

# Mathématiques pour l'Informatique

Vers l'infini

David Teller

13/02/2007

## Jusqu'à présent

Nous avons déjà abordé

**Les ensembles** Le regroupement de valeurs caractérisées par des critères.

**Les fonctions** Les traitements et transformations qu'on peut apporter à ces valeurs.

**La cardinalité** Comment relier, comparer et classer les ensembles.

**Les relations** Comment relier des valeurs d'un ensemble.

## Jusqu'à présent

Nous avons déjà abordé

**Les ensembles** Le regroupement de valeurs caractérisées par des critères.

**Les fonctions** Les traitements et transformations qu'on peut apporter à ces valeurs.

**La cardinalité** Comment relier, comparer et classer les ensembles.

**Les relations** Comment relier des valeurs d'un ensemble.

Aujourd'hui, nous allons caractériser les relations.

Introduction

Vers l'ordre

Ensembles ordonnés

Récurrence, récursion, induction

Conclusions

## Ordres, équivalences

### Definition (Relation d'ordre)

Une relation  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

### Definition (Relation d'équivalence)

Une relation  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

## Ordres, équivalences

### Definition (Relation d'ordre)

Une relation  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

### Definition (Relation d'équivalence)

Une relation  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

En informatique, ces relations sont employées notamment pour permettre de trier des éléments – et donc de les retrouver plus vite – et pour définir la notion d'optimisation sûre.

## Remarques sur l'ordre

### Proposition (Composition)

*Si  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont deux relations d'ordre sur  $E$ , alors  $\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}'$  n'est pas forcément une relation d'ordre sur  $E$ .*

## Remarques sur l'ordre

### Proposition (Composition)

*Si  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont deux relations d'ordre sur  $E$ , alors  $\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}'$  n'est pas forcément une relation d'ordre sur  $E$ .*

**Contre-exemple** Si  $\mathcal{R}$  est  $\leq$  et  $\mathcal{R}'$  est  $\geq$ , alors  $\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}'$  est  $\Pi_E$ , la relation pleine sur  $E$ , qui n'est pas antisymétrique dès que  $E$  contient au moins deux éléments distincts.

## Remarques sur l'ordre

### Proposition (Composition)

*Si  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont deux relations d'ordre sur  $E$ , alors  $\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}'$  n'est pas forcément une relation d'ordre sur  $E$ .*

**Contre-exemple** Si  $\mathcal{R}$  est  $\leq$  et  $\mathcal{R}'$  est  $\geq$ , alors  $\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}'$  est  $\Pi_E$ , la relation pleine sur  $E$ , qui n'est pas antisymétrique dès que  $E$  contient au moins deux éléments distincts.

### Proposition (Produit)

*Si  $\mathcal{R}_E$  est une relation d'ordre sur  $E$  et  $\mathcal{R}_F$  est une relation d'ordre sur  $F$  alors la relation  $\mathcal{R}_\times$  définie par*

*$\forall e, e' \in E, \forall f, f' \in F, (e, f)\mathcal{R}_\times(e', f') \iff e\mathcal{R}_E e' \wedge f\mathcal{R}_F f'$  est une relation d'ordre.*

# Monotonie

## Definition (Application monotone)

Si  $(E, \leq_E)$  et  $(F, \leq_F)$  sont deux ensembles ordonnés et si  $f : E \longrightarrow F$  est une application,  $f$  est dite *monotone* lorsque

$$\forall e, e' \in E, e \leq e' \Rightarrow f(e) \leq_F f(e').$$

## Classes d'équivalence

### Definition (Classe d'équivalence)

Si  $E$  est un ensemble,  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $E$  et  $e$  un élément de  $E$ , on note  $[e]_{\mathcal{R}} = \{e' \in E / e\mathcal{R}e'\}$  la classe d'équivalence de  $e$  par  $\mathcal{R}$ .

