Université d'Orléans - Licence Economie et Gestion
Statistique appliquée à l'économie et à la gestion

C. Hurlin. Examen Terminal Janvier 2012

Exercice Estimation, convergences et tests paramétriques. *Barème : 22 points.*

On considère une v.a.r. X discrete qui suit un loi de Poisson de paramètre b telle que :

$$\Pr(X = k) = e^{-b}\frac{b^k}{k!}$$

où $b > 0$ est un paramètre inconnu. On dispose d'un échantillon $\{X_1, .., X_N\}$ de N variables *i.i.d.* de même loi que X. On admet que :

$$\mathbb{E}(X) = b, \quad \mathbb{V}(X) = b. \tag{1}$$

Partie I. Convergences (12 points)

Question 1 (2 points) On considère un estimateur $\widehat{b}$ du paramètre b défini par la moyenne empirique :

$$\widehat{b} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i. \tag{2}$$

Montrez que cet estimateur est convergent *en probabilité*.

Question 2 (2 points) Montrez que l'estimateur $\widehat{b}$ converge *en moyenne quadratique*.

Question 3 (2 points) On admet que l'estimateur $\widehat{b}$ converge en moyenne quadratique vers b. Pour n'importe quelle valeur $c > 0$, montrez que :

$$c^2 \times \Pr\left[\left|\widehat{b} - b\right| > c\right] \leq \frac{b}{N}. \tag{3}$$

Question 4 (2 points) Montrez que l'estimateur $\widehat{b}$ converge *en distribution* vers une loi loi normale.

Question 5 (2 points) Vérifiez que l'estimateur $\widehat{b}$ correspond à l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre b associé à l'échantillon $\{X_1, .., X_N\}$.

Question 6 (2 points) Montrez que l'estimateur $\widehat{b}$ est efficace au sens de la borne FDCR.

Partie II. Tests paramétriques (10 points)

On considère le test suivant :

$$H_0 : b = b_0, \tag{4}$$

$$H_1 : b = b_1. \tag{5}$$

avec $b_1 > b_0$.

Question 7 (2 points) On note $L(X_1, .., X_N; b)$ la vraisemblance de l'échantillon $\{X_1, .., X_N\}$. Montrez que :

$$\frac{L(X_1, .., X_N; b_0)}{L(X_1, .., X_N; b_1)} = e^{N(b_1 - b_0)} \times \left(\frac{b_0}{b_1}\right)^{\sum_{i=1}^{N} X_i}. \tag{6}$$

Question 8 (2 points) En utilisant le lemme de Neyman Pearson, montrez que la région critique du test UPP de niveau $\alpha\%$ est de la forme :

$$W = \left\{ X_1, ., X_N \mid \widehat{b} \geq D \right\}, \tag{7}$$

où D est une constante déterminée par le risque de première espèce α.

Question 9 (2 points) En utilisant le théorème central limite, démontrez que dans le cas d'un échantillon de très grande taille, le seuil critique D associé au test précédent s'écrit sous la forme :

$$D \simeq b_0 + \sqrt{\frac{b_o}{N}} \Phi^{-1}(1 - \alpha) \tag{8}$$

où $\Phi(.)$ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Question 10 (2 points) Montrez que la puissance du test de niveau α est définie par :

$$P = 1 - \Phi\left[\frac{b_0 - b_1}{\sqrt{b_1/N}} + \sqrt{\frac{b_o}{b_1}} \Phi^{-1}(1 - \alpha)\right], \quad \forall b_1 > b_0 \tag{9}$$

Que devient cette expression lorsque l'on évalue (à tort) pour $b_1 = b_0$?

Question 11 (2 points) On considère à présent le test bilatéral suivant :

$$H_0 : b = b_0, \tag{10}$$

$$H_1 : b \neq b_1. \tag{11}$$

Pour un échantillon de très grande taille, déterminez la région de non rejet de ce test pour un niveau de risque de première espèce de $\alpha\%$.