# Université d'Orléans - Licence Economie et Gestion
# Statistique Mathématique

**C. Hurlin. Examen Novembre 2011**

**Exercice 1** *Maximum de Vraisemblance. Barême : 12 points*

Soit X une variable aléatoire positive admettant pour fonction de densité :

$$f_X\left(x;\sigma^2\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\frac{x}{\sigma^2} \qquad \forall x \in [0,+\infty[\,. \tag{1}$$

Soit un $N$-échantillon $\{X_1,..,X_N\}$ *i.i.d.* de même loi que $X$. On suppose que le paramètre $\sigma^2$ est inconnu et l'on se propose de l'estimer par la méthode du maximum de vraisemblance.

**Question 1 (2 points)** Montrez que la log-vraisemblance associée l'échantillon $\{X_1,..,X_N\}$ est :

$$\ln L\left(X_1,..,X_N;\sigma^2\right) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\ln\left(X_i\right) - N\ln\left(\sigma^2\right). \tag{2}$$

**Question 2 (2 points)** Montrez que l'estimateur du MV $\widehat{\sigma}^2_{MV}$ du paramètre $\sigma^2$ est :

$$\widehat{\sigma}^2_{MV} = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2. \tag{3}$$

Vous vérifierez les conditions nécessaire et suffisante. *Conseil : pour éviter les erreurs de dérivées, posez $a = \sigma^2$ et dérivez par rapport à $a$.*

**Question 3 (1 point)** On admet que $E\left(X\right) = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $V\left(X\right) = \left(\frac{4-\pi}{2}\right)\sigma^2$. En utilisant $V\left(X\right)$ et $E\left(X\right)$, déterminez $E\left(X^2\right)$.

**Question 4 (1 point)** Montrez que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\sigma}^2_{MV}$ est sans biais : $E\left(\widehat{\sigma}^2_{MV}\right) = \sigma^2$

**Question 5 (1 point)** On admettra que $V\left(X^2\right) = 4\sigma^4$. Montrez que $V\left(\widehat{\sigma}^2_{MV}\right) = \sigma^4/N$.

**Question 6 (1 point)** Montrez que l'estimateur $\widehat{\sigma}^2_{MV}$ est un estimateur convergent (au sens de la convergence en probabilité) de $\sigma^2$.

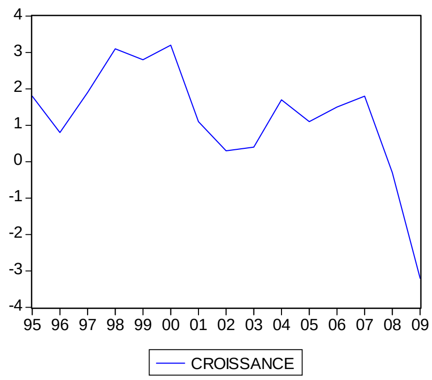
**Question 7 (2 points)** L'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\sigma}^2_{MV}$ est-il efficace au sens de la borne FDCR ? *Remarque : on admet que :*

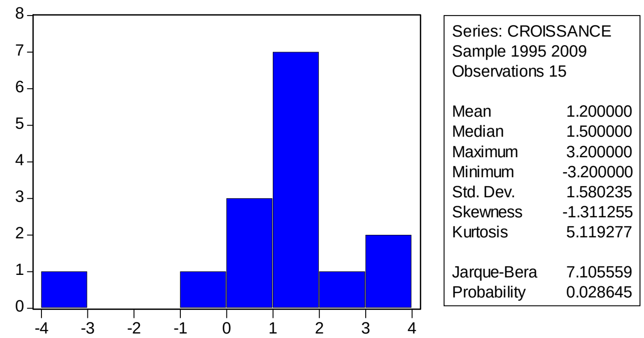
$$\frac{\partial^2 \ln L\left(X_1,..,X_N;\sigma^2\right)}{\partial\sigma^4} = -\frac{1}{2\sigma^6}\sum_{i=1}^{N} X_i^2. \tag{4}$$

**Question 8 (2 points)** En utilisant le TCL déterminez la loi asymptotique de la quantité $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2$. En déduire, la loi asymptotique de l'estimateur $\widehat{\sigma}^2_{MV}$.

**Exercice 2** *Intervalle de confiance. Barème : 4 points*

Votre direction vous demande de fournir une prévision pour le taux de croissance du PIB annuel Français en volume. Pour cela, on vous donne un échantillon de $N = 15$ observations allant de 1995 à 2009. Sur la figure ci-dessous sont reportées les réalisations d'un certain nombre de statistiques descriptives obtenues à partir de cet échantillon. On fait l'hypothèse que le taux de croissance du PIB est distribué selon une loi normale $N\left(m, \sigma^2\right)$.




**Question 1 (2 points)** Proposez à votre direction un intervalle de confiance pour un risque de 10% sur la valeur du taux de croissance moyen $m$ en supposant que l'écart type $\sigma$ est connu et égal à 1.580. Ces chiffres vous semblent-il corrects au regard des prévisions de croissance pour 2011 ?

**Question 2 (2 points)** Refaites le même exercice, mais en supposant cette fois que la variance $\sigma^2$ du taux de croissance du PIB est inconnue. Vous détaillerez précisément votre démarche. *Indication : l'écart-type estimé sous Eviews (Std. Dev.) correspond à la racine carrée de la variance empirique corrigée.*

================

**Exercice 3** *Estimation. Barème : 6 points*

On considère une variable $X$ distribuée selon une loi normale d'espérance $E(X) = \theta$ et de variance $V(X) = \theta - \theta^2$ où $\theta$ est un paramètre inconnu vérifiant $\theta \in ]0,1[$. Soit un $N$-échantillon $\{X_1, .., X_N\}$ *i.i.d.* de même loi que $X$. Soit $\widehat{\theta}_1$ et $\widehat{\theta}_2$ deux estimateurs du paramètres $\theta$ respectivement définis par :

$$\widehat{\theta}_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \qquad \widehat{\theta}_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \tag{5}$$

**Question 1 (2 points)** Montrez que les estimateurs $\widehat{\theta}_1$ et $\widehat{\theta}_2$ sont sans biais.

**Question 2 (1 point)** Montrez que les estimateurs $\widehat{\theta}_1$ et $\widehat{\theta}_2$ sont convergents (au sens de la convergence en probabilité). On admettra que $V\left(X^2\right) = 2\theta^2 - 2\theta^4$.

**Question 3 (1 point)** Peut on déterminer quel est l'estimateur le plus précis ?

**Question 4 (2 points)** Quelles sont les lois asymptotiques des estimateurs $\widehat{\theta}_1$ et $\widehat{\theta}_2$ ?