## Classes d'équivalence

### Definition (Classe d'équivalence)

Si  $E$  est un ensemble,  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $E$  et  $e$  un élément de  $E$ , on note  $[e]_{\mathcal{R}} = \{e' \in E / e\mathcal{R}e'\}$  la classe d'équivalence de  $e$  par  $\mathcal{R}$ .

Fréquemment, si l'on sait qu'une propriété est préservée par une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$ , on ne considérera pas un seul élément mais toute sa classe d'équivalence par  $\mathcal{R}$ .

**Exemple** Tous les ensembles de même cardinalité sont “équivalents” au sens où ils sont en bijection les uns avec les autres.

## Classes d'équivalence

### Definition (Classe d'équivalence)

Si  $E$  est un ensemble,  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $E$  et  $e$  un élément de  $E$ , on note  $[e]_{\mathcal{R}} = \{e' \in E / e\mathcal{R}e'\}$  la classe d'équivalence de  $e$  par  $\mathcal{R}$ .

Fréquemment, si l'on sait qu'une propriété est préservée par une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$ , on ne considérera pas un seul élément mais toute sa classe d'équivalence par  $\mathcal{R}$ .

**Exemple** Tous les ensembles de même cardinalité sont “équivalents” au sens où ils sont en bijection les uns avec les autres.

### Proposition

*Si  $e$  et  $e'$   $\mathcal{R}$  une relation sur  $E$  et si  $e$  et  $e'$  sont deux éléments de  $E$ , tels que  $[e]_{\mathcal{R}} \cap [e']_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$  alors  $[e]_{\mathcal{R}} = [e']_{\mathcal{R}}$ .*

# Quotient

## Definition (Ensemble quotient)

Si  $E$  est un ensemble et  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $E$ , pour tout  $r$  de  $E$ , l'ensemble quotient de  $r$  par  $\mathcal{R}$  est défini comme  $\{[e]_{\mathcal{R}}/e \in E\}$ .

# Quotient

## Definition (Ensemble quotient)

Si  $E$  est un ensemble et  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $E$ , pour tout  $r$  de  $E$ , l'ensemble quotient de  $r$  par  $\mathcal{R}$  est défini comme  $\{[e]_{\mathcal{R}}/e \in E\}$ .

**Q** Notons  $2\mathbf{Z}$  la relation d'équivalence sur  $\mathbf{Z}$  "avoir le même reste modulo 2". Qu'est  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  ?

## Quotient

### Definition (Ensemble quotient)

Si  $E$  est un ensemble et  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $E$ , pour tout  $r$  de  $E$ , l'ensemble quotient de  $r$  par  $\mathcal{R}$  est défini comme  $\{[e]_{\mathcal{R}}/e \in E\}$ .

**Q** Notons  $2\mathbf{Z}$  la relation d'équivalence sur  $\mathbf{Z}$  "avoir le même reste modulo 2". Qu'est  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  ?

**A** On a  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \{[0]_{2\mathbf{Z}}, [1]_{2\mathbf{Z}}\}$ .

# Ordres

Rappelons :

## Definition (Relation d'ordre)

Une relation  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

# Ordres

Rappelons :

## Definition (Relation d'ordre)

Une relation  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

## Definition (Ordre total)

Une relation d'ordre  $\mathcal{R}$  est *totale* sur  $E$  si, pour tout couple  $e, e'$  d'éléments de  $E$ , on a  $e\mathcal{R}e'$  ou  $e'\mathcal{R}e$ . Une relation qui n'est pas totale est dite *partielle*.

# Ordres

Rappelons :

## Definition (Relation d'ordre)

Une relation  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

## Definition (Ordre total)

Une relation d'ordre  $\mathcal{R}$  est *totale* sur  $E$  si, pour tout couple  $e, e'$  d'éléments de  $E$ , on a  $e\mathcal{R}e'$  ou  $e'\mathcal{R}e$ . Une relation qui n'est pas totale est dite *partielle*.

