

La Méridienne

Un peu d'histoire du mètre

Un méridien est un cercle d'environ 40000 km de circonférence, qui passe par les pôles Nord et Sud de notre Terre.

Il faut attendre le XVII^{ème} siècle pour que les sciences expérimentales apparaissent avec Galilée, formidable inventeur: le pendule, la lunette astronomique, le thermomètre... autant d'instruments utiles pour effectuer des mesures de plus en plus précises: la sciences recherche la perfection.

Le XVII^{ème} siècle verra la création de l'observatoire de Paris près de Port-Royal.

Le XVIII^{ème} siècle, unanimement désigné comme le siècle des lumières, est riche de savants qui découvrent, inventent... Toutes les sciences se développent. Jean Picard, les premiers Cassini et d'autres commencent le tracé du méridien de Paris, vers 1720. Comme le terrain est vallonné, la mesure au sol n'est pas possible, ils inventent la mesure par triangulation en se servant des points les plus hauts (clochers, tours,...) comme sommets de triangles accolés les uns aux autres. Le but, à l'époque, est surtout le relevé des cartes. La géodésie est née.

Toutefois une difficulté demeure: les unités de mesure sont très différentes d'un pays à l'autre, d'une région, chaque seigneur exerce un pouvoir économique puissant par le biais des mesures de longueur, de poids et même les monnaies. Déjà Charlemagne, puis Henri II avaient tenté d'unifier ces systèmes mais les habitudes sont tenaces et il faut attendre la révolution française pour balayer ces archaïsmes. Les Français avaient du reste très souvent manifesté leurs inquiétudes sur ce sujet et sur beaucoup d'autres en rédigeant leurs cahiers de doléances et demandent « une mesure pour tous les temps, pour tous les peuples »

En 1790, un nouveau système est adopté: il est décimal (fini les divisions par 12 ou par 6). Pour multiplier ou pour diviser par dix, il suffit de déplacer une virgule. (A cette époque, certains révolutionnaires veulent imposer la base dix à la mesure du temps, pour l'heure, la semaine, le calendrier révolutionnaire, mais ces réformes ne furent pas adoptées)

L'idée retenue est d'utiliser la terre, « objet » universel. La mesure de la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre comme base d'un étalon de longueur donnera le mètre, utilisable par tous les peuples de la terre. La

révolution française contribuait ainsi au progrès de l'humanité, la science au service de l'homme.

L'Académie des sciences propose le mètre en 1791 et dès 1792, Delambre et Méchain sont désignés pour arpenter le méridien de Dunkerque à Barcelone; (1074 km et $9^{\circ}40'$ d'arc, environ).

Durant le XVIII^{ème} siècle, les Cassini et d'autres avaient déjà travaillé sur ce méridien (1720, 1744) tout en établissant des cartes détaillées de toute la France à la demande du roi. Pour cela, ils avaient édifié et modifié sur le terrain des repères visibles de loin ou utilisé des monuments remarquables: clochers d'église, tours de château...pour installer leurs instruments de mesure des angles principalement.

La nouveauté avec Méchain et Delambre, c'est leur volonté d'effectuer des mesures plus précises, proches de la perfection, grâce notamment à de nouveaux instruments tel le cercle répétiteur de Borda.

L'aventure de Méchain et Delambre durera sept ans pendant les quels ils endurèrent mille épreuves dues aux conditions de travail, aux gens rencontrés; cette période était trouble et fortement agitée même dans les campagnes traversées.

Leur travail fut malgré tout mené à bien grâce souvent à des hommes éclairés qui avaient compris le bien fondé de cette mission et son intérêt à long terme.

Le 1^{er} août 1793, la Convention adopte dans l'urgence, en s'appuyant sur les travaux antérieurs, le système métrique alors que les mesures sur le terrain ne sont pas terminées, le changement de système nécessite un gros effort de formation auprès de tous les français. Il faut fabriquer les nouveaux étalons de longueur et de poids. L'Académie des Sciences doit s'en charger, mais elle est dissoute le 8 août 1793 et 1794 sera une année agitée, ce n'est qu'en 1795, à la création du Bureau des Longitudes que les savants reprennent leurs travaux. Ils dureront jusqu'en 1799 et le 22 juin 1799 les nouveaux étalons: le mètre et le kilogramme en platine sont présentés au Conseil des Cinq-Cents par la Commission internationale qui a travaillé sur les mesures de Delambre et Méchain pour définir avec précision la valeur du mètre: 3 pieds 11,296 lignes de la toise du Pérou (celle qui avait le plus cours à Paris)

Depuis, les moyens de mesures ont été encore améliorés et on a constaté des erreurs dues au fait que la terre n'est pas une sphère parfaite: à cause de sa rotation (un tour en vingt quatre heures) elle est aplatie aux pôles, les arcs de méridien n'ont donc pas la même longueur selon qu'ils sont mesurés à Paris, à Alger,...Comme les savants de l'époque se sont basés sur une portion de $9^{\circ}40'$

situé autour du 45ème parallèle nord, ils ont fait quelques erreurs en appliquant leurs résultats à l'ensemble des méridiens de la terre.

