Université d'Orléans - Licence Economie et Gestion
Statistique appliquée à l'économie et à la gestion

C. Hurlin. Correction de l'Examen Terminal Janvier 2012

Exercice 1 *Barème : 22 points*

Question 1 (2 points) Première façon

$$\mathbb{E}\left(\widehat{b}\right) = b \quad \text{(0.5 point)} \tag{1}$$

$$\mathbb{V}\left(\widehat{b}\right) = \frac{b}{N} \quad \text{(0.5 point)} \tag{2}$$

Donc

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{V}\left(\widehat{b}\right) = 0 \quad \text{(0.5 point)} \tag{3}$$

Il s'ensuit que

$$\underset{N\to\infty}{p\lim}\,\widehat{b} = b \quad \text{(0.5 point)}$$

Autre façon (2 points + 1 point bonus) : Les variables $\{X_1, .., X_N\}$ sont *i.i.d.*, d'après la loi faible des grands nombres, il vient immédiatement :

$$\underset{N\to\infty}{p\lim}\,\widehat{b} = b \tag{4}$$

Question 2 (2 points) On sait que :

$$\mathbb{E}\left[\left(\widehat{b} - b\right)^2\right] = \mathbb{V}\left(\widehat{b}\right) = \frac{b}{N} \tag{5}$$

Dès lors,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\widehat{b} - b\right)^2\right] = 0 \quad \text{1 point} \tag{6}$$

Donc :

$$\widehat{b} \underset{N\to\infty}{\overset{m.s.}{\longrightarrow}} b \quad \text{1 point} \tag{7}$$

Question 3 (2 points) On admet que

$$\widehat{b} \underset{N\to\infty}{\overset{m.s.}{\longrightarrow}} b \tag{8}$$

Dès lors, quelle que soit les valeurs $c > 0$ et $r > 0$, on a :

$$\Pr\left[\left|\widehat{b} - b\right| > c\right] \leq \frac{1}{c^r}\mathbb{E}\left(\left|\widehat{b} - b\right|^r\right) \quad \text{1 point}$$

Pour $r = 2$, il vient :

$$\Pr\left[\left|\widehat{b} - b\right| > c\right] \leq \frac{1}{c^2}\mathbb{E}\left(\left|\widehat{b} - b\right|^2\right) \tag{9}$$

$$\Longleftrightarrow c^2 \Pr\left[\left|\widehat{b} - b\right| > c\right] \leq \mathbb{V}\left(\widehat{b}\right) \quad \text{1 point}$$

D'où finalement

$$c^2 \times \Pr\left[\left|\widehat{b} - b\right| > c\right] \leq \frac{b}{N} \tag{10}$$

Question 4 (2 points) Les variables $\{X_1,..,X_N\}$ sont *i.i.d.* avec $\mathbb{E}(X_i)=b$ et $\mathbb{V}(X_i)=b$ (0.5 point). Dès lors, par application du théorème central limite (0.5 point), il vient :

$$\sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i-b\right)\underset{N\to\infty}{\overset{d.}{\longrightarrow}}N(0,b) \tag{11}$$

Dès lors (1 point) :

$$\sqrt{N}\left(\widehat{b}-b\right)\underset{N\to\infty}{\overset{d.}{\longrightarrow}}N(0,b) \tag{12}$$

Question 5 (2 points) La vraisemblance de $\{X_1,..,X_N\}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} L(X_1,..,X_N;b) &= \prod_{i=1}^{N}e^{-b}\frac{b^{X_i}}{X_i\,!} && (13)\\ &= e^{-bN}\prod_{i=1}^{N}\frac{b^{X_i}}{X_i\,!} && (14) \end{aligned}$$

La log-vraisemblance de $\{X_1,..,X_N\}$ s'écrit :

$$\ln L(X_1,..,X_N;b)=-bN+\ln(b)\sum_{i=1}^{N}X_i-\sum_{i=1}^{N}\ln(X_i!)\quad \text{1 point} \tag{15}$$

