendement de l'actif sans risque. La ratio de sharpe, noté S, est défini par la relation :

$$S = \frac{E(r) - r^f}{\sqrt{V(r)}} \tag{1}$$

Dans cet exercice, on suppose (sans doute à tort) que le rendement quotidien associé à la détention du portefeuille peut être représenté par une variable aléatoire r normalement distribuée d'espérance m et de variance σ^2. L'espérance de rendement du portefeuille (exprimée en pourcentage) est connue et fixée à $m = 3$. Par ailleurs, pour simplifier on suppose que le rendement de l'actif sans risque est nul :

$$E(r) = m = 3 \qquad r^f = 0 \tag{2}$$

On cherche à tester la valeur du ratio de Sharpe du portefeuille comme suit :

$$H_0 : \ S = 1.5 \tag{3}$$

$$H_1 : \ S = 1.2 \tag{4}$$

Pour cela, on considère un échantillon de T rendements quotidiens $\{r_1, .., r_T\}$ supposées *i.i.d.* de même loi que r.

Question préliminaire A (0.5 point) Commentez le choix de l'hypothèse nulle H_0.

Question préliminaire B (0.5 point) Exprimez le ratio de Sharpe S en fonction de m et de σ.

Question 1 (1 point) Montrez que le test sur le ratio de Sharpe peut ici se ramener à un test paramétrique d'hypothèses simples sur la variance σ^2 du rendement du portefeuille.

Question 2 (1 point) On considère le test $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ contre l'alternative $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$, avec $\sigma_0 < \sigma_1$. Déterminez le rapport des vraisemblances de l'échantillon sous les hypothèses nulle et alternative de ce test en fonction des paramètres m, σ_0 et σ_1, et des rendements $\{r_1, .., r_T\}$.

[1] Cette définition est tirée de Wikipedia.

Question 3 (1 point) On revient à présent au test sur le ratio de Sharpe $H_0 : S = S_0 = 1.5$ contre $H_1 : S = S_1 = 1.2$. Montrez le rapport des vraisemblances de l'échantillon sous les hypothèses nulle et alternative peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{L(r_1,..,r_T,S_0)}{L(r_1,..,r_T,S_1)} = \left(\frac{S_0}{S_1}\right)^T \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{S_1^2 - S_0^2}{m}\right)\sum_{t=1}^{T}(r_t - m)^2\right] \tag{5}$$

où $L(r_1,..,r_T,S_0)$ désigne la vraisemblance de l'échantillon sous H_0 et $L(r_1,..,r_T,S_1)$ la vraisemblance sous H_1.

Question 4 (3 points) A partir des résultats des questions précédents, et en utilisant le lemme de Neyman Pearson, montrez que la région critique du test UPP de niveau α de l'hypothèse nulle $H_0 : S = S_0 = 1.5$ contre $H_1 : S = S_1 = 1.2$ est de la forme :

$$W = \left\{r_1,..,r_T \mid S_N^2 \geq A\right\} \tag{6}$$

où A est une constante déterminée par le risque de première espèce et où S_N^2 désigne la variance empirique corrigée définie par :

$$S_N^2 = \left(\frac{1}{T-1}\right)\sum\nolimits_{t=1}^{T}(r_i - \overline{r})^2 \tag{7}$$

où $\overline{r} = (1/T)\sum_{t=1}^{T} r_t$ désigne la moyenne empirique des rendements.

Question 5 (1 point) Montrez que le seuil critique A associé à un niveau de risque de première espèce α, est défini par la relation :

$$A = F^{-1}(1-\alpha) \times \left(\frac{1}{T-1}\right) \times \frac{m^2}{S_0^2} \tag{8}$$

où $F(.)$ désigne la fonction de répartition d'un chi-deux à $T-1$ degrés de liberté.

Question 6 (2 points) On considère à présent le test unilatéral :

$$H_0 : S = 1.5 \tag{9}$$

$$H_0 : S < 1.5 \tag{10}$$

Déterminez la région critique de ce test pour un niveau de risque $\alpha = 5\%$ et une taille d'échantillon $T = 26$.

Question 7 (1 point) On observe une variance empirique des rendements du portefeuille S_N^2 égale à 4.2. Pour un risque de première espèce de 5%, que pouvez vous conclure quant à la valeur du ratio de Sharpe de ce portefeuille ?

Question 8 (1 point) Montrez que la fonction puissance du test unilatéral de l'hypothèse nulle $H_0 : S^2 = S_0$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : S^2 < S_0$ peut s'expimer comme suit :

$$P(S) = 1 - F\left[F^{-1}(1-\alpha) \times \frac{S^2}{S_0^2}\right] \quad \forall S < S_0 \tag{11}$$

où $F(.)$ désigne la fonction de répartition de la loi du chi-deux à $T-1$ degrés de liberté.

Question 9 (1 point) Pour un risque de premier espèce de 5% et un échantillon de taille $T = 26$, combien y a t il de chances que ce test permette de rejeter l'hypothèse nulle d'un ratio de Sharpe égal à 1.5 pour des portefeuilles ayant un ratio de Sharpe de 1.2 ?

Question 10 (2 points) On considère finalement le test bilatéral :

$$H_0 : S = S_0 \tag{12}$$

$$H_1 : S \neq S_0 \tag{13}$$

Montrez que la région d'acceptation du test associé à un risque de première espèce α, est de la forme :

$$\overline{W} = \left\{ r_1, .., r_T \mid F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times \left(\frac{1}{T-1}\right) \times \frac{m^2}{S_0^2} < S_N^2 < F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \times \left(\frac{1}{T-1}\right) \times \frac{m^2}{S_0^2} \right\}$$

où $F(.)$ désigne la fonction de répartition d'un chi-deux à $T - 1$ degrés de liberté.

Question 11 (1 point) Soit le test bilatéral :

$$H_0 : S = 1.5 \tag{14}$$

$$H_1 : S \neq 1.5 \tag{15}$$

Pour un échantillon de 26 observations historiques, on observe une variance empirique des rendements S_N^2 égale à 4.2. Pour un risque de première espèce de 5%, que pouvez vous conclure quant à la valeur du ratio de Sharpe associé à ce portefeuille ?

=======

Exercice 2 *Test d'Indépendance : Les effets du tabac (exercice tiré du site Pratique des Biostatiques - Université de Namur). Barème : 4 points.*

Au cours d'une enquête, on interroge 1369 mères d'enfants nés avec une malformation et 2968 mères d'enfants nés sans malformation. On constate que 35,06% des mères d'enfants nés avec malformations et 33,02% des mères d'enfants nés sans malformations fumaient. On souhaite pratiquer le test suivant :

- Hypothèse nulle : le fait d'être mal formé à la naissance ne dépend pas du fait que la mère soit fumeuse ou non. Les deux critères sont indépendants.
- Hypothèse alternative : Les deux critères "enfants malformés ou non" et "avoir une mère fumeuse ou non" sont dépendants.

Quelle est votre conclusion pour un risque de premier espèce de 10% ? *Vous détaillerez précisément votre démarche.*

Bon courage...