La définition du mètre étalon a d'ailleurs changé deux fois depuis cette époque:

-En 1960, le mètre est devenu la longueur égale à 1650763,73 longueurs d'onde dans le vide d'une radiation de krypton 86

-En 1983, la 17ème conférence générale des poids et mesures adopte pour définition du mètre la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de $1^{\circ}299\,792\,458$ secondes.

Malgré tout, l'adoption de ces nouvelles mesures prendra du temps, les mentalités et les habitudes sont difficiles à bousculer. En 1812 souffle un vent de restauration, un nouveau décret met même fin à ce nouveau système, on revient à la toise, à l'aune...Mais comme le système métrique est enseigné dans les écoles et utilisé dans les administrations, il finira par s'imposer définitivement, en France le 1er Janvier 1840, en Italie en 1861, en Allemagne en 1871, et en Grande Bretagne en 1965.

Les hommes sur le terrain

Deux astronomes: Méchain, réservé, distant et tourmenté, et Delambre, énergique et enthousiaste. Deux hommes, deux visions du monde. Deux expériences diamétralement opposés. Les déchirements de l'époque se reflètent dans les différences des deux itinéraires. Delambre s'est réalisé dans cette opération et en a retiré la gloire, Méchain s'est effondré et il y a laissé la vie.

Delambre Jean-Baptiste, français, 1749-1822

Astronome, professeur au Collège de France, historien des sciences, il étudia Uranus et les premiers satellites connus de Jupiter. Assisté par les mathématiciens Monge et Legendre, dans un contexte politique assez trouble, Delambre fut chargé par l'Assemblée Constituante (1791) de calculer la longueur de l'arc de méridien Dunkerque-Barcelone avec l'astronome Pierre Méchain pour définir l'étalon métrique.

Méchain Pierre, français, 1744-1804

Célèbre astronome, ingénieur des ponts et chaussées, il commença sa carrière dans la composition des cartes marines. En 1781, grâce à un puissant télescope construit de ses mains, William Herschel découvre un nouvel objet céleste qu'il suppose être une comète. Méchain montre qu'il s'agit d'une planète. Elu à l'académie des sciences en 1795, il fut directeur du Bureau des longitudes en 1798. Il travailla tout d'abord avec Legendre et Jacques Cassini au calcul de la longitude de Paris par rapport à celle de Greenwich (2°20'15 '')

Ce n'est qu'en 1833 que les spécialistes de géodésie du monde entier, réunis à Rome, décidèrent de choisir le méridien de l'observatoire de Greenwich comme origine des latitudes.

Mais la mission la plus importante de Méchain fût, à partir de 1791, la mesure par triangulation, avec Delambre,, du méridien Dunkerque-Rodez-Barcelone (plus de 100 triangles furent établis pour ces calculs) afin d'établir le mètre comme la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre. Méchain fut chargé de la partie sud. Décelant une erreur probable d'environ 3'' sur la latitude de Barcelone, il voulut reprendre ses calculs et, retournant à Barcelone et aux îles Baléares, il mourut atteint par la fièvre jaune.

En mathématiques, Méchain publia des mémoires sur l'intégration des équations aux dérivées partielles et sur les courbes et les surfaces du second degré.

Méchain mesurera 1700 000 toises, Delambre 380 000 . La raison de

cette différence tient à ce que la partie espagnole, attribuée à Méchain, est entièrement nouvelle, vierge de toute triangulation. Les deux astronomes rencontrèrent tous les deux d'énormes difficultés dues à la nature du terrain, résumées par cette phrase de Delambre à Méchain: « Vos montagnes sont trop hautes, les miennes, pas assez. »

Le travail de Delambre et Méchain n'a pas seulement consisté en la partie technique et physique de la mesure de la méridienne. Après avoir effectué, quelquefois avec beaucoup de mal, leurs mesures sur le terrain, il leur restait encore un travail énorme : les calculs nécessaires à la mesure de la méridienne.

Il leur a certainement fallu beaucoup de temps et d'astuces pour mener à bien des calculs longs et fastidieux, et pour arriver à une telle précision :
« Je me sentis effrayé à la vue des longs calculs qu'il me fallait entreprendre... J'avais une extrême répugnance pour un travail que le peu d'habitude rend pénible et rebutant quand on n'y est pas rompu » disait La Condamine lors de la mesure de la méridienne au Pérou en 1740.

- De quelles mesures avaient-ils donc besoin pour mesurer un arc de méridienne ?
- Une fois les calculs effectués sur le terrain, quels calculs permettaient d'aboutir à la conclusion cherchée ?
- Quelles corrections devaient-ils apporter à ces calculs pour obtenir la précision souhaitée.

