

Université d'Orléans - Licence Economie et Gestion Statistique

C. Hurlin. Examen Novembre 2005

Exercice 1 Barème : 7 points.

On admet que la durée de vie d'un matériel est une variable aléatoire suivant une loi continue de densité $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{a} e^{-\frac{t}{a}} \quad \forall t > 0, a > 0 \quad (1)$$

a étant un paramètre inconnu que l'on veut estimer à l'aide d'observations indépendantes t_1, t_2, \dots, t_n .

Question 1 (1 point) Calculer $E(T)$ et $V(T)$.

Question 2 (2 points) Quelle est la borne inférieure de la variance de toute estimation ponctuelle de a ?

Question 3 (2 points) Montrer que l'estimation efficace de a est

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \quad (2)$$

Question 4 (2 points) Retrouver le résultat par la méthode du maximum de vraisemblance.

Exercice 2 Barème : 4 points.

On veut estimer le paramètre p d'une loi géométrique:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p \quad (3)$$

On dispose pour cela d'un échantillon de n observations indépendantes de X .

Question 1 (2 points) Estimer p par la méthode du maximum de vraisemblance.

Question 2 (2 points) Calculer la variance asymptotique de cette estimation \hat{p} . *On rappelle que la variance asymptotique d'un estimateur du maximum de vraisemblance est égale à l'inverse de la quantité d'information de Fisher.*

Exercice 3 Barème : 5 points.

On veut estimer la moyenne m d'une variable aléatoire X suivant une loi normale de variance connue $\sigma^2 = 6.25$ à l'aide d'un échantillon de taille $n = 100$ valeurs indépendantes. La moyenne \bar{X} de l'échantillon observé est égale à 4.3.

Question 1 (2 points) Construire un intervalle de confiance pour un risque de $\alpha = 15\%$.

Question 2 (3 points) Construire le même intervalle en supposant cette fois-ci que la variance de X n'est pas connue et que la réalisation de la variance empirique corrigée est égale à 6.76 sur cet échantillon. *Détaillez précisément votre démarche.*

Exercice 4 *Barème : 6 points.*

Un promoteur désire connaître le nombre de garages qu'il est souhaitable de construire afin que les locataires puissent y ranger leur voiture.

Question 1 (2 points) On suppose que la proportion p des ménages possédant une voiture est comprise entre 0.20 et 0.40. Entre quels nombres doit-on fixer le nombre de ménages à interroger pour avoir une précision de 5% sur la proportion à estimer.

Question 2 (3 points) On interroge 3238 ménages. On trouve parmi eux 971 possesseurs de voiture.

- (a) Estimer par une estimation ponctuelle la proportion p des ménages ayant une voiture. Vérifier que cet estimateur est sans biais et convergent.
- (b) Estimer par la méthode de l'intervalle de confiance la proportion p des ménages ayant une voiture. On considère un risque de $\alpha = 5\%$.
- (c) Parmi les différentes estimations précédentes laquelle doit-on retenir ?

Question 2 (3 points) On émet l'hypothèse que trois personnes sur cinq posséderont une voiture dans 10 ans. Combien de garages est-il suffisant de construire pour un ensemble de 423 appartements ?