Université d'Orléans - Licence Economie et Gestion
Statistique Mathématique

C. Hurlin. Correction du Contrôle de Décembre 2009

Exercice 1 *Barème : 16 points. Ratio de Sharpe et tests paramétriques*

Question préliminaire A (0.5 point) L'hypothèse nulle H_0 est l'hypothèse dans laquelle on a le plus confiance ou celle à laquelle on souhaite le moins renoncer. Ce qui en l'occurence est le cas, car un ratio de Sharpe de 1.5 est bien évidemment préferrable à un ratio de 1.2.

Question préliminaire B (0.5 point) On a immédiatement :

$$S = \frac{m}{\sigma} \tag{1}$$

Question 1 (1 point) Le test sur le ratio de Sharpe peut ici se ramener à un test paramétrique sur la variance σ^2 du rendement du portefeuille puisque :

$$\sigma^2 = \left[\frac{E(r) - r^f}{S} \right]^2 = \left(\frac{m}{S} \right)^2 \tag{2}$$

Dès lors le test

$$H_0 : \ S = 1.5 \tag{3}$$

$$H_1 : \ S = 1.2 \tag{4}$$

devient ici :

$$H_0 : \ \sigma^2 = 4 \tag{5}$$

$$H_1 : \ \sigma^2 = 6.25 \tag{6}$$

Question 2 (1.5 point) On sait que sous l'hypothèse de normalité :

$$L(r_1, .., r_T, \sigma_0) = \left(\frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \right)^T \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{r_t - m}{\sigma_0} \right)^2 \right] \quad \text{0.5 point} \tag{7}$$

$$L(r_1, .., r_T, \sigma_1) = \left(\frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \right)^T \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{r_t - m}{\sigma_1} \right)^2 \right] \tag{8}$$

Il s'ensuit immédiatement que :

$$\frac{L(r_1, .., r_T, \sigma_0)}{L(r_1, .., r_T, \sigma_1)} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^T \exp\left[\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{t=1}^{T} (r_t - m)^2 - \frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{t=1}^{T} (r_t - m)^2 \right] \tag{9}$$

Après simplification, il vient :

$$\frac{L(r_1, .., r_T, \sigma_0)}{L(r_1, .., r_T, \sigma_1)} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^T \exp\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}{\sigma_0^2 \sigma_1^2} \right) \sum_{t=1}^{T} (r_t - m)^2 \right] \quad \text{0.5 point} \tag{10}$$

Question 3 (1 point) Sachant que

$$\sigma_0 = \frac{m}{S_0} \quad \sigma_1 = \frac{m}{S_1} \quad \text{0.5 point} \tag{11}$$

Il vient :

$$\frac{L(r_1, .., r_T, S_0)}{L(r_1, .., r_T, S_1)} = \left(\frac{S_0}{S_1}\right)^T \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{S_1^2 - S_0^2}{m}\right)\sum_{t=1}^{T}(r_t - m)^2\right] \quad \text{0.5 point} \tag{12}$$

Question 4 (3 points) La région critique du test $H_0 : S = S_0 = 1.5$ contre $H_1 : S = S_1 = 1.2$ est identique à celle du test $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 2$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 = 6.25$ (cf. question 1 - 0.5 point). D'après le lemme de Neyman Pearson, la région critique du test UPP de niveau α de l'hypothèse nulle $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$ est de la forme :

$$W = \left\{ r_1, .., r_T \mid \frac{L(r_1, .., r_T, \sigma_0)}{L(r_1, .., r_T, \sigma_1)} \leq K \right\} \quad \text{0.5 point} \tag{13}$$

où K est une constante déterminée par le risque de première espèce. Il s'ensuit que :

$$W = \left\{ r_1, .., r_T \mid \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^T \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}{\sigma_0^2\sigma_1^2}\right)\sum_{t=1}^{T}(r_t - m)^2\right] \leq K \right\} \quad \text{0.5 point} \tag{14}$$

Il vient :

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^T \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}{\sigma_0^2\sigma_1^2}\right)\sum_{t=1}^{T}(r_t - m)^2\right] \leq K \tag{15}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}{\sigma_0^2\sigma_1^2}\right)\sum_{t=1}^{T}(r_t - m)^2 \leq K_1 \quad \text{avec } K_1 = \ln\left[K.\left(\frac{\sigma_0}{\sigma 1}\right)^T\right] \tag{16}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\sigma_0^2 - \sigma_1^2\right)\sum_{t=1}^{T}(r_t - m)^2 \leq K_2 \text{ avec } K_2 = 2\sigma_0^2\sigma_1^2 \ln\left[K.\left(\frac{\sigma_0}{\sigma 1}\right)^T\right] \tag{17}$$

Sachant que $\sigma_1 > \sigma_0$, il vient :

$$\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(r_t - m)^2 \geq A \quad \text{0.5 point} \tag{18}$$

avec $A = K_3 / \left[\left(\sigma_0^2 - \sigma_1^2\right)(T-1)\right]$. On a donc :

$$W = \left\{ r_1, .., r_T \mid \frac{1}{(T-1)}\sum\nolimits_{t=1}^{T}(r_t - m)^2 \geq A \right\} \quad \text{0.5 point} \tag{19}$$