Les mesures et calculs à effectuer

- ♣ Déterminer l'amplitude de l'arc mesuré, c'est-à-dire la différence de l'attitude des deux points extrême de l'arc (mesures astronomiques effectuées avec le cercle répétiteur de Borda)
- ♣ Constituer une chaîne de triangles adjacents recouvrant l'arc de la méridienne, chaque sommet des triangles étant repéré par un signal .
- ♣ Les triangles étant dans l'espace, chacun dans un plan différent, non horizontal la plupart du temps, il faut ramener ces mesures « à l'horizontale ». pour cela, il faut mesurer l'angle de chaque côté d'un triangle avec la verticale du lieu : ce sont les mesures zénithales (mesures toujours effectuées avec le cercle répétiteur de Borda)
- ♣ Les triangles ainsi obtenus sont des triangles projetés sur la terre, donc sphériques. Il faut calculer les angles du triangle « rectiligne » associé. Tous les angles des triangles « plans » sont ainsi calculés.
- ♣ Pour connaître la longueur de tous les côtés de cet assemblage de triangles, il faut mesurer un côté d'un triangle (on en mesure toujours deux, le deuxième servant de vérification). Ce côté s'appelle la base et les mesures sont effectuées très précisément avec des règles plates.
- ♣ Projeter ensuite la longueur d'un côté du triangle sur la méridienne : il faut pour cela mesurer l'azimut (angle formé par le côté du triangle et la méridienne (mesures effectuées avec le cercle répétiteur de Borda)
- ♣ Apporter maintes corrections dues à l'appareil, à la position de l'appareil, à la réfraction, aux règles plates...

Le cercle répétiteur de Borda

De 18 à 21cm de haut selon les appareils (au nombre de 4 au moment du relevé sur le terrain). Cet instrument fût déterminant pour la mesure des angles entre les différents repères constituant les sommets des triangles le long de la méridienne, mais aussi pour relevés astronomiques permettant de situer avec précision le lieu d'observation par sa longitude et sa latitude. La nouveauté par rapport aux appareils antérieurs, c'est qu'il est possible d'effectuer plusieurs relevés (répétiteur) du même angle, et ainsi de diminuer les erreurs de mesures en les divisant.

Borda fût l'inventeur et Lenoir le fabricant.

La nouveauté du cercle répétiteur ne tient pas à la manière d'observer, mais à la lecture du résultat de l'observation. Plus on fait de mesures, moins on fait d'erreurs. Cette formule résume le principe du nouvel instrument de mesure inventé par le chevalier de Borda dans les années 1780. La méthode consiste donc à répéter plusieurs fois (autant de fois que l'on veut ou que l'on peut) la même observation sans revenir à 0. L'observateur ne procède donc à aucune lecture intermédiaire, il ne lit le résultat indiqué par l'instrument qu'après la dernière observation : une seule lecture, donc une seule erreur d'observation. Pour obtenir la valeur de l'angle recherché, il suffit de diviser par le nombre d'observations, le résultat des observations cumulées lu sur le limbe.

Par exemple, dix visées : une seule erreur de lecture. L'erreur due à l'instrument est donc divisée par dix. De là vient la précision inédite du cercle répétiteur. La répétition entraîne la précision.

Le cercle répétiteur est muni de 2 lunettes et 4 alidades permettant de mesurer les angles. Une alidade est une règle mobile autour d'un des points et dont l'extrémité est mobile sur un cercle.

L'instrument peut être utilisé de deux façons possibles. En position horizontale, il permet de déterminer l'angle entre deux signaux. En position verticale, il permet de mesurer des distances zénithales et des hauteurs d'astres.

Son avantage est également sa petite taille. Comme on doit monter des escaliers pour se hisser dans des clochers étroits ou sommets de tours (397 marches de la tour de Rodez, pour Delambre, par exemple) ou bien gravir des chemins périlleux pour atteindre des sommets difficiles d'accès (le pic de Bugarach, pour Méchain), c'est un énorme avantage.

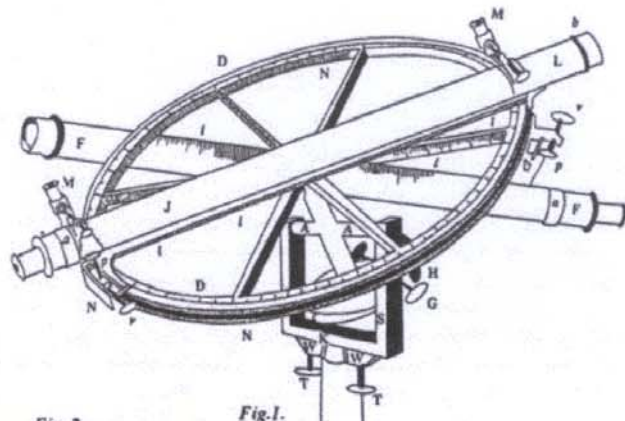


Fig. 1.



Fig. 2.

La triangulation

Elle fut inventée par le hollandais Willebord Snellius au début du XVII^{ème} siècle.

Au lieu de mesurer du linéaire comme cela a été fait jusque-là, il va mesurer du linéaire par l'angulaire. La mesure d'un arc terrestre ne se fait pas par « le bas », mais par « le haut ». Si on connaît deux angles et un côté d'un triangle, on connaît tous les côtés de ce triangle. Ce résultat sur lequel s'appuie la méthode invite à n'effectuer qu'une seule mesure linéaire (celle de la base) et une série de mesures angulaires.

