

**MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE**  
**EXAMEN DE CONTRÔLE CONTINU**  
**CORRECTION**

**Exercice 1.** (environ 9 points) Soit  $E$  un ensemble contenant au moins deux éléments distincts. Prouver que les seules relations sur  $E$  qui soient à la fois symétriques et antisymétriques sont incluses dans  $\text{Id}_E$ .

Soit  $\mathcal{R}$  une relation sur  $E$  qui soit à la fois symétrique et antisymétrique.

Soient  $x$  et  $y$  dans  $E$  tels que  $x\mathcal{R}y$ . Comme  $\mathcal{R}$  est une relation symétrique, par définition, on a aussi  $y\mathcal{R}x$ . Par conséquent, nous avons  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}x$ . Or, comme  $\mathcal{R}$  est une relation antisymétrique, par définition, on peut en déduire que  $x = y$ .

Nous avons donc prouvé que, pour tout  $x$  de  $E$ ,  $x$  est en relation au plus avec lui-même. C'est-à-dire  $\mathcal{R} \subseteq \text{Id}_E$ .

CQFD

**Exercice 2.** (environ 10 points) Soit  $E$  un ensemble contenant au moins deux éléments et muni d'une relation d'ordre  $\preceq$ . Soit  $\prec$  la relation définie par  $\forall x, y \in E, x \prec y \iff x \preceq y \wedge x \neq y$ . La relation  $\prec$  est-elle transitive ? Réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ?

**Transitivité.** Soient  $x, y$  et  $z$  tels que  $x \prec y$  et  $y \prec z$ . Alors, par définition de  $\prec$ , nous avons  $x \preceq y$  et  $y \preceq z$ . Comme  $\preceq$  est une relation d'ordre,  $\preceq$  est transitive donc  $x \preceq z$ .

Prouvons par l'absurde que  $x \neq z$ . Pour ce faire, supposons  $x = z$ . Comme  $x \preceq y$ , nous avons alors  $z \preceq y$  et  $y \preceq z$ . Comme  $\preceq$  est une relation d'ordre,  $\preceq$  est aussi réflexive donc  $z = y$ , ce qui est contraire à l'hypothèse  $y \prec z$ . Par l'absurde, nous en déduisons donc que  $x \neq z$ .

Nous avons donc prouvé que  $x \preceq z$  et  $x \neq z$ , c'est-à-dire que  $x \prec z$ . Comme ceci est vrai pour tout  $x, y$  et  $z$  tels que  $x \prec y$  et  $y \prec z$ , nous avons bien prouvé la transitivité de  $\prec$ .

**Réflexivité.** Prouvons par l'absurde que  $\prec$  n'est pas réflexive. Supposons le contraire. Pour tout  $x$  de  $E$ , on a alors  $x \prec x$  donc  $x \neq x$ . Comme  $E$  n'est pas vide, d'après notre hypothèse, il existe donc  $x$  dans  $E$  et alors  $x \neq x$ , ce qui est impossible. Par l'absurde, nous en déduisons donc que  $\prec$  n'est pas réflexive.

**Antisymétrie.** Soient  $a$  et  $b$  dans  $E$  tels que  $a \prec b$  et  $b \prec a$ . Alors, par définition de  $\prec$ , nous avons  $a \preceq b$ ,  $b \preceq a$  et  $a \neq b$ . Comme  $\preceq$  est une relation d'ordre, elle est antisymétrique, donc  $a = b$ . Comme, de plus,  $a \neq b$ , nous avons une contradiction. Il n'existe donc pas de  $a$  et  $b$  dans  $E$  tels que  $a \prec b$  et  $b \prec a$ . Par conséquent, comme une hypothèse fautive implique n'importe quoi, nous avons bien  $\forall a, b \in E, a \prec b \wedge b \prec a \Rightarrow a = b$  !

En d'autres termes, la relation  $\prec$  est antisymétrique (mais c'est un cas fort dégénéré de symétrie).

