

Université d'Orléans - Licence Economie et Gestion

Statistique Mathématique

C. Hurlin. Correction de l'Examen Terminal Janvier 2011

Exercice 1 Barème : 22 points.

Question 1 (2 points) Première façon

$$\mathbb{E}(\hat{a}) = a \quad (0.5 \text{ point}) \quad (1)$$

$$\mathbb{V}(\hat{a}) = \frac{a^2}{T} \quad (0.5 \text{ point}) \quad (2)$$

Donc

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{V}(\hat{a}) = 0 \quad (0.5 \text{ point}) \quad (3)$$

Il s'ensuit que

$$p \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{a} = a \quad (0.5 \text{ point})$$

Autre façon (2 points + 1 point bonus) : Les variables $\{t_1, \dots, t_T\}$ sont *i.i.d.*, d'après la loi faible des grands nombres, il vient immédiatement :

$$p \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{a} = a \quad (4)$$

Question 2 (2 points) On sait que :

$$\mathbb{E}[(\hat{a} - a)]^2 = \mathbb{V}(\hat{a}) = \frac{a^2}{T} \quad (5)$$

Dès lors,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\hat{a} - a)]^2 = 0 \quad 1 \text{ point} \quad (6)$$

Donc :

$$\hat{a} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{m.s.} a \quad 1 \text{ point} \quad (7)$$

Question 3 (2 points) On admet que

$$\hat{a} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{m.s.} a \quad (8)$$

Dès lors, quelle que soit les valeurs $k > 0$ et $r > 0$, on a :

$$\Pr[|\hat{a} - a| > k] \leq \frac{1}{k^r} \mathbb{E}(|\hat{a} - a|^r) \quad 1 \text{ point}$$

Pour $r = 2$, il vient :

$$\Pr[|\hat{a} - a| > k] \leq \frac{1}{k^2} \mathbb{E}(|\hat{a} - a|^2) \quad 1 \text{ point} \quad (9)$$

$$\iff k^2 \Pr[|\hat{a} - a| > k] \leq \mathbb{V}(\hat{a}) \quad 1 \text{ point}$$

D'où finalement

$$k^2 \times \Pr[|\hat{a} - a| > k] \leq \frac{a^2}{T} \quad (10)$$

Question 4 (2 points) Les variables $\{t_1, \dots, t_T\}$ sont *i.i.d.* avec $\mathbb{E}(t) = a$ et $\mathbb{E}(t) = a^2$ (0.5 point).
Dès lors, par application du théorème central limite (0.5 point), il vient :

$$\sqrt{T} \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T t_i - a \right) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d.} N(0, a^2) \quad (11)$$

Dès lors (1 point) :

$$\sqrt{T}(\hat{a} - a) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d.} N(0, a^2) \quad (12)$$

Question 5 (2 points) La log-vraisemblance de $\{t_1, \dots, t_T\}$ s'écrit :

$$\log L(t_1, \dots, t_T; a) = -T \log(a) - \sum_{i=1}^T \frac{t_i}{a} \quad 1 \text{ point} \quad (13)$$

Dès lors, il vient :

$$\left. \frac{\partial \log L(t_1, \dots, t_T; a)}{\partial a} \right|_{\hat{a}} = -\frac{T}{\hat{a}} + \sum_{i=1}^T \frac{t_i}{\hat{a}^2} = 0 \quad (14)$$

Pour $\hat{a} > 0$, il vient :

$$\hat{a} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T t_i \quad 0.5 \text{ point} \quad (15)$$

On vérifie la condition suffisante :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \log L(t_1, \dots, t_T; a)}{\partial a^2} \right|_{\hat{a}} &= \frac{T}{\hat{a}^2} - \sum_{i=1}^T \frac{2t_i}{\hat{a}^3} \\ &= \frac{T}{\hat{a}^2} - \frac{2T\hat{a}}{\hat{a}^3} \\ &= -\frac{T}{\hat{a}^2} < 0 \quad 0.5 \text{ point} \end{aligned} \quad (16)$$

Question 6 (2 points) La borne FDCR est définie par l'inverse de la quantité d'information de Fisher:

$$\begin{aligned} I_T(a) &= \mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \log L(t_1, \dots, t_T; a)}{\partial a^2} \right] \\ &= \mathbb{E} \left(\frac{T}{a^2} \right) \\ &= \frac{T}{a^2} \quad 1 \text{ point} \end{aligned} \quad (17)$$

On sait que :

$$\mathbb{V}(\hat{a}) = \frac{a^2}{T} = \frac{1}{I_T(a)} \quad 0.5 \text{ point} \quad (18)$$

L'estimateur \hat{a} est efficace au sens de la borne FDCR (0.5 point).

