Université d'Orléans - Licence Economie et Gestion Statistique Mathématique

C. Hurlin. Examen Terminal Janvier 2009

Exercice 1 *Value-at-Risk et Tests Paramétriques. Barème : 12 points.*

Dans le cadre d'une activité de contrôle des risques, on vous demande de construire un test sur la **Value-at-Risk** (VaR) à 5% du titre EDF. La Value-at-Risk correspond à une perte maximale potentielle qui ne devrait être atteinte qu'avec une probabilité donnée sur un horizon temporel donné[1].

Exemple : Si une banque annonce une VaR quotidienne de -30 *millions d'euros pour un taux de couverture de 5%, cela implique qu'il y a seulement cinq chances sur cent, sous des conditions normales de marché, que la perte associée à la détention de ce portefeuille sur une journée excède* 30 *millions d'euros.*

Techniquement, la VaR pour un taux de couverture de $\alpha\%$ correspond tout simplement au fractile d'ordre $\alpha\%$ de la distribution de pertes et profits. On admet que dans le cas d'une distribution normale d'espérance m et de variance σ^2, la VaR à 5% est ainsi définie par la relation :

$$VaR_{(0.05)} = m + \sigma \ \Phi^{-1}(0.05) \tag{1}$$

où $\Phi(.)$ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

L'objectif de cet exercice est de déterminer si la VaR quotidienne à 5% sur le titre EDF est égale à une certaine valeur V_0. Pour cela, on propose le test :

$$H_0 : \ VaR_{(0.05)} = V_0 \tag{2}$$

$$H_1 : \ VaR_{(0.05)} \neq V_0 \tag{3}$$

On suppose (sans doute à tort) que les rendements quotidiens associés à la détention d'une action EDF peuvent être représentés par une variable aléatoire r normalement distribuée d'espérance m et de variance σ^2. On suppose que l'espérance des rendements m est connue, mais que la variance des rendements σ^2 est inconnue.

Question 1 (1 point) Montrez que le test bilatéral sur la VaR peut se ramener à un test bilatéral sur **la variance** σ^2 de la distribution des rendements.
Remarque : vous exprimerez H_0 *et* H_1*, en fonction de* m*,* $\Phi(.)$ *et de* V_0*.*

Question 2 (1 point) On cherche dans un premier temps à construire un test unilatéral :

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \tag{4}$$

$$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \tag{5}$$

[1] Pour une présentation plus générale de la VaR, voir Jorion (2007).

Pour cela on considère un échantillon de rendements historiques $\{r_1, .., r_T\}$ supposés *i.i.d.* de même loi que r. On note $L(r_1, .., r_T, \sigma_0)$ la vraisemblance de cet échantillon sous H_0 et $L(r_1, .., r_T, \sigma_1)$ la vraisemblance sous H_1, où σ_1 désigne une valeur particulière de σ telle que $\sigma_1 < \sigma_0$. Montrez que :

$$\frac{L(r_1, .., r_T, \sigma_0)}{L(r_1, .., r_T, \sigma_1)} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^T \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}{\sigma_0^2 \sigma_1^2}\right) \sum_{t=1}^{T} (r_t - m)^2\right] \tag{6}$$

Question 3 (2.5 points) A partir des résultats de la question 2 et en utilisant le lemme de Neyman Pearson, montrez que la région critique du test UPP de niveau α de l'hypothèse nulle $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0$ est de la forme :

$$W = \left\{ r_1, .., r_T \mid S_N^2 \leq A \right\} \tag{7}$$

où A est une constante déterminée par le risque de première espèce et où S_N^2 désigne la variance empirique corrigée définie par :

$$S_N^2 = \left(\frac{1}{T-1}\right) \sum\nolimits_{t=1}^{T} r_t^2 \tag{8}$$

Question 4 (1 point) Montrez que le seuil critique A associé à un niveau de risque de première espèce α, est défini par la relation :

$$A = F^{-1}(\alpha) \times \left(\frac{\sigma_0^2}{T-1}\right) \tag{9}$$

où $F(.)$ désigne la fonction de répartition d'un chi-deux à $T-1$ degrés de liberté.

Question 5 (1 point) On suppose que $\sigma_0^2 = 4$ et que l'on dispose d'un échantillon de 101 observations historiques. Pour cet échantillon, on observe une variance empirique des rendements S_N^2 égale à 4.2. Pour un risque de première espèce de 5%, que pouvez vous conclure quand à la valeur de σ^2 ?