**Symétrie.** Soient  $a$  et  $b$  dans  $E$  tels que  $a \prec b$ . Prouvons par l'absurde que l'on n'a pas  $b \prec a$ . Supposons que  $b \prec a$ . Comme dans le cas de la symétrie, nous prouvons que ceci implique à la fois  $b = a$  et  $b \neq a$ , ce qui est impossible. Par l'absurde, nous déduisons donc que notre hypothèse de départ est fautive et que l'on n'a pas  $b \prec a$ . A fortiori,  $\prec$  ne peut pas être symétrique.

Pour l'exercice qui suit, nous allons employer une légère variante sur la définition des partitions.

**Définition 1.** Soit  $E$  un ensemble. Un ensemble  $\{A_i / i \in I\}$  de sous-ensembles de  $E$  est une partition de  $E$  si

- i. aucun des  $A_i$  n'est l'ensemble vide
- ii. pour tout  $i$  et pour tout  $j$  dans  $I$ , soit  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , soit  $A_i = A_j$
- iii.  $\bigcup_{i \in I} A_i = E$ .

**Exercice 3.** (environ 15 points) Soit  $E$  un ensemble. Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $E$ . Prouver que l'ensemble  $\{[x]_{\mathcal{R}}/x \in E\}$  est une partition de  $E$ .

Notons, pour tout  $x$  dans  $E$ ,  $A_x = [x]_{\mathcal{R}}$ .

Prouvons les trois propriétés successivement.

i. Soit  $x$  dans  $E$ . Par définition,  $A_x = [x]_{\mathcal{R}} = \{y \in E/x\mathcal{R}y\}$ . Comme  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $E$ , nous avons  $x\mathcal{R}x$  donc  $x \in [x]_{\mathcal{R}}$ . En particulier, nous pouvons en déduire que  $A_x$  n'est pas vide. Par conséquent, *aucun des  $A_x$  n'est vide*.

ii. Soient  $i$  et  $j$  deux éléments distincts de  $E$ . Prouvons que soit  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , soit  $A_i = A_j$ .

- Si  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , a fortiori, soit  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , soit  $A_i = A_j$ .
- Si  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ , nous avons  $[i]_{\mathcal{R}} \cap [j]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ . Or, nous savons que cela implique  $[i]_{\mathcal{R}} = [j]_{\mathcal{R}}$ , c'est-à-dire  $A_i = A_j$ . A fortiori, nous avons soit  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , soit  $A_i = A_j$ .

Nous avons donc prouvé que, dans tous les cas, pour tout  $i$  et pour tout  $j$  distincts, soit  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , soit  $A_i = A_j$ .

iii. Pour prouver l'égalité, procédons par double-inclusion.

- Prouvons que  $\cup_{x \in E} A_x \subseteq E$ .

Pour ce faire, considérons  $e$  dans  $\cup_{x \in E} A_x$ . Par définition, il existe  $x$  dans  $E$  tel que  $e \in A_x$ . Or, par définition,  $A_x = \{y \in E/x\mathcal{R}y\}$ . En particulier, cela signifie que  $e \in E$ . Par conséquent, nous en déduisons que  $\cup_{x \in E} A_x \subseteq E$ .

- Prouvons que  $E \subseteq \cup_{x \in E} A_x$ .

Pour ce faire, considérons  $e$  dans  $E$ . Comme nous l'avons remarqué au point i., nous avons  $e \in A_e$ . A fortiori, nous avons  $e \in \cup_{x \in E} A_x$ . Nous en déduisons que  $E \subseteq \cup_{x \in E} A_x$ .

Nous avons donc prouvé que  $E \subseteq \cup_{x \in E} A_x$  et  $\cup_{x \in E} A_x \subseteq E$ , c'est-à-dire que  $E = \cup_{x \in E} A_x$ .

Nous venons donc de prouver les trois propriétés de la définition d'une partition. En d'autres termes,  $\{[x]_{\mathcal{R}}/x \in E\}$  est bien une partition de  $E$ .

**Exercice 4.** (environ 12 points) Soit  $\mathcal{R}$  la relation définie sur  $\mathbf{N}^*$  par  $\forall p, q \in \mathbf{N}^*, p\mathcal{R}q \iff \exists n \in \mathbf{N}^*, p = q^n$ . Prouver que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Par définition,  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre si et seulement si  $\mathcal{R}$  est antisymétrique, réflexive et transitive. Prouvons ces trois propriétés.

