Mathématiques pour l'informatique
Calculs ensemblistes

Pour tous ces exercices, on considérera un ensemble E. Une fois prouvés, vous pourrez considérer tous ces exercices comme des théorèmes.

Exercice 1. Soient A, B, C trois parties de E. Montrer que
$A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$ si et seulement si $A \cap B = A \cap C$.

Exercice 2. Soient A, B, C trois parties de E. Montrer que
Si $A \cup B \subseteq A \cup C$ et $A \cap B \subseteq A \cap C$ alors $B \subseteq C$.

Dans quel cas a-t-on $B = C$?

Exercice 3. Soient A, B, C trois parties de E. Quelles relations y a-t-il entre

i. $A\Delta(B \cap C)$ et $(A\Delta B) \cap (A\Delta C)$
ii. $A\Delta(B \cup C)$ et $(A\Delta B) \cup (A\Delta C)$.

Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 4. Soient $f\colon A \longrightarrow B$ et $g\colon B \longrightarrow C$ deux applications. Prouver que

i. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective
ii. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
iii. si $g \circ f$ est bijective, on n'a pas nécessairement f bijective et g bijective
iv. si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective
v. si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.

–

Exercice 5. * **(Associativité)**
Soient $f\colon E \longrightarrow F$, $g\colon F \longrightarrow G$ et $h\colon G \longrightarrow H$ trois applications. Prouver que $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Exercice 6. * **([Semi-]inverses)**
Soit $f\colon E \longrightarrow F$ une application. Alors

- Si $E \neq \emptyset$, f est injective si et seulement si f admet un inverse à gauche, c'est-à-dire s'il existe une application $r\colon F \longrightarrow E$ telle que $r \circ f = \mathrm{Id}_E$.
- f est surjective si et seulement si f admet un inverse à droite, c'est-à-dire s'il existe une application $s\colon F \longrightarrow E$ telle que $f \circ s = \mathrm{Id}_F$.
- f est bijective si et seulement si f admet un inverse, c'est-à-dire s'il existe une application $f^{-1}\colon F \longrightarrow E$ telle que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

.

Exercice 7. * **(Composition)**
Soient $f\colon E \longrightarrow F$ et $g\colon F \longrightarrow G$ deux applications. Prouver que

- $g \circ f$ est une application ;
- si f et g sont injectives, $g \circ f$ est injective ;
- si f et g sont surjectives, $g \circ f$ est surjective ;
- si f et g sont bijectives, $g \circ f$ est bijective.

Exercice 8. * **(Composition et réciproque)**
Soient $f\colon E \longrightarrow F$ et $g\colon F \longrightarrow G$ deux applications bijectives. Prouver que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice 9. * **(Unicité de la réciproque)**
Soit $f\colon E \longrightarrow F$ une application bijective. Prouver que l'application f^{-1} est définie de manière unique.