Principales étapes de la triangulation:

- ♣ Choisir de part et d'autre de l'arc de méridien des points élevés (A,P,Q,R,S,T,...B), clochers, tours, châteaux, de façon que, de chacun d'eux, on aperçoive les deux ou trois suivants. Pour ce faire, on érige des signaux pour rendre ces points plus facilement visibles.

- ♣ Etablir une chaîne de triangles de façon que deux triangles successifs aient un côté commun et que la suite de leurs sommets, situés de part et d'autre de l'arc de la méridienne soit telle que chacun soit visible des deux précédents et des deux suivants.

- ♣ Mesurer les angles des triangles par des visées effectuées à l'aide du cercle répétiteur (mesures géodésiques)

- ♣ Mesurer sur le terrain même, à l'aide de règles plates, un seul côté de l'un des triangles, la base (arpentage)

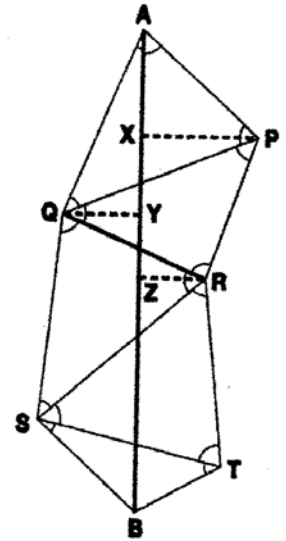
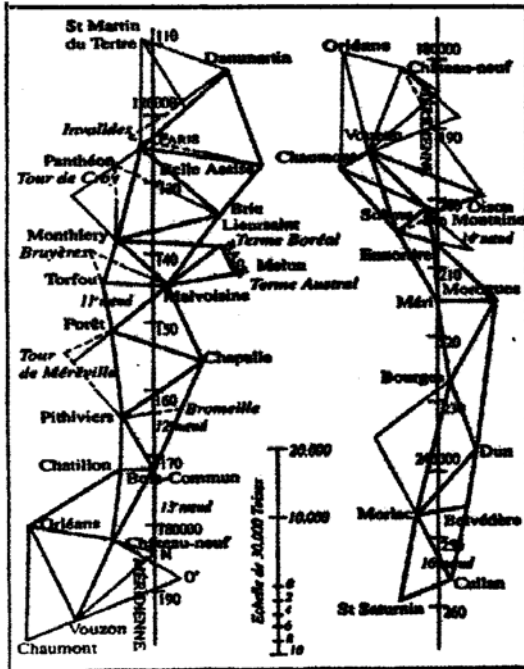
- ♣ Déterminer l'inclinaison des côtés des triangles par rapport au méridien. Pour cela, il faut mesurer l'angle qu'ils font avec le méridien, les azimuts. (mesures astronomiques)

- ♣ Les sommets de triangles matérialisés par des signaux n'étant pas situés à la même hauteur, les triangles sont « inclinés ». Pour les ramener à l'horizontale, il faut mesurer l'angle que fait chacun d'eux avec la verticale (mesures zénithales)

- ♣ Les longueurs et les azimuts des côtés d'un triangle permettent de déterminer (par projection sur la méridienne) la longueur des segments de méridien recouvert par les triangles.

Le premier sommet de la triangulation est à Dunkerque, le dernier au fort de Monjouy, tous deux situés sur le même méridien. Pour obtenir l'orientation de la chaîne de triangle par rapport au méridien, on n'a plus

qu'à mesurer l'angle que fait le coté AP avec le méridien: son azimut. Par projection, on obtient le segment de méridien AX . Puis, en utilisant l'azimut de PQ, on détermine le segment XY, puis YZ...jusqu'à B. La somme des longueurs fournit la longueur totale de l'axe AB



Mais les triangles mesurés sont rectilignes. Or les triangles sur le globe terrestre sont curvilignes. A l'aide des formules de trigonométrie sphérique, on convertit les premiers en second. Puis on abaisse l'ensemble du canevas des triangles au niveau de la mer. Dunkerque et Barcelone étant au niveau de la mer, les calculs seront facilités.

La base de la triangulation de la Méridienne a été choisie non loin de Paris, dans la forêt de Fontainebleau, entre Melun et Lieusaint. Une seconde base, pour vérification sera mesurée du côté de Perpignan, le long de la côte méditerranéenne, entre Le Vernet et Salces.

