# Mathématiques pour l'informatique
# Logique des prédicats

**Exercice 1.** Prouver que si $P \vDash g$ et $P \vDash f$ IMPLIQUE $g$ alors $P \vDash g$.

Rappelons que la logique des séquents se définit à partir des règles suivantes :

Premisse $\dfrac{}{P \vdash f} f \in P$ Augmentation $\dfrac{P \vdash f}{P \cup \{g\} \vdash f}$ Modus Ponens $\dfrac{P \vdash f \quad P \vdash f \text{ IMPLIQUE } g}{P \vdash g}$ Synthèse $\dfrac{P \cup \{f\} \vdash g}{P \vdash f \text{ IMPLIQUE } g}$

Double négation 1 $\dfrac{P \vdash \text{NON NON } f}{P \vdash f}$ Double négation 2 $\dfrac{P \vdash f}{P \vdash \text{NON NON } f}$ Absurde $\dfrac{P \vdash f \text{ IMPLIQUE } (\text{NON } f)}{P \vdash \text{NON } f}$

**Exercice 2.** Prouver que $P \vdash f$ IMPLIQUE $g$ si et seulement si $P \vdash (\text{NON } g)$ IMPLIQUE $(\text{NON } f)$.

**Exercice 3.** L'ensemble des formules prouvables est-il défini de manière ambiguë ?

**Exercice 4.** Prouver que $P \vDash f$ IMPLIQUE $g$ si et seulement si $P \vDash (\text{NON } g)$ IMPLIQUE $(\text{NON } f)$.

Rappelons que ET et OU ont été définis en cours.

**Exercice 5.** * Prouver que $P \vdash f$ ET $g$ si et seulement si $P \vdash f$ et $P \vdash g$.

**Exercice 6.** * Prouver que $\{f \text{ OU } g\} \vDash h$ si et seulement si $\{f\} \vDash h$ ou $\{g\} \vDash h$.

## Correction du TD 10

**Exercice 6.** Quelle est la négation de la proposition suivante ?
$\forall a \in \boldsymbol{N}^*, \forall b \in \boldsymbol{N}^*, \exists c \in \boldsymbol{N}^*, \exists d \in \boldsymbol{N}, \exists e \in \boldsymbol{N}, a \times d \wedge b \times e$

Comme $a$, $b$, $d$ et $e$ sont des entiers, $a \times d$ et $b \times e$ sont des entiers. En particulier, $a \times d \wedge c \times e$ n'est donc pas une proposition. A fortiori, la « *proposition* » de l'énoncé n'est pas une proposition et n'a donc pas de négation.

**Exercice 7.** Prouver que $\emptyset \vDash$ NON NON $f$ IMPLIQUE $f$.

Par définition de $\vDash$ , l'énonce peut se reformuler « prouver que le séquent ($\emptyset$, (NON NON $f$) IMPLIQUE $f$) est valide. » ou encore, par définition de la validité, « prouver que pour toute interprétation de variables $I$, et toute formule $f$, $J_I$((NON NON $f$)IMPLIQUE $f$) vaut $V$, où $J_I$ est l'interprétation de formules tirée de $I$. »

Soient $I$ une interprétation et $f$ une formule. Deux cas sont possibles : soit $I(f)$ vaut $V$, soit $I(f)$ vaut $F$.

- Si $I(f) = V$, nous avons $J_I(f) = V$, $J_I(\text{NON } f) = F$ et $J_I(\text{NON NON } f) = V$. Enfin, comme $J_I(f) = V$, nous avons aussi $J_I((\text{NON NON } f)\text{IMPLIQUE } f) = V$.
- Si $I(f) = F$, nous avons de même $J_I(\text{NON NON } f) = F$ donc $J_I((\text{NON NON } f)\text{IMPLIQUE } f) = V$.

Dans tous les cas, nous avons donc $J_I((\text{NON NON } f)\text{IMPLIQUE } f) = V$. C'est-à-dire
$\emptyset \vDash \text{NON NON } f \text{IMPLIQUE } f$.