**Exemple** La relation  $\leq$  sur  $\mathbf{R}$  est totale. La relation  $|$  (divisibilité) sur  $\mathbf{N}$  est partielle.

## Ordre lexicographique

### Definition (Ordre lexicographique)

Si  $A$  est un alphabet muni d'une relation d'ordre total  $\leq$ . L'*ordre lexicographique* est une relation  $\preceq$  définie sur le monoïde libre  $A^*$  par  $u \preceq v$  si et seulement si

- ▶ soit  $u$  est un préfixe de  $v$
- ▶ soit  $u$  et  $v$  coïncident jusqu'à la lettre  $k$  et les  $k + 1^o$  lettres de  $u$  et  $v$  existent, sont distinctes et vérifient  $u_{k+1} \preceq v_{k+1}$ .

**Q** Connaissez-vous une application courante de l'ordre lexicographique ?

## Ordre lexicographique

### Definition (Ordre lexicographique)

Si  $A$  est un alphabet muni d'une relation d'ordre total  $\leq$ . L'*ordre lexicographique* est une relation  $\preceq$  définie sur le monoïde libre  $A^*$  par  $u \preceq v$  si et seulement si

- ▶ soit  $u$  est un préfixe de  $v$
- ▶ soit  $u$  et  $v$  coïncident jusqu'à la lettre  $k$  et les  $k + 1^o$  lettres de  $u$  et  $v$  existent, sont distinctes et vérifient  $u_{k+1} \preceq v_{k+1}$ .

**Q** Connaissez-vous une application courante de l'ordre lexicographique ?

**Q** L'ordre lexicographique est-il bien une relation d'ordre ?

## Ordre lexicographique

### Definition (Ordre lexicographique)

Si  $A$  est un alphabet muni d'une relation d'ordre total  $\leq$ . L'*ordre lexicographique* est une relation  $\preceq$  définie sur le monoïde libre  $A^*$  par  $u \preceq v$  si et seulement si

- ▶ soit  $u$  est un préfixe de  $v$
- ▶ soit  $u$  et  $v$  coïncident jusqu'à la lettre  $k$  et les  $k + 1^o$  lettres de  $u$  et  $v$  existent, sont distinctes et vérifient  $u_{k+1} \preceq v_{k+1}$ .

**Q** Connaissez-vous une application courante de l'ordre lexicographique ?

**Q** L'ordre lexicographique est-il bien une relation d'ordre ? Cet ordre est-il partiel ? Total ?

## Ordre lexicographique

### Definition (Ordre lexicographique)

Si  $A$  est un alphabet muni d'une relation d'ordre total  $\leq$ . L'*ordre lexicographique* est une relation  $\preceq$  définie sur le monoïde libre  $A^*$  par  $u \preceq v$  si et seulement si

- ▶ soit  $u$  est un préfixe de  $v$
- ▶ soit  $u$  et  $v$  coïncident jusqu'à la lettre  $k$  et les  $k + 1^o$  lettres de  $u$  et  $v$  existent, sont distinctes et vérifient  $u_{k+1} \preceq v_{k+1}$ .

**Q** Connaissez-vous une application courante de l'ordre lexicographique ?

**Q** L'ordre lexicographique est-il bien une relation d'ordre ? Cet ordre est-il partiel ? Total ?

**A** Il s'agit d'une relation d'ordre total.

## Majorants et minorants

### Definition (Majorant)

Si  $E'$  est une partie de  $E$  et si  $\preceq$  est une relation d'ordre sur  $E$ ,  
l'ensemble des majorants de  $E'$  pour  $\preceq$  est  $\{e \in E / \forall e' \in E', e' \preceq e\}$ .

## Majorants et minorants

### Definition (Majorant)

Si  $E'$  est une partie de  $E$  et si  $\preceq$  est une relation d'ordre sur  $E$ , l'ensemble des majorants de  $E'$  pour  $\preceq$  est  $\{e \in E / \forall e' \in E', e' \preceq e\}$ .

