Mathématiques pour l'informatique
Examen de contrôle continu

Vous avez 1h30. Pour avoir 20/20, engrangez 20 points. N'oubliez pas de soigner la rédaction, celle-ci compte pour environ la moitié de la note.

Exercice 1. (environ 9 points) Soit E un ensemble. Prouver que toute relation sur E qui soit à la fois symétrique et antisymétrique est un sous-ensemble de Id_E.

Exercice 2. (environ 12 points) Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\preceq$. Soit $\prec$ la relation définie par $\forall x, y \in E, x \prec y \Longleftrightarrow x \preceq y \wedge x \neq y$. La relation $\prec$ est-elle transitive ? Réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ?

Pour l'exercice qui suit, nous allons employer une légère variante sur la définition des partitions.

Définition 1. *Soient E et I deux ensembles. Un ensemble $\{A_i \,/\, i \in I\}$ de sous-ensembles de E est une* partition *de E si*

i. *aucun des A_i n'est l'ensemble vide*

ii. *pour tout i et pour tout j dans I, soit $A_i \cap A_j = \emptyset$, soit $A_i = A_j$*

iii. $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.

Exercice 3. (environ 14 points) Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Prouver que l'ensemble $\{[x]_{\mathcal{R}} / x \in E\}$ est une partition de E. Pour tout x de E, vous pourrez noter $A_x = [x]_{\mathcal{R}}$.

Exercice 4. (environ 10 points) Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\boldsymbol{N}^*$ par $\forall p, q \in \boldsymbol{N}^*, p\mathcal{R}q \Longleftrightarrow \exists n \in \boldsymbol{N}^*, p = q^n$. Prouver que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Exercice 5. (environ 8 points) Dans l'ensemble $\boldsymbol{R}$, l'ensemble $\boldsymbol{N}$ admet-il une borne supérieure ? Une borne inférieure ?

Exercice 6. (environ 8 points) Considérons la fonction $g\colon \boldsymbol{Q}^{+*} \longrightarrow \boldsymbol{Q}$ définie par

- si $x < 1$, $g(x) = -\frac{1}{x}$
- si $x \geqslant 1$, $g(x) = x - 2$.

Prouver que g est une bijection.