**Antisymétrique.** Soient  $p$  et  $q$  dans  $\mathbf{N}^*$  tels que  $p\mathcal{R}q$  et  $q\mathcal{R}p$ . Par définition, il existe  $m$  et  $n$  dans  $\mathbf{N}^*$  tel que  $p = q^n$  et  $q = p^m$ . Nous en déduisons que  $p = (p^m)^n = p^{m \cdot n}$ . Se présentent alors deux cas :

- Si  $p = 1$ , nous avons  $q = 1^m = 1$  donc  $p = q$ .
- Si  $p > 1$ , de nouveau, deux cas se présentent :
  - Si  $m \cdot n > 1$  alors  $p^{m \cdot n} > p$ , ce qui contredit l'hypothèse  $p = p^{m \cdot n}$ . Par l'absurde, nous en déduisons que ce cas ne peut pas se présenter, c'est-à-dire  $m \cdot n \not> 1$ .
  - Si  $m \cdot n = 1$ , alors, comme  $m$  et  $n$  sont des entiers positifs, nous avons  $m = 1$  et  $n = 1$ . Comme, de plus,  $q = p^m$ , nous en déduisons que  $q = p^1 = p$ .

Nous avons donc prouvé que, dans tous les cas,  $p = q$ . En d'autres termes, pour tout  $p$  et  $q$  tels que  $p\mathcal{R}q$  et  $q\mathcal{R}p$ , nous avons  $p = q$ , c'est-à-dire  $\mathcal{R}$  est antisymétrique.

**Réflexivité.** Soit  $p$  dans  $\mathbf{N}^*$ . Alors, avec  $n = 1 \in \mathbf{N}^*$ , nous avons  $p = p^n$ . Par conséquent,  $p\mathcal{R}p$ . En d'autres termes, pour tout  $p$  de  $\mathbf{N}^*$ , nous avons  $p\mathcal{R}p$ , c'est-à-dire  $\mathcal{R}$  est réflexive.

**Transitivité.** Soient  $p, q$  et  $r$  dans  $\mathbf{N}^*$  tels que  $p\mathcal{R}q$  et  $q\mathcal{R}p$ . Alors, il existe  $n$  et  $m$  dans  $\mathbf{N}^*$  tels que  $p = q^n$  et  $q = r^m$ . De ces deux égalités, nous déduisons  $p = (r^m)^n = r^{(m \cdot n)}$ . Comme  $n$  et  $m$  sont dans  $\mathbf{N}^*$ ,  $n \cdot m$  aussi. Il existe donc  $k$  dans  $\mathbf{N}^*$  tel que  $p = r^k$ . En d'autres termes, nous venons de prouver que  $\mathcal{R}$  est transitive.

Nous venons de prouver que  $\mathcal{R}$  est réflexive, transitive et antisymétrique, c'est-à-dire, par définition des relations d'ordre, que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre. CQFD

Cette relation est partielle sur  $\mathbf{N}^*$ , car il existe des entiers qui ne sont pas liés par  $\mathcal{R}$ , par exemple 7 et 21 ou 7 et 9.

**Exercice 5.** (environ 8 points) Dans l'ensemble  $\mathbf{R}$ , l'ensemble  $\mathbf{N}$  admet-il une borne supérieure ? Une borne inférieure ?

**Borne supérieure.** Non,  $\mathbf{N}$  n'admet pas de borne supérieure dans  $\mathbf{R}$ . Pour prouver cela, supposons, par l'absurde, que  $\mathbf{N}$  admet une borne supérieure  $x$  dans  $\mathbf{R}$ . Alors, par définition de la borne supérieure, nous avons,  $\forall n \in \mathbf{N}, n \leq x$ . Comme  $x$  est un réel,  $x$  admet une valeur absolue  $|x|$ . L'une des propriétés de cette valeur absolue est que  $|x| \geq x$  et  $|x| \geq 0$ . À son tour,  $|x|$  admet une partie entière  $E(|x|)$ , dont l'une des propriétés est que  $E(|x|) + 1 \in \mathbf{N}$  et  $E(|x|) + 1 > |x|$ .