### Definition (Borne supérieure)

Si  $E'$  est une partie de  $E$  et si  $\preceq$  est une relation d'ordre sur  $E$ , la borne supérieure de  $E'$ , si elle existe, est un élément  $e$  tel que

- ▶  $\forall y \in E', y \preceq e$
- ▶  $\forall x \in E, (\forall y \in E', y \preceq e) \Rightarrow e \preceq x$ .

## Majorants et minorants

### Definition (Majorant)

Si  $E'$  est une partie de  $E$  et si  $\preceq$  est une relation d'ordre sur  $E$ , l'ensemble des majorants de  $E'$  pour  $\preceq$  est  $\{e \in E / \forall e' \in E', e' \preceq e\}$ .

### Definition (Borne supérieure)

Si  $E'$  est une partie de  $E$  et si  $\preceq$  est une relation d'ordre sur  $E$ , la borne supérieure de  $E'$ , si elle existe, est un élément  $e$  tel que

- ▶  $\forall y \in E', y \preceq e$
- ▶  $\forall x \in E, (\forall y \in E', y \preceq e) \Rightarrow e \preceq x$ .

**Exemples** Si  $n \in \mathbf{N}$ , l'ensemble  $[n]$  est majoré pour  $\leq$  dans  $\mathbf{N}$  par  $n$ ,  $n + 1 \dots$  Sa borne supérieure est  $n$ .

## Majorants et minorants

### Definition (Majorant)

Si  $E'$  est une partie de  $E$  et si  $\preceq$  est une relation d'ordre sur  $E$ , l'ensemble des majorants de  $E'$  pour  $\preceq$  est  $\{e \in E / \forall e' \in E', e' \preceq e\}$ .

### Definition (Borne supérieure)

Si  $E'$  est une partie de  $E$  et si  $\preceq$  est une relation d'ordre sur  $E$ , la borne supérieure de  $E'$ , si elle existe, est un élément  $e$  tel que

- ▶  $\forall y \in E', y \preceq e$
- ▶  $\forall x \in E, (\forall y \in E', y \preceq e) \Rightarrow e \preceq x$ .

**Exemples** Si  $n \in \mathbf{N}$ , l'ensemble  $[n]$  est majoré pour  $\leq$  dans  $\mathbf{N}$  par  $n$ ,  $n + 1 \dots$  Sa borne supérieure est  $n$ .

**Q** Des exemples d'ensembles avec majorants mais sans borne supérieure ?

## Majorants et minorants

### Definition (Majorant)

Si  $E'$  est une partie de  $E$  et si  $\preceq$  est une relation d'ordre sur  $E$ , l'ensemble des majorants de  $E'$  pour  $\preceq$  est  $\{e \in E / \forall e' \in E', e' \preceq e\}$ .

### Definition (Borne supérieure)

Si  $E'$  est une partie de  $E$  et si  $\preceq$  est une relation d'ordre sur  $E$ , la borne supérieure de  $E'$ , si elle existe, est un élément  $e$  tel que

- ▶  $\forall y \in E', y \preceq e$
- ▶  $\forall x \in E, (\forall y \in E', y \preceq e) \Rightarrow e \preceq x$ .

**Exemples** Si  $n \in \mathbf{N}$ , l'ensemble  $[n]$  est majoré pour  $\leq$  dans  $\mathbf{N}$  par  $n$ ,  $n + 1 \dots$  Sa borne supérieure est  $n$ .