Dès lors, il vient :

$$\frac{\partial\ln L(X_1,..,X_N;b)}{\partial b}=-N+\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{N}X_i \tag{16}$$

Pour $\widehat{b}>0$, il vient :

$$\left.\frac{\partial\ln L(X_1,..,X_N;b)}{\partial b}\right|_{\widehat{b}}=-N+\frac{1}{\widehat{b}}\sum_{i=1}^{N}X_i=0$$

$$\widehat{b}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i\quad \text{0.5 point} \tag{17}$$

On vérifie la condition suffisante :

$$\left.\frac{\partial^2\ln L(X_1,..,X_N;b)}{\partial b^2}\right|_{\widehat{b}}=-\frac{1}{\widehat{b}^2}\sum_{i=1}^{N}X_i<0\qquad \text{(0.5 point)} \tag{18}$$

Question 6 (2 points) La borne FDCR est définie par l'inverse de la quantité d'information de Fisher:

$$\begin{aligned} I_N(b) &= \mathbb{E}\left[-\frac{\partial^2\ln L(X_1,..,X_N;b)}{\partial b^2}\right] \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{b^2}\sum_{i=1}^{N}X_i\right) \\ &= \frac{1}{b^2}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}(X_i) && (19)\\ &= \frac{bN}{b^2} && (20)\\ &= \frac{N}{b}\quad \text{(1 point)} && (21) \end{aligned}$$

On sait que :

$$\mathbb{V}\left(\widehat{b}\right) = \frac{b}{N} = \frac{1}{I_N(b)} \quad \text{(0.5 point)} \tag{22}$$

L'estimateur $\widehat{b}$ est efficace au sens de la borne FDCR (0.5 point).

Partie II. Tests paramétriques (points)

Question 7 (2 points) On sait que :

$$L(X_1, .., X_N; b) = e^{-bN} \prod_{i=1}^{N} \frac{b^{X_i}}{X_i\ !} \tag{23}$$

Dès lors, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{L(X_1, .., X_N; b_0)}{L(X_1, .., X_N; b_1)} &= \frac{e^{-b_0 N} \prod_{i=1}^{N} \frac{b_0^{X_i}}{X_i\ !}}{e^{-b_1 N} \prod_{i=1}^{N} \frac{b_1^{X_i}}{X_i\ !}} \quad \text{1 point} \\
&= e^{N(b_1 - b_0)} \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{b_0}{b_1}\right)^{X_i} && (24) \\
&= e^{N(b_1 - b_0)} \times \left(\frac{b_0}{b_1}\right)^{\sum_{i=1}^{N} X_i} \qquad \text{1 point} && (25)
\end{aligned}$$

Question 8 (2 points) D'après le lemme de Neyman Pearson, la la région critique du test UPP de niveau $\alpha\%$ est de la forme :

$$W = \left\{ X_1, ., X_N \mid \frac{L(X_1, .., X_N; b_0)}{L(X_1, .., X_N; b_1)} \leq K \right\}, \tag{26}$$

où K est une constante déterminée par le risque de première espèce α (0.5 point). Il vient :

$$\frac{L(X_1, .., X_N; b_0)}{L(X_1, .., X_N; b_1)} = e^{N(b_1 - b_0)} \times \left(\frac{b_0}{b_1}\right)^{\sum_{i=1}^{N} X_i} \leq K, \tag{27}$$

$$\Leftrightarrow N(b_1 - b_0) + \sum_{i=1}^{N} X_i \ \ln\left(\frac{b_0}{b_1}\right) \leq \ln(K), \tag{28}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} X_i \ \ln\left(\frac{b_0}{b_1}\right) \leq \ln(K) - N(b_1 - b_0), \tag{29}$$

ici on a $b_1 > b_0$, donc $\frac{b_0}{b_1} < 1$ d'où $\ln\left(\frac{b_0}{b_1}\right) < 0$. Dès lors :