Sachant que $\overline{X}_N$ est un estimateur convergent de m, on admet que pour N grand, la statistique $\frac{1}{(T-1)}\sum_{t=1}^{T}(r_t - m)^2$ converge (en loi) vers S_N^2. et donc cette région peut se réécrire sous la forme :

$$W = \left\{ r_1, .., r_T \mid \frac{1}{(T-1)}\sum\nolimits_{t=1}^{T}(r_t - \overline{r})^2 \geq A \right\} \quad \text{0.5 point} \tag{20}$$

Question 5 (1 point) On sait que par définition du risque I :

$$\alpha = \Pr\left(S_N^2 \geq A \mid H_0 \text{ vraie}\right) \tag{21}$$

Or, on sait que sous l'hypothèse nulle, la variable $S_N^2/\sigma_0^2 \times (T-1)$ suit un chi-deux à $T-1$ degrés de liberté. Soit $F(.)$ la fonction de répartition de la loi du chi-deux à $T-1$ degrés de liberté. On a donc :

$$1-\alpha = \Pr\left[\frac{S_N^2}{\sigma_0^2}(T-1) \leq \frac{A}{\sigma_0^2}(T-1)\right] \tag{22}$$

$\times$D'où :

$$1-\alpha = F\left[\frac{A}{\sigma_0^2}(T-1)\right] \tag{23}$$

ou encore :

$$A = F^{-1}(1-\alpha) \times \left(\frac{\sigma_0^2}{T-1}\right) \quad \text{0.5 point} \tag{24}$$

Sachant que $\sigma_0^2 = m^2/S_0^2$, il vient :

$$A = F^{-1}(1-\alpha) \times \left(\frac{1}{T-1}\right) \times \frac{m^2}{S_0^2} \quad \text{0.5 point} \tag{25}$$

Question 6 (2 points) On considère le test unilatéral :

$$H_0 : S = 1.5 \tag{26}$$

$$H_0 : S < 1.5 \tag{27}$$

La région critique de la question précédente est indépendante de la valeur de S sous H_1. Par conséquent la région critique du test UPP de l'hypothèse $H_0 : S = S_0$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : S > S_0$, est identique à celle du test de l'hypothèse $H_0 : S = S_0$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : S = S_1$ avec $S_1 < S_0$ (1 point). Soit $F(.)$ la fonction de répartition d'une loi du chi-deux à 25 degrés de liberté. Le seuil critique du test unilatéral vaut :

$$\begin{aligned} A &= F^{-1}(1-\alpha) \times \left(\frac{1}{T-1}\right) \times \frac{m^2}{S_0^2} \\ &= 37.65 \times \frac{1}{25} \times \frac{3^2}{1.5^2} \\ &= 6.0244 \end{aligned} \tag{28}$$

La région critique est donc :

$$W = \left\{r_1, .., r_T \mid S_N^2 \geq 6.0244\right\} \text{ 1 point} \tag{29}$$

Question 7 (1 point) Donc si $S_N^2 = 4.2$, pour un risque de première espèce de 5%, on ne peut pas rejetter l'hypothèse nulle selon laquelle le ratio de Sharpe est égal à 1.5.

Question 8 (1 point) On sait que :

$$\begin{aligned} P(\sigma) &= \Pr\left(S_N^2 \geq A \mid H_1 \text{ vraie}\right) \\ &= \Pr\left(S_N^2 \geq A \mid S < S_0\right) & (30) \\ &= 1 - \Pr\left(\frac{S_N^2}{\sigma^2}(T-1) \geq \frac{A}{\sigma^2}(T-1) \;\middle|\; \sigma^2 > \sigma_0^2\right) \quad \text{0.5 point} & (31) \end{aligned}$$

Pour un niveau de risque I de $\alpha\%$, on sait que :

$$A = F^{-1}(1-\alpha) \times \left(\frac{1}{T-1}\right) \times \frac{m^2}{S_0^2} \tag{32}$$

Dès lors, on a :

$$\begin{aligned} P(S) &= 1 - F\left[F^{-1}(1-\alpha) \times \left(\frac{1}{T-1}\right) \times \frac{m^2}{S_0^2} \times (T-1) \times \frac{S^2}{m^2}\right] \quad (33) \\ &= 1 - F\left[F^{-1}(1-\alpha) \times \frac{S^2}{S_0^2}\right] \quad \forall S < S_0 \quad 0.5 \text{ point} \quad (34) \end{aligned}$$

où $F(.)$ désigne la fonction de répartition de la loi du chi-deux à $T-1$ degrés de liberté.