**Q** Des exemples d'ensembles avec majorants mais sans borne supérieure ?

**A** Mettons  $\{x/x < \sqrt{2}/x \in \mathbf{Q}^+\}$ .

# Propriétés de la borne supérieure

## Proposition

*Un sous-ensemble de  $E$  a au plus une borne supérieure.*

## Propriétés de la borne supérieure

### Proposition

*Un sous-ensemble de  $E$  a au plus une borne supérieure.*

**Preuve** Si  $E'$  est une partie de  $E$  admettant deux bornes supérieures  $e$  et  $f$  pour  $\preceq$ . Alors, par définition de  $e$ , nous avons  $\forall y \in E', y \preceq e$ . Par définition de  $f$ , nous en déduisons  $f \preceq e$ . De même, en inversant  $e$  et  $f$ , nous en déduisons  $e \preceq f$ . Comme  $\preceq$  est une relation d'ordre,  $\preceq$  est antisymétrique. Par conséquent,  $e = f$ .  $\square$ .

## Vers l'induction...

### Definition (Bon ordre)

Un ensemble  $E$  est *bien ordonné* par  $\preceq$  s'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante. On dit aussi que  $\preceq$  est *bien fondé* sur  $E$ .

## Vers l'induction...

### Definition (Bon ordre)

Un ensemble  $E$  est *bien ordonné* par  $\preceq$  s'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante. On dit aussi que  $\preceq$  est *bien fondé* sur  $E$ .

Grosso modo, un ensemble bien ordonné va être un ensemble sur lequel on peut raisonner par récurrence.

## Vers l'induction...

### Definition (Bon ordre)

Un ensemble  $E$  est *bien ordonné* par  $\preceq$  s'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante. On dit aussi que  $\preceq$  est *bien fondé* sur  $E$ .

Grosso modo, un ensemble bien ordonné va être un ensemble sur lequel on peut raisonner par récurrence.

**Exemples**  $(\mathbf{N}, \leq)$ ,  $(\mathbf{N}, |)$

## Vers l'induction...

### Definition (Bon ordre)

Un ensemble  $E$  est *bien ordonné* par  $\preceq$  s'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante. On dit aussi que  $\preceq$  est *bien fondé* sur  $E$ .

Grosso modo, un ensemble bien ordonné va être un ensemble sur lequel on peut raisonner par récurrence.

**Exemples**  $(\mathbf{N}, \leq)$ ,  $(\mathbf{N}, |)$

### Proposition

*L'ordre produit fait de  $\mathbf{N}^2$  un ensemble bien ordonné.*

## Vers l'induction...

### Definition (Bon ordre)

Un ensemble  $E$  est *bien ordonné* par  $\preceq$  s'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante. On dit aussi que  $\preceq$  est *bien fondé* sur  $E$ .

Grosso modo, un ensemble bien ordonné va être un ensemble sur lequel on peut raisonner par récurrence.

**Exemples**  $(\mathbf{N}, \leq)$ ,  $(\mathbf{N}, |)$

### Proposition

*L'ordre produit fait de  $\mathbf{N}^2$  un ensemble bien ordonné.*

### Proposition

*L'ordre lexicographique fait de  $\mathbf{N}^2$  un ensemble bien ordonné.*

## Induction ?

### Théorème (Induction)

Soit  $(E, \preceq)$  un ensemble bien ordonné. Soit  $\{\mathcal{H}(x)/x \in E\}$  un ensemble de propositions logiques tel que

$$\{\forall x \in E, (\forall y \not\prec x, \mathcal{H}(y)) \Rightarrow \mathcal{H}(x)\}$$

Alors pour tout  $x$  de  $E$ ,  $\mathcal{H}(x)$  est vérifié.

## Induction ?

### Théorème (Induction)

Soit  $(E, \preceq)$  un ensemble bien ordonné. Soit  $\{\mathcal{H}(x)/x \in E\}$  un ensemble de propositions logiques tel que

$$\{\forall x \in E, (\forall y \not\prec x, \mathcal{H}(y)) \Rightarrow \mathcal{H}(x)\}$$

Alors pour tout  $x$  de  $E$ ,  $\mathcal{H}(x)$  est vérifié.