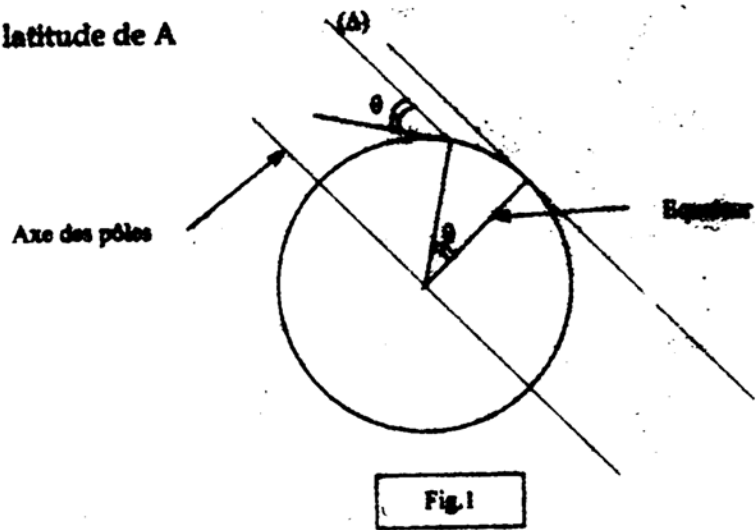
Il reste à déterminer l'amplitude de l'arc mesuré. Pour cela, il suffit de calculer les latitudes des deux extrémités. Il s'agit à nouveau de mesures astronomiques, effectuées à l'aide du cercle répétiteur. Disposant de la longueur de l'arc et de son amplitude, on détermine la longueur du méridien.

La dix-millionième partie de cette longueur est le mètre!!!

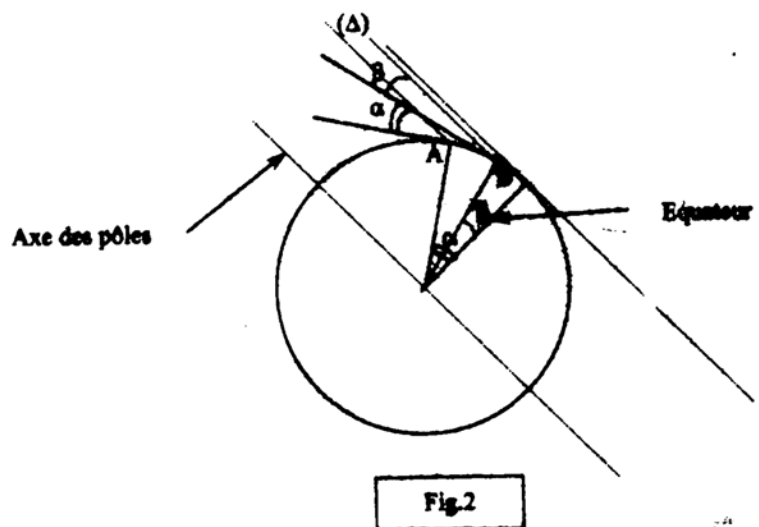
Détermination de l'amplitude de l'arc de la méridienne

Il suffit de mesurer l'angle θ formé par une horizontale et la droite (Δ) qui représente la direction polaire. Là aussi, mesure astronomique, on sait parfaitement trouver le pôle Nord, grâce à des cartes précises (fig. 1). L'amplitude de l'arc AB est, sur le dessin, par exemple, $\alpha - \beta$ (fig.2)

Détermination de la latitude de A



Détermination de l'amplitude de l'arc AB $AOB = AB = \alpha - \beta$



Méthode de Triangulation

- Notions de trigonométrie sphérique
- Réduction d'un angle à l'horizon
- Calculs d'approximation
- Exemples d'angles réduits à l'horizon
- Calcul des « angles des cordes »

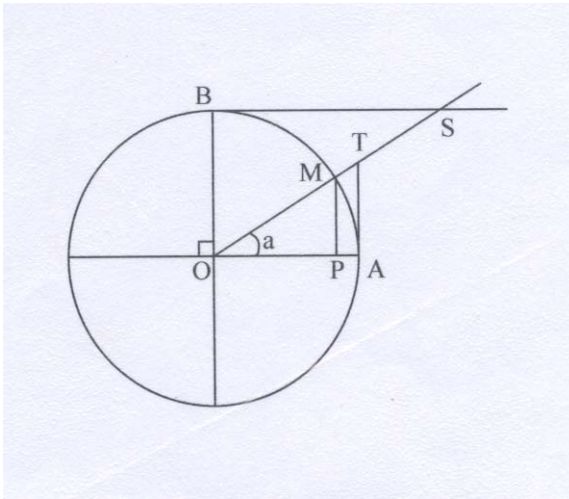
Notion de trigonométrie sphérique

Pour comprendre les calculs effectués par Delambre et les scientifiques de l'époque quelques rappels de trigonométrie et de géométrie sphérique s'imposent.

Trigonométrie:

Les fonctions utilisés sont: sinus, sécante et tangente, et par complémentarité: cosinus, cosécante, cotangente.