Question 9 (1 point) On a donc :

$$\begin{aligned} P(S) &= 1 - F\left[F^{-1}(1-\alpha) \times \frac{S^2}{S_0^2}\right] \\ &= 1 - F\left[37.65 \times \frac{1.2^2}{1.5^2}\right] \\ &= 0.5137 \quad 1 \text{ point} \quad (35) \end{aligned}$$

Question 10 (2 points) La région d'acceptation (RA) de ce test fondée correspond à l'intersection des deux RA des deux tests unilatéraux $H_0 : \sigma = \sigma_0^2 = m^2/S_0^2$ contre $H_1 : \sigma < \sigma_0^2$ et $H_0 : \sigma = \sigma_0^2 = m^2/S_0^2$ contre $H_1 : \sigma > \sigma_0^2$, c'est à dire (0.5 point) :

$$W = \left\{r_1, .., r_T \mid S_N^2 \leq A\right\} \tag{36}$$

$$H_0 : \sigma = \sigma_0^2 \text{ contre } H_1 : \sigma < \sigma_0^2 : \overline{W} = \left\{r_1, .., r_T \mid S_N^2 \geq A\right\} \tag{37}$$

$$H_0 : \sigma = \sigma_0^2 \text{ contre } H_1 : \sigma > \sigma_0^2 : \overline{W} = \left\{r_1, .., r_T \mid S_N^2 \leq B\right\} \tag{38}$$

Toutefois les seuils A et B doivent être déterminés pour un niveau de risque de $\alpha/2\%$ afin de garantir un risque de première espèce de $\alpha\%$ pour le test bilatéral. Soient (0.5 point) :

$$A = F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{\sigma_0^2}{T-1}\right) \tag{39}$$

$$B = F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{\sigma_0^2}{T-1}\right) \tag{40}$$

Dès lors, l'intersection des deux RA nous donne pour le test bilatéral une RA définie par :

$$\overline{W} = \left\{r_1, .., r_T \mid A < S_N^2 < B\right\}$$

ou encore

$$\overline{W} = \left\{r_1, .., r_T \mid F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{\sigma_0^2}{T-1}\right) < S_N^2 < F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{\sigma_0^2}{T-1}\right)\right\} \quad 0.5 \text{ point} \tag{41}$$

Ce qui implique que :

$$\overline{W} = \left\{r_1, .., r_T \mid F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times \left(\frac{1}{T-1}\right) \times \frac{m^2}{S_0^2} < S_N^2 < F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \times \left(\frac{1}{T-1}\right) \times \frac{m^2}{S_0^2}\right\} \quad 0.5 \text{ point} \tag{42}$$

Question 11 (1 point) Commençons par définir la RA du test bilatéral sur σ^2 :

$$\overline{W} = \left\{ r_1, .., r_T \mid F^{-1}\left(\frac{0.05}{2}\right) \times \left(\frac{1}{25}\right) \times \frac{3^2}{1.5^2} < S_N^2 < F^{-1}\left(1 - \frac{0.05}{2}\right) \times \left(\frac{1}{25}\right) \times \frac{3^2}{1.5^2} \right\} \tag{43}$$

$$\overline{W} = \left\{ r_1, .., r_T \mid 2.09 < S_N^2 < 6.50 \right\} \quad 0.5 \text{ point} \tag{44}$$

Dès lors, si $S_N^2 = 4.2$, on est dans la région d'acceptation pour un niveau de risque de première espèce de 5 %. Pour un risque de première espèce de 5%, on ne peut pas rejetter on ne peut pas rejetter l'hypothèse nulle selon laquelle le ratio de Sharpe est égal à 1.5 (0.5 point).

=======

Exercice 2 *Test d'Indépendance : Les effets du tabac (exercice tiré du site Pratique des Biostatiques - Université de Namur). Barème : 4 points.*

Grâce aux données fournies par l'énoncé, il est possible de réaliser le tableau suivant (0.5 point) :

X \ Y	enfant malformé	enfant "normal"	Total
mère fumeuse	480	980	1460
mère non fumeuse	889	1988	2876
Total	1369	2968	4337

Tableau des effectifs théoriques (1.5 points) :

X \ Y	enfant malformé	enfant "normal"	Total
mère fumeuse	460.85	999.15	1460
mère non fumeuse	908.14	1968.86	2876
Total	1369	2968	4337

Distance du chi-deux :

$$D = \sum_i \sum_j \frac{\left(n_{ij} - N \times p_{ij}\right)^2}{N \times p_{ij}} = 1.72 \quad 0.5 \text{ point} \tag{45}$$

Sous l'hypothèse d'independance, cette statistique suit un chi-deux à r degrés de liberté où

$$r = (2-1)(2-1) = 1 \quad 0.5 \text{ point} \tag{46}$$

Le fractile à 90% d'un chi-deux à 1 degré de liberté est égal à 2.70, donc pour un risque de première espèce de 10% on ne peut pas rejetter l'hypothèse nulle d'indépendance entre les malformations des enfants et le fait que la mère fume (0.5 point). Cela implique que les mères funeuses n'ont pas plus ou moins de chance de donner naissance à un enfant anormal qu'une mère non fumeuse.