Partie II. Tests paramétriques (points)

Question 7 (2 points) On sait que :

$$L(t_1, \dots, t_T; a) = \frac{1}{a^T} \exp\left(-\sum_{i=1}^T \frac{t_i}{a}\right) \quad 1 \text{ point} \quad (19)$$

Dès lors, il vient

$$\frac{L(t_1, \dots, t_T; a_0)}{L(t_1, \dots, t_T; a_1)} = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^T \exp\left[\left(\frac{a_0 - a_1}{a_1 a_0}\right) \sum_{i=1}^T t_i\right] \quad 1 \text{ point} \quad (20)$$

Question 8 (2 points) D'après le lemme de Neyman Pearson, la région critique du test UPP de niveau $\alpha\%$ est de la forme :

$$W = \left\{ t_1, \dots, t_T \mid \frac{L(t_1, \dots, t_T; a_0)}{L(t_1, \dots, t_T; a_1)} \leq K \right\}, \quad (21)$$

où K est une constante déterminée par le risque de première espèce α (0. point). Il vient :

$$\frac{L(t_1, \dots, t_T; a_0)}{L(t_1, \dots, t_T; a_1)} = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^T \exp\left[\left(\frac{a_0 - a_1}{a_1 a_0}\right) \sum_{i=1}^T t_i\right] \leq K, \quad (22)$$

$$\Leftrightarrow \exp\left[\left(\frac{a_0 - a_1}{a_1 a_0}\right) \sum_{i=1}^T t_i\right] \leq K \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^T, \quad (23)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a_0 - a_1}{a_1 a_0}\right) \sum_{i=1}^T t_i \leq \log \left[K \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^T \right], \quad (24)$$

Ici on a $a_1 > a_0$, donc il vient :

$$\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T t_i > \frac{1}{T} \frac{a_1 a_0}{a_0 - a_1} \log \left[K \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^T \right], \quad (25)$$

où encore :

$$\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T t_i > C \quad 1 \text{ point} \quad (26)$$

où C est constante déterminée par le risque de première espèce.

$$W = \{t_1, \dots, t_T \mid \hat{a} > C\}, \quad 0.5 \text{ point} \quad (27)$$

Question 9 (2 points) D'après le théorème central limite,

$$\sqrt{T}(\hat{a} - a) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d.} N(0, a^2) \quad (28)$$

Donc pour un échantillon de très grande taille :

$$\hat{a} \sim N\left(a, \frac{a^2}{T}\right) \quad 0.5 \text{ point} \quad (29)$$

Dès lors, il vient :

$$\alpha = \Pr[\hat{a} > C \mid a = a_0] \quad 0.5 \text{ point} \quad (30)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \alpha = \Pr\left[\frac{\hat{a} - a_o}{a_0/\sqrt{T}} \leq \frac{C - a_o}{a_0/\sqrt{T}} \mid \frac{\hat{a} - a_o}{a_0/\sqrt{T}} \sim N(0, 1)\right] \quad 0.5 \text{ point} \quad (31)$$

$$\Leftrightarrow \Phi^{-1}(1 - \alpha) = \frac{C - a_o}{a_0/\sqrt{T}} \quad (32)$$

$$\Leftrightarrow C \simeq a_0 + \frac{a_o}{\sqrt{T}}\Phi^{-1}(1 - \alpha) \quad 0.5 \text{ point} \quad (33)$$

Question 10 (2 points) La puissance P de ce test en fonction est définie par :

$$P = \Pr[\hat{a} > C \mid a = a_1] \quad 0.5 \text{ point} \quad (34)$$

$$\Leftrightarrow P = 1 - \Pr\left[\frac{\hat{a} - a_1}{a_1/\sqrt{T}} \leq \frac{C - a_1}{a_1/\sqrt{T}} \mid \frac{\hat{a} - a_1}{a_1/\sqrt{T}} \sim N(0, 1)\right] \quad 0.5 \text{ point} \quad (35)$$

$$\Leftrightarrow P = 1 - \Phi\left(\frac{C - a_1}{a_1/\sqrt{T}}\right) \quad (36)$$

$$\Leftrightarrow P = 1 - \Phi\left(\frac{a_0 - a_1}{a_1/\sqrt{T}} + \frac{a_o}{a_1}\Phi^{-1}(1 - \alpha)\right) \quad 0.5 \text{ point} \quad (37)$$

Question 11 (2 points) On considère à présent le test bilatéral suivant :

$$H_0 : a = a_0, \quad (38)$$

$$H_1 : a \neq a_1. \quad (39)$$

On sait que la région d'acceptation de ce test correspond à l'intersection des régions d'acceptation des tests unilatéraux correspondants de niveau $\alpha/2$ (1 point). Dès lors, il vient que pour un échantillon de grande taille :

$$\overline{W} = \left\{ t_1, \dots, t_T \mid a_0 + \frac{a_o}{\sqrt{T}}\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \hat{a} < a_0 + \frac{a_o}{\sqrt{T}}\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right\}, \quad 1 \text{ point} \quad (40)$$