$OA=1$



$$\sin AM = \sin(a) = MP$$

$$\tan AM = \tan(a) = AT$$

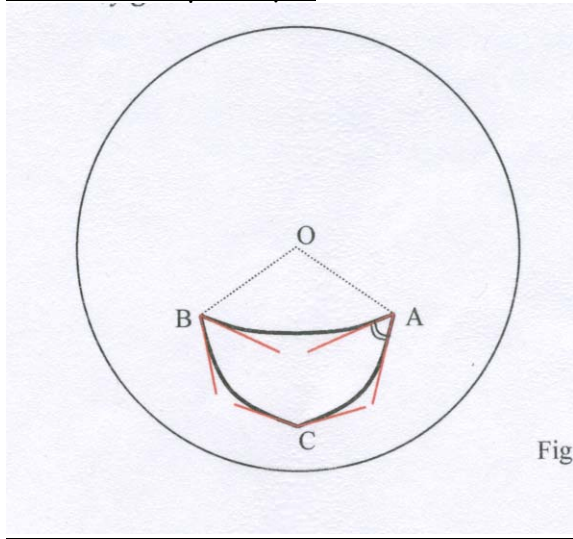
$$\sec AM = \sec(a) = OT = 1/OP = 1/\cos(a)$$

$$\cos AM = \cos(a) = OP$$

$$\cotan AM = \cotan(a) = BS = 1/\tan(a)$$

$$\operatorname{cosec} AM = \operatorname{cosec}(a) = OS = 1/MP = 1/\sin(a)$$

Géométrie sphérique



- Soit une sphère (S) de centre O et trois points distincts A, B, C sur (S).

Les « côtés » du triangle sphérique ABC sont les arcs $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$ des grands cercles de la sphère définis par les points considérés: ils sont mesurés par les angles des demi-droites. Donc $a=BC=BOC$, $b=AC=AOC$, $c=AB=AOB$.

Les « angles » (angles sphériques) sont les angles des tangentes aux arcs, aux points considérés: par exemple, A est l'angle sphérique en A: c'est aussi un angle dièdre des plans (AOB) et (AOC)

On démontre les relations suivantes:

$$\cos(a)=\cos(b)\cos(c)+\sin(b)\sin(c)\cos(A)$$

$$\cos(b)=\cos(a)\cos(c)+\sin(a)\sin(c)\cos(B)$$

$$\cos(c)=\cos(b)\cos(a)+\sin(b)\sin(a)\cos(C)$$

-

Soient A et C deux points de (S)

Soit (P) le plan passant par C, tangent en C à la sphère.

(D) est l'intersection du plan (P) avec le plan (AOC): (D) est la tangente en C au « grand cercle » de (S) défini par A et C.

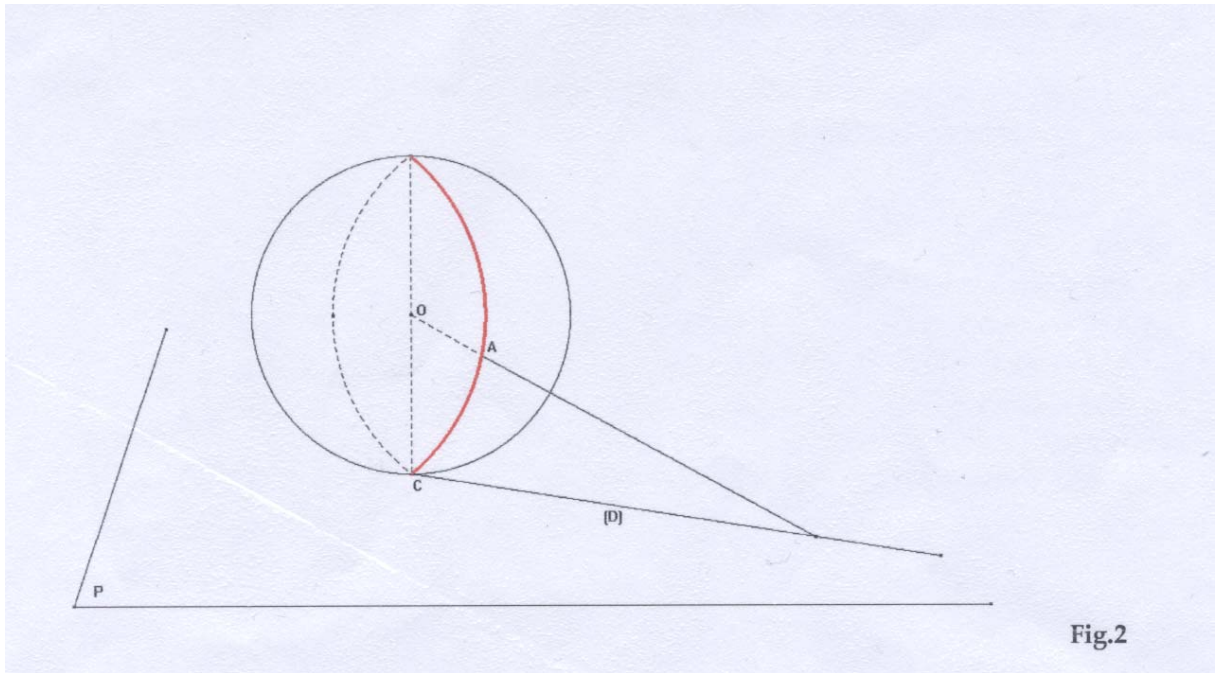


Fig.2

- Soient A, B, C trois points de la sphère (S)

(AOC) et (BOC) définissent deux plans sécants suivant la droite (OC) , sécants suivant (D) et (D') au plan (P) (plan passant par C et tangent en C à la sphère, et donc perpendiculaire en C à (OC)).

