Université d'Orléans - Licence Economie et Gestion
Statistique appliquée à l'économie et à la gestion

C. Hurlin. Examen Terminal Janvier 2011

Exercice Estimation, convergences et tests paramétriques. *Barème : 22 points.*

On considère une v.a.r. t continue et positive admettant pour fonction de densité :

$$f(t) = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{t}{a}\right), \quad \forall t > 0, \tag{1}$$

où $a > 0$ est un paramètre inconnu. On dispose d'un échantillon $\{t_1, .., t_T\}$ de T variables *i.i.d.* de même loi que T. On admet que :

$$\mathbb{E}(t) = a, \quad \mathbb{V}(t) = a^2. \tag{2}$$

Partie I. Convergences (12 points)

Question 1 (2 points) On considère un estimateur $\widehat{a}$ du paramètre a défini par la moyenne empirique :

$$\widehat{a} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} t_i. \tag{3}$$

Montrez que cet estimateur est convergent *en probabilité*.

Question 2 (2 points) Montrez que l'estimateur $\widehat{a}$ converge *en moyenne quadratique*.

Question 3 (2 points) On admet que l'estimateur $\widehat{a}$ converge en moyenne quadratique vers a. Pour n'importe quelle valeur $k > 0$, montrez que :

$$k^2 \times \Pr\left[|\widehat{a} - a| > k\right] \leq \frac{a^2}{T}. \tag{4}$$

Question 4 (2 points) Montrez que l'estimateur $\widehat{a}$ converge *en distribution* vers une loi loi normale.

Question 5 (2 points) Vérifiez que l'estimateur $\widehat{a}$ correspond à l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre a associé à l'échantillon $\{t_1, .., t_T\}$.

Question 6 (2 points) Montrez que l'estimateur $\widehat{a}$ est efficace au sens de la borne FDCR.

Partie II. Tests paramétriques (8 points)

On considère le test suivant :

$$H_0 : a = a_0, \tag{5}$$

$$H_1 : a = a_1. \tag{6}$$

avec $a_1 > a_0$.

Question 7 (2 points) On note $L(t_1,..,t_T;a)$ la vraisemblance de l'échantillon $\{t_1,..,t_T\}$. Montrez que :

$$\frac{L(t_1,..,t_T;a_0)}{L(t_1,..,t_T;a_1)} = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^T \exp\left[\left(\frac{a_0-a_1}{a_1 a_0}\right)\sum_{i=1}^{T} t_i\right]. \tag{7}$$

Question 8 (2 points) En utilisant le lemme de Neyman Pearson, montrez que la région critique du test UPP de niveau $\alpha\%$ est de la forme :

$$W = \{t_1,.,t_T \mid \widehat{a} > C\}, \tag{8}$$

où C est une constante déterminée par le risque de première espèce α.

Question 9 (2 points) En utilisant le théorème central limite, démontrez que dans le cas d'un échantillon de très grande taille, le seuil critique C associé au test précédent s'écrit sous la forme :

$$C \simeq a_0 + \frac{a_o}{\sqrt{T}}\Phi^{-1}(1-\alpha) \tag{9}$$

où $\Phi(.)$ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Question 10 (2 points) Montrez que la puissance du test de niveau α est définie par :

$$P = 1 - \Phi\left[\frac{a_0-a_1}{a_1/\sqrt{T}} + \frac{a_o}{a_1}\Phi^{-1}(1-\alpha)\right], \quad \forall a_1 > a_0 \tag{10}$$

Que devient cette expression lorsque l'on évalue (à tort) pour $a_1 = a_0$?

Question 11 (2 points) On considère à présent le test bilatéral suivant :

$$H_0 : a = a_0, \tag{11}$$

$$H_1 : a \neq a_1. \tag{12}$$

Pour un échantillon de très grande taille, déterminez la région de non rejet de ce test pour un niveau de risque de première espèce de $\alpha\%$.