**Q** Prouvez cela.

## Induction ?

### Théorème (Induction)

Soit  $(E, \preceq)$  un ensemble bien ordonné. Soit  $\{\mathcal{H}(x)/x \in E\}$  un ensemble de propositions logiques tel que

$$\{\forall x \in E, (\forall y \not\prec x, \mathcal{H}(y)) \Rightarrow \mathcal{H}(x)\}$$

Alors pour tout  $x$  de  $E$ ,  $\mathcal{H}(x)$  est vérifié.

**Q** Prouvez cela. Vous pourrez vous intéresser à  $F = \{x \in E/\neg\mathcal{H}(x)\}$ .

## Induction ?

### Théorème (Induction)

Soit  $(E, \preceq)$  un ensemble bien ordonné. Soit  $\{\mathcal{H}(x)/x \in E\}$  un ensemble de propositions logiques tel que

$$\{\forall x \in E, (\forall y \not\prec x, \mathcal{H}(y)) \Rightarrow \mathcal{H}(x)\}$$

Alors pour tout  $x$  de  $E$ ,  $\mathcal{H}(x)$  est vérifié.

**Q** Prouvez cela. Vous pourrez vous intéresser à  $F = \{x \in E/\neg\mathcal{H}(x)\}$ .

**Q** Comment se reformule le théorème lorsqu'on considère l'ensemble  $(\mathbf{N}, \leq)$  ?

## Récurrence

### Théorème (Récurrence forte)

Soit  $\{\mathcal{H}_n/n \in \mathbf{N}\}$  un ensemble de propositions logiques tel que

$$\{\forall n \in \mathbf{N}, (\forall m < n, \mathcal{H}_m) \Rightarrow \mathcal{H}_n\}$$

Alors pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}$ ,  $\mathcal{H}_n$  est vérifié.

**Preuve** Comme  $(\mathbf{N}, \leq)$  est bien ordonné, le théorème d'induction s'applique.

## Récurrence

### Théorème (Récurrence forte)

Soit  $\{\mathcal{H}_n/n \in \mathbf{N}\}$  un ensemble de propositions logiques tel que

$$\{\forall n \in \mathbf{N}, (\forall m < n, \mathcal{H}_m) \Rightarrow \mathcal{H}_n\}$$

Alors pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}$ ,  $\mathcal{H}_n$  est vérifié.

**Preuve** Comme  $(\mathbf{N}, \leq)$  est bien ordonné, le théorème d'induction s'applique.

**Q** D'habitude, la récurrence a une initialisation. Ici, que devient l'initialisation ?

## Récurrence

### Théorème (Récurrence forte)

Soit  $\{\mathcal{H}_n/n \in \mathbf{N}\}$  un ensemble de propositions logiques tel que

$$\{\forall n \in \mathbf{N}, (\forall m < n, \mathcal{H}_m) \Rightarrow \mathcal{H}_n\}$$

Alors pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}$ ,  $\mathcal{H}_n$  est vérifié.

**Preuve** Comme  $(\mathbf{N}, \leq)$  est bien ordonné, le théorème d'induction s'applique.

**Q** D'habitude, la récurrence a une initialisation. Ici, que devient l'initialisation ?

**A** C'est le cas  $(\forall m < 0, \mathcal{H}_m) \Rightarrow \mathcal{H}_0$ , c'est-à-dire  $\mathcal{H}_0$ .

Introduction

Vers l'ordre

Ensembles ordonnés

Récurrence, récursion, induction

Conclusions

# Récurrence

## Théorème (Récurrence)

Soit  $\{\mathcal{H}_n/n \in \mathbf{N}\}$  un ensemble de propositions logiques tel que

- ▶  $\mathcal{H}_n$  soit vrai
- ▶  $\forall n \in \mathbf{N}, \mathcal{H}_n \text{ Rightarrow } \mathcal{H}_{n+1}$ .

Alors pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}$ ,  $\mathcal{H}_n$  est vrai.