L'angle « dièdre » des plans (AOC) et (BOC) est l'angle des droites (D) et (D') , et donc l'angle sphérique en C du triangle sphérique ABC .

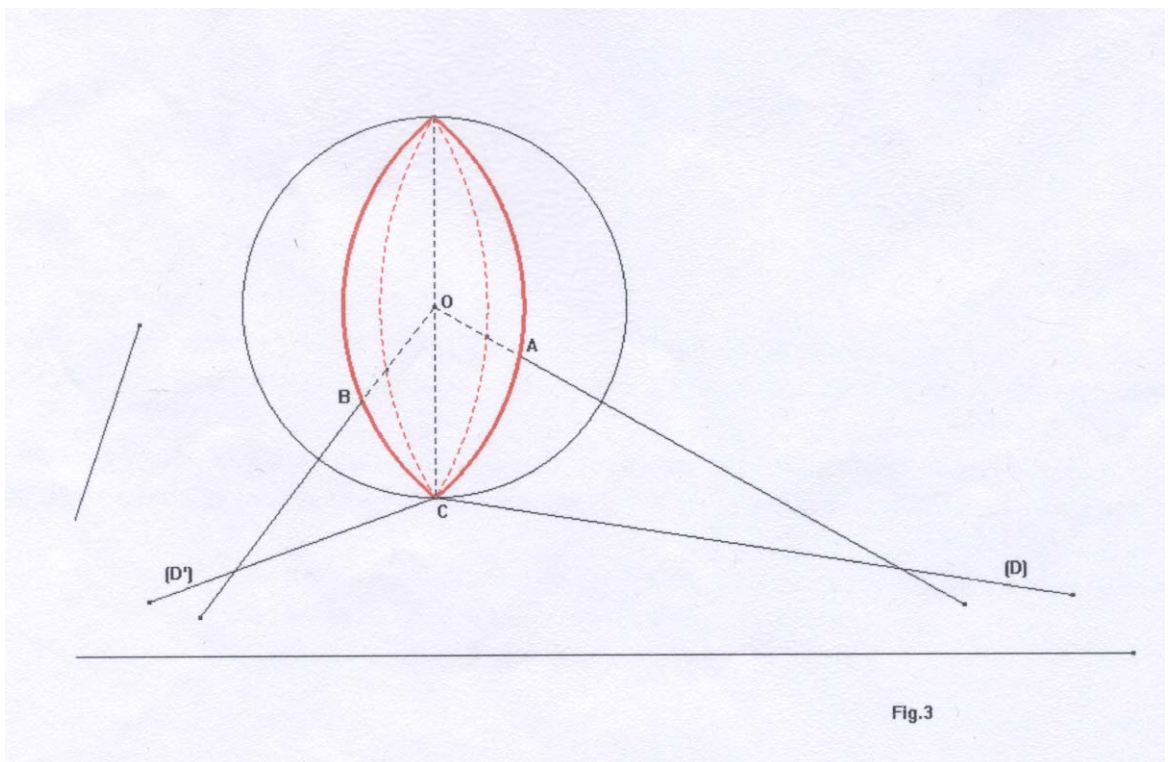


Fig.3

Réduction d'un angle « à l'horizon »

- Repérer le centre des trois signaux U, V, O, et grâce au cercle répétiteur de Borda, il est possible de mesurer avec précision les trois angles OUV, UVO, VOU (dixième de seconde près).
- Le triangle ainsi obtenu étant dans un plan oblique, il faut le « réduire à l'horizon », c'est-à-dire dans un premier temps, le projeter sur le plan horizontal
- Par exemple, projetons sur l'horizon UOV : l'observateur est en O et les signaux observés sont U et V. Il est nécessaire de connaître de plus :

L'angle H formé par (OU) et l'horizontale du lieu
(H : hauteur de U sur l'horizon)

L'angle h formé par (OV) et l'horizontale du lieu
(H : hauteur de V sur l'horizon)

Soit A la mesure de UOV et a la mesure de l'angle projeté.

En considérant une sphère fictive de centre O, cette sphère coupe (OU) en P et (OV) en Q et la verticale du lieu ou zénith en R.

a est alors l'angle (Ou ; Ov), c'est-à-dire l'angle dièdre des plans (O,U,u) et (O,V,v), soit l'angle sphérique en R du triangle sphérique PQR