Question 6 (1 point) On considère à présent un test unilatéral sur la Value-at-Risk à 5% :

$$H_0 : \ VaR_{(0.05)} = -15 \tag{10}$$

$$H_1 : \ VaR_{(0.05)} < -15 \tag{11}$$

On suppose que l'espérance des rendements, supposée connue, est égale à $m = -11.71$. Pour un risque de première espèce de 5%, quelle est votre conclusion quand à la valeur de la VaR à 5% de l'action EDF si l'on observe une variance empirique des rendements égale à S_N^2 égale à 4.2 ?
Remarque : On admet que tester $H_0 : \ VaR_{(0.05)} = C$ contre $H_1 : \ VaR_{(0.05)} < C$ est équivalent à tester $H_0 : \sigma^2 = \left[(C-m)/\Phi^{-1}(0.05)\right]^2$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \sigma^2 < \left[(C-m)/\Phi^{-1}(0.05)\right]^2$.

Question 7 (1 point) Donnez l'expression de la puissance du test de l'hypothèse nulle $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ en fonction des paramètres T, σ_0 et du risque de première espèce α.

Question 8 (2 points) On considère finalement le test bilatéral :

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \tag{12}$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \tag{13}$$

Montrez que la région d'acceptation du test associé à un risque de première espèce α, est de la forme :

$$\overline{W} = \left\{ r_1, .., r_T \mid F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{\sigma_0^2}{T-1}\right) < S_N^2 < F^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{\sigma_0^2}{T-1}\right) \right\} \tag{14}$$

où $F(.)$ désigne la fonction de répartition d'un chi-deux à $T-1$ degrés de liberté.

Question 9 (1.5 points) Soit le test bilatéral :

$$H_0 : \sigma^2 = 4 \tag{15}$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq 4 \tag{16}$$

Pour un échantillon de 101 observations historiques, on observe une variance empirique des rendements S_N^2 égale à 4.2. (i) Pour un risque de première espèce de 5%, que pouvez vous conclure quand à la valeur de σ^2 ? (ii) Qu'en déduisez vous quant à la valeur de la VaR à 5% de l'action EDF si $m = -11.71$?

=======

Exercice 2 *Maximum de Vraisemblance. Barème : 5 points.*

Soit X une v.a.r. continue dont la fonction de densité vérifie :

$$f_X(x) = \theta \ e^{-\theta \ x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \tag{17}$$

où θ est un paramètre strictement positif. Soit $\{X_1, .., X_N\}$ un N-échantillon de variables *i.i.d.* de même loi que X. On admet que :

$$E(X) = \frac{1}{\theta} \quad V(X) = \frac{1}{\theta^2} \tag{18}$$

Question 1 (1 point) Déterminez la log-vraisemblance associée à cet échantillon.

Question 2 (1 point) Montrez que l'estimateur du MV du paramètre θ est :

$$\widehat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}_N} \tag{19}$$

où $\overline{X}_N = (1/N) \sum_{i=1}^{N} X_i$ désigne la moyenne empirique.

Question 3 (1 point) Montrez que la moyenne empirique $\overline{X}_N$ est un estimateur (i) sans biais et (ii) convergent (au sens de la convergence en probabilité) de $1/\theta$.

Question 4 (1 point) En déduire que l'estimateur du MV $\widehat{\theta}$ est un estimateur convergent de θ. *Indication : on rappelle que si Y_N converge en probabilité vers une valeur réelle c, et si $g(.)$ est une fonction continue en c, alors $g(Y_N)$ converge vers $g(c)$.*

Question 5 (1 point) On admet que :

$$V\left(\widehat{\theta}\right) = \frac{\theta^2}{N} \tag{20}$$

Montrez que l'estimateur du MV est un estimateur efficace de θ au sens de la borne FDCR.

=======

Exercice 3 *Test d'Indépendance : Relation Salaire / Diplôme. Barème : 4 points.*

On considère un échantillon de 700 jeunes peu diplômés sortis du système scolaire. On s'intéresse à la liaison entre le niveau de salaire des jeunes en euros (noté X) et leur niveau de formation (variable Y). On vous demande de tester au seuil de 5% l'indépendance du niveau de salaire des jeunes à leur niveau de formation. *Vous détaillerez précisément votre démarche.*

X \ Y	Bac	BEP-CAP	Sixième	Total
600-750	100	270	30	400
750-900	60	130	10	200
900-1650	40	50	10	100
Total	200	450	50	700

Bon courage...