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} X_i \geq \frac{\ln(K) - N(b_1 - b_0)}{\ln\left(\frac{b_0}{b_1}\right)}, \tag{30}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} X_i \geq \frac{\ln(K) - N(b_1 - b_0)}{\ln(b_0) - \ln(b_1)}, \tag{31}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \geq \frac{\ln(K) - N(b_1 - b_0)}{N\ (\ln(b_0) - \ln(b_1))}, \tag{32}$$

où encore :

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \geq D \quad 1 \text{ point} \tag{33}$$

où D est constante déterminée par le risque de première espèce.

$$W = \left\{ X_1, ., X_N \mid \widehat{b} \geq D \right\}, \quad 0.5 \text{ point} \tag{34}$$

Question 9 (2 points) D'après le théorème central limite,

$$\sqrt{N}\left(\widehat{b} - b\right) \underset{N\to\infty}{\overset{d.}{\longrightarrow}} N(0, b) \tag{35}$$

Donc pour un échantillon de très grande taille :

$$\widehat{b} \sim N\left(b, \frac{b}{N}\right) \quad 0.5 \text{ point} \tag{36}$$

Dès lors, il vient :

$$\alpha = \Pr\left[\widehat{b} > D \;\middle|\; b = b_0\right] \quad 0.5 \text{ point} \tag{37}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \alpha = \Pr\left[\frac{\widehat{b} - b_o}{\sqrt{b_0/N}} \leq \frac{D - b_o}{\sqrt{b_0/N}} \;\middle|\; \frac{\widehat{b} - b_o}{\sqrt{b_0/N}} \sim N(0,1)\right] \quad 0.5 \text{ point} \tag{38}$$

$$\Leftrightarrow \Phi^{-1}(1 - \alpha) = \frac{D - a_o}{\sqrt{b_0/N}} \tag{39}$$

$$\Leftrightarrow D \simeq b_0 + \sqrt{\frac{b_o}{N}}\Phi^{-1}(1 - \alpha) \quad 0.5 \text{ point} \tag{40}$$

Question 10 (2 points) La puissance P de ce test en fonction est définie par :

$$P = \Pr\left[\widehat{b} > D \;\middle|\; b = b_1\right] \quad 0.5 \text{ point} \tag{41}$$

$$\Leftrightarrow P = 1 - \Pr\left[\frac{\widehat{b} - b_1}{\sqrt{b_1/N}} \leq \frac{D - b_1}{\sqrt{b_1/N}} \;\middle|\; \frac{\widehat{b} - b_1}{\sqrt{b_1/N}} \sim N(0,1)\right] \quad 0.5 \text{ point} \tag{42}$$

$$\Leftrightarrow P = 1 - \Phi\left(\frac{D - b_1}{\sqrt{b_1/N}}\right) \tag{43}$$

$$\Leftrightarrow P = 1 - \Phi\left(\frac{b_0 - b_1}{\sqrt{b_1/N}} + \sqrt{\frac{b_o}{b_1}}\Phi^{-1}(1 - \alpha)\right) \quad 0.5 \text{ point} \tag{44}$$

Lorsque la puissance est évalué à tort pour $b_1 = b_0$, alors la puissance est égale à α, le risque I (0.5 point) .

Question 11 (2 points) On considère à présent le test bilatéral suivant :

$$H_0 : b = b_0, \tag{45}$$

$$H_1 : b \neq b_1. \tag{46}$$

On sait que la région d'acceptation de ce test correspond à l'intersection des régions d'acceptation des tests unilatéraux correspondants de niveau $\alpha/2$ (1 point). Dès lors, il vient que pour un échantillon de grande taille :

$$\overline{W} = \left\{ t_1, ., t_T \mid b_0 + \sqrt{\frac{b_o}{N}} \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \widehat{b} < b_0 + \sqrt{\frac{b_o}{N}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right\}, \quad \text{1 point} \tag{47}$$