En posant  $n = E(|x|) + 1$ , nous venons de trouver  $n$  dans  $\mathbf{N}$  tel que  $n > x$ , ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, par l'absurde, nous venons de prouver que  $\mathbf{N}$  n'admet pas de borne supérieure dans  $\mathbf{R}$ .

**Borne inférieure.** Oui, 0 est la borne inférieure de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{R}^*$ . Pour prouver cela, remarquons que

- $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq n$  donc
- Soit  $x$  un réel tel que  $\forall n \in \mathbf{N}, x \leq n$ . Alors, comme  $0 \in \mathbf{N}$ , nous avons  $x \leq 0$ . En d'autres termes,  $\forall x \in \mathbf{R}, (\forall n \in \mathbf{N}, x \leq n) \implies x \leq 0$ .

Nous venons donc de prouver que 0 est la borne inférieure de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{R}^*$ .

CQFD

**Exercice 6.** (environ 9 points) Considérons la fonction  $g: \mathbf{Q}^{++} \longrightarrow \mathbf{Q}$  définie par

- si  $x < 1$ ,  $g(x) = -\frac{1}{x}$
- si  $x \geq 1$ ,  $g(x) = x - 2$ .

Prouver que  $g$  est une bijection.

Commençons par remarquer que  $g$  est bien une application de  $\mathbf{Q}^{++}$  dans  $\mathbf{Q}$ . Par définition,  $g$  est une bijection si et seulement si  $g$  est une injection et une surjection. Prouvons donc ces deux propriétés.

**Injection.** Soient  $x$  et  $y$  dans  $\mathbf{Q}^{++}$  tels que  $g(x) = g(y)$ . Considérons les quatre cas suivants :

- Si  $x < 1$  et  $y < 1$ , alors  $g(x) = g(y) = -\frac{1}{x} = -\frac{1}{y}$ . Comme  $-\frac{1}{x} = -\frac{1}{y}$ , nous déduisons immédiatement que  $x = y$ .
- Si  $x \geq 1$  et  $y \geq 1$ , alors  $g(x) = g(y) = x - 2 = y - 2$ . Comme  $x - 2 = y - 2$ , nous déduisons immédiatement que  $x = y$ .
- Si  $x < 1$  et  $y \geq 1$ , alors  $g(x) = -\frac{1}{x} = g(y) = y - 2$ . Nous avons  $y - 2 = -\frac{1}{x}$ . Or, comme  $y \geq 1$ , nous déduisons immédiatement  $y - 2 \geq -1$ . De même, comme  $x < 1$ , nous déduisons immédiatement  $-\frac{1}{x} < -1$ . Par conséquent,  $y - 2 \neq -\frac{1}{x}$ , ce qui contredit nos hypothèses. Par l'absurde, nous en déduisons que nous ne pouvons pas avoir  $x < 1$  et  $y \geq 1$ .
- Le cas  $y < 1$  et  $x \geq 1$  est identique.

Nous venons donc de prouver que pour tout  $x$  et tout  $y$  de  $\mathcal{Q}^{+*}$ ,  $g(x) = g(y)$  implique  $x = y$ . Comme, de plus,  $g$  est une application, par définition de l'injectivité,  $g$  est *injective*.

**Surjection.** Soit  $z$  dans  $\mathcal{Q}$ . Alors,

- Si  $z \geq -1$ , posons  $x = z + 2$ . Nous avons  $x \geq 1$  donc  $g(x) = x - 2 = z$ . La valeur  $z$  admet donc un antécédent par  $g$ .
- Si  $z < -1$ , posons  $x = -\frac{1}{z}$ . Cette valeur est définie car  $z \neq 0$ . Nous avons  $0 < x < 1$  donc  $g(x) = -\frac{1}{x} = z$ . La valeur  $z$  admet donc un antécédent par  $g$ .

Nous venons donc de prouver que pour tout  $z$  de  $\mathcal{Q}$ ,  $z$  admet un antécédent par  $g$ . Comme, de plus,  $g$  est une application, par définition de la surjectivité,  $g$  est *surjective*.

Nous venons donc de prouver que  $g$  est injective et surjective. Par définition de la bijectivité, nous déduisons que  $g$  est une *bijection entre  $\mathcal{Q}^{+*}$  et  $\mathcal{Q}$* .