# Récurrence

## Théorème (Récurrence)

Soit  $\{\mathcal{H}_n/n \in \mathbf{N}\}$  un ensemble de propositions logiques tel que

- ▶  $\mathcal{H}_0$  soit vrai
- ▶  $\forall n \in \mathbf{N}, \mathcal{H}_n \text{ Rightarrow } \mathcal{H}_{n+1}$ .

Alors pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}$ ,  $\mathcal{H}_n$  est vrai.

**Application** Soit  $r$  un réel. Soient alors  $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$  les suites définies par  $\forall n, S_n = \sum_{i=0}^n r^i$  et  $\forall n, T_n = \sum_{i=0}^n i \cdot r^i$

Prouver que, pour tout  $n$  entier,

- ▶ si  $r = 1$ , alors  $S_n = n + 1$  et  $T_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$
- ▶ si  $r \neq 1$ , alors  $S_n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$  et  $T_n = \frac{n \cdot r^{n+2} - (n+1) \cdot r^{n+1} + r}{(r-1)^2}$ .

## Changeons les rôles

### Proposition

*Dans tout groupe de  $n$  personnes, tous les gens ont le même âge.*

## Changeons les rôles

### Proposition

*Dans tout groupe de  $n$  personnes, tous les gens ont le même âge.*

**Preuve** Notons, pour tout  $n$ ,  $P_n$  la proposition “Dans tout groupe de  $n$  personnes, tous les gens ont le même âge”

- ▶  $P_1$  Trivial.
- ▶  $P_n \stackrel{?}{\Rightarrow} P_{n+1}$  Soit  $n$  tel que  $P_n$  soit vrai. Numérotons les individus  $1, 2, \dots, n$ . Soient alors  $G$  le groupe composé des individus  $1, 2, \dots, n-1$  et  $H$  le groupe composé des individus  $2, \dots, n$ . Par hypothèse de récurrence, comme  $G$  est un groupe de  $n-1$  individus, tous les individus de  $G$  ont le même âge. Par hypothèse de récurrence, comme  $H$  est un groupe de  $n-1$  individus, tous les individus de  $H$  ont le même âge. Comme la personne 2 est à la fois dans  $G$  et dans  $H$ , tous les individus de  $H$  et tous les individus de  $G$  ont le même âge que cette personne 2. Ce qui prouve le cas.

Cqfd.

## Changeons les rôles

### Proposition

*Dans tout groupe de  $n$  personnes, tous les gens ont le même âge.*

**Preuve** Notons, pour tout  $n$ ,  $P_n$  la proposition “Dans tout groupe de  $n$  personnes, tous les gens ont le même âge”

- ▶  $P_1$  Trivial.
- ▶  $P_n \stackrel{?}{\Rightarrow} P_{n+1}$  Soit  $n$  tel que  $P_n$  soit vrai. Numérotons les individus  $1, 2, \dots, n$ . Soient alors  $G$  le groupe composé des individus  $1, 2, \dots, n-1$  et  $H$  le groupe composé des individus  $2, \dots, n$ . Par hypothèse de récurrence, comme  $G$  est un groupe de  $n$  individus, tous les individus de  $G$  ont le même âge. Par hypothèse de récurrence, comme  $H$  est un groupe de  $n$  individus, tous les individus de  $H$  ont le même âge. Comme la personne 2 est à la fois dans  $G$  et dans  $H$ , tous les individus de  $H$  et tous les individus de  $G$  ont le même âge que cette personne 2. Ce qui prouve le cas.

Cqfd.

Hein ?

Introduction

Vers l'ordre

Ensembles ordonnés

Récurrence, récursion, induction

Conclusions

# C'est tout pour le chapitre

Nous avons vu

les ordres

les équivalences

un premier aperçu de l'induction

## C'est tout pour le chapitre

Nous avons vu

les ordres

les équivalences

un premier aperçu de l'induction

Pour la suite

- ▶ induction généralisée
- ▶ treillis.