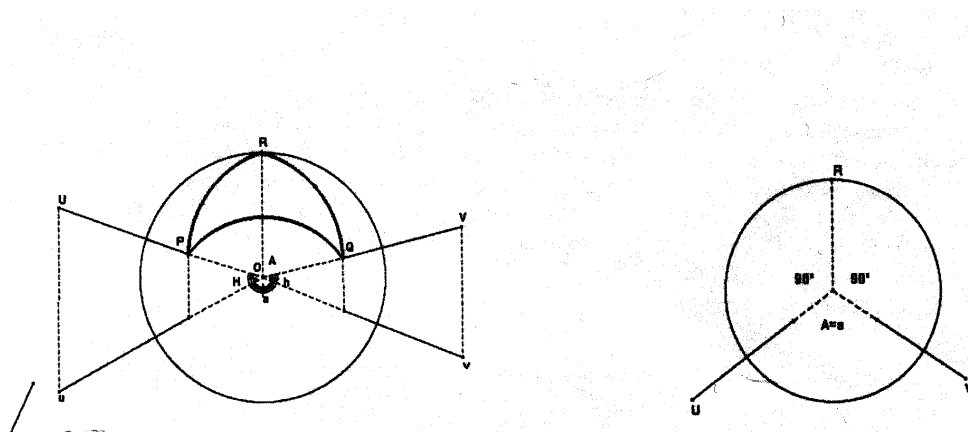


Fig.2

Il est alors possible d'appliquer les formules de géométrie sphérique puisque dans le triangle sphérique PQR : $PQ=A$; $QR=90^\circ-h$; $PR=90^\circ-H$

Dans le triangle sphérique PQR :

$$\cos(A) = \cos(90^\circ - h) \cdot \cos(90^\circ - H) + \sin(90^\circ - h) \cdot \sin(90^\circ - H) \cdot \cos(a)$$

Soit

$$\cos(A) = \sin(h) \cdot \sin(H) + \cos(h) \cdot \cos(H) \cdot \cos(a)$$

Remarque: Dans le cas où $UOR = VOR = 90^\circ$, U et V sont dans le plan horizontal passant par O et $A = a$. (fig 2 de la page précédente)

On obtient alors :

$$\cos a = \frac{\cos A - \sin H \times \sin h}{\cos H \times \cos h} \quad \sin a = \frac{\sqrt{\sin(A + H + h) \times \sin(A - H + h)} : 2}{\cos H \times \cos h}$$

A notre époque, et grâce à nos calculatrices ou ordinateurs, ces formules seraient évidemment rapidement exploitables et on obtiendrait toute la précision voulue. Mais à l'époque de Delambre, même si les calculs numériques étaient effectués avec plus de rapidité avec la découverte des logarithmes, il n'en reste pas moins que ces formules étaient difficiles à appliquer. Pour obtenir une valeur de a à $0,1''$ près, il faudrait calculer $\cos(A)$, $\sin(H)$, $\sin(h)$, $\cos(H)$, $\cos(h)$ avec au minimum 7 chiffres décimaux exacts.

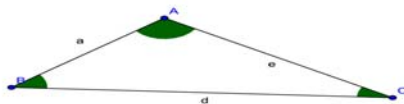
Ainsi, Delambre écrivait :

« Ces deux dernières formules donnent directement l'angle réduit... On est obligé de les calculer avec une précision fatigante, il vaut donc mieux chercher la réduction, qui est toujours fort petite... »

Mesures des côtés des triangles

- Dans un triangle quelconque ABC , connaissant un côté et tous les angles, les deux autres côtés sont calculés grâce à la formule:

Connaissant ainsi une base de l'assemblage des triangles qui sont consécutifs, et de tous les angles, on calcule tous les côtés des triangles.



Correction apportée au calcul de la base

Dans certains cas, il n'a pas été possible de mesurer la base facilement, car un obstacle ou un chemin trop étroit conduisaient les scientifiques à mesurer deux côtés d'un triangle très aplati et à calculer ensuite le troisième côté, qui était le côté cherché.

$$d^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$d^2 = (b+c)^2 - 2bc - 2bc \cos A$$

$$d^2 = (b+c)^2 - 2bc(1 + \cos A)$$

$$d^2 = (b+c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{A}{2}$$

$$d^2 = (b+c)^2 \left(1 - \frac{4bc \cos^2 \frac{A}{2}}{(b+c)^2}\right)$$

$$d = (b+c) \left(1 - \frac{4bc}{(b+c)^2} \cos^2 \frac{A}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Or } \cos^2 \frac{A}{2} \text{ tend vers } 0 \text{ donc}$$

$$d \approx (b+c) \left(1 - \frac{2bc}{(b+c)^2} \cos^2 \frac{A}{2}\right) = b+c - \frac{2bc}{b+c} \cos^2 \frac{A}{2}$$

Projection sur la méridienne

A cette époque, le pôle nord était facilement repéré grâce à des cartes très précises donnant la position de certaines étoiles circumpolaires (la petite ourse, par exemple). Ainsi, grâce au cercle répétiteur de Borda, on mesurait l'angle formé par un côté d'un triangle repéré par les signaux et le pôle nord. Cet angle est appelé l'azimut.

Si l'observateur est en N et le signal en L, l'azimut est l'angle compris entre (NL) et la direction polaire. On projette à l'horizon l'azimut et le côté NL, on obtient dans un plan l'angle α et le côté [MN].

En projetant MN sur la méridienne, on obtient $mn = MN \cos(\alpha)$, et ainsi un « tronçon » de la méridienne.

On calcule ainsi chaque « tronçon » de Dunkerque à Barcelone

