

MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE

FONCTIONS

Exercice 1. Soient $f: A \rightarrow B$ et $g: B \rightarrow C$ deux applications. Prouver que

- i. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective
- ii. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
- iii. si $g \circ f$ est bijective, on n'a pas nécessairement f bijective et g bijective
- iv. si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective
- v. si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.

Exercice 2. (Associativité)

Soient $f: E \rightarrow F$, $g: F \rightarrow G$ et $h: G \rightarrow H$ trois applications. Prouver que $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Exercice 3. * ([Semi-]inverses)

Soit $f: E \rightarrow F$ une application. Montrer que

- Si $E \neq \emptyset$, f est injective si et seulement si f admet un inverse à gauche, c'est-à-dire s'il existe une application $r: F \rightarrow E$ telle que $r \circ f = \text{Id}_E$.
- f est surjective si et seulement si f admet un inverse à droite, c'est-à-dire s'il existe une application $s: F \rightarrow E$ telle que $f \circ s = \text{Id}_F$.
- f est bijective si et seulement si f admet un inverse, c'est-à-dire s'il existe une application $f^{-1}: F \rightarrow E$ telle que $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$.

Exercice 4. (Composition)

Soient $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ deux applications. Prouver que

- $g \circ f$ est une application ;
- si f et g sont injectives, $g \circ f$ est injective ;
- si f et g sont surjectives, $g \circ f$ est surjective ;
- si f et g sont bijectives, $g \circ f$ est bijective.

Exercice 5. * (Composition et réciproque)

Soient $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ deux applications bijectives. Prouver que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice 6. * (Unicité de la réciproque)

Soit $f: E \rightarrow F$ une application bijective. Prouver que l'application f^{-1} est définie de manière unique.

Correction du TD précédent

Exercice 6

Notez que cet exercice consiste essentiellement à reprouver les lois de De Morgan, mais sur un sous-ensemble A de E . Considérons donc un ensemble E et A , B et C trois sous-ensembles de E .

- i. Supposons $A \setminus A$ non vide. Soit alors a un élément de $A \setminus A$. Par définition, $A \setminus A = \{e \in E / e \in A \wedge e \notin A\}$. Par conséquent, nous savons que $a \in A$ et $a \notin A$. Comme $a \notin A$ est la négation de $a \in A$, il est impossible d'avoir $a \in A$ et $a \notin A$.

Par l'absurde, nous en déduisons que l'hypothèse de basse est fautive : $A \setminus A$ est donc l'ensemble vide. \square

ii. Par définition de la différence, $A \setminus (B \cup C) = \{e \in E / e \in A \wedge e \notin (B \cup C)\}$. Par définition du complémentaire, cet ensemble est aussi $\{e \in E / e \in A \wedge e \in \overline{B \cup C}\}$. D'après les lois de De Morgan, on peut encore réécrire ceci $\{e \in E / e \in A \wedge e \in \overline{B} \cap \overline{C}\}$, soit, par définition de l'intersection, $\{e \in E / e \in A \wedge e \in \overline{B} \wedge e \in \overline{C}\}$.

Or, par définition de l'intersection et de la différence, $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{e \in E / (e \in A \wedge e \notin B) \wedge (e \in A \wedge e \notin C)\}$. En rassemblant les deux $e \in A$ et par définition du complémentaire, cet ensemble se réécrit $\{e \in E / e \in A \wedge e \in \overline{B} \wedge e \in \overline{C}\}$.

On obtient donc l'égalité $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. \square

iii. La preuve est essentiellement identique à celle du *ii*.

iv. Par définition de la différence, $(A \cup B) \setminus C = \{e \in E / e \in (A \cup B) \wedge e \notin C\}$. Par définition de l'union, cet ensemble est aussi $\{e \in E / (e \in A \vee e \in B) \wedge e \notin C\}$. Par distributivité de \wedge sur \vee , nous pouvons réécrire cet ensemble $\{e \in E / (e \in A \wedge e \notin C) \vee (e \in B \wedge e \notin C)\}$. Ce qui est la définition de $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

On obtient donc l'égalité $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. \square

v. La preuve est essentiellement identique à celle du *v*.

Exercice 7

Considérons l'ensemble D , défini comme $(A \cup B) \setminus (B \cap A)$. D'après le point *iv*. de l'exercice précédent, nous savons que $D = (A \setminus (B \cap A)) \cup (B \setminus (B \cap A))$. D'après le point *iii.*, nous pouvons réécrire $D = (A \setminus B) \cup (A \setminus A) \cup (B \setminus B) \cup (B \setminus A)$. D'après le point *i.*, et sachant que pour tout ensemble C , $C \cup \emptyset = C$, nous pouvons supprimer $A \setminus A$ et $B \setminus B$. Par suite, $D = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. CQFD.

Exercice 8

L'objectif de cet exercice était de démontrer directement la propriété précédente, comme vu en cours, sans passer par les résultats de l'exercice 6.

Considérons l'ensemble P , défini comme $\{c \in E / (c \in A \wedge c \notin B) \vee (c \in B \wedge c \notin A)\}$ et l'ensemble Q , défini comme $\{c \in E / (c \in A \vee c \in B) \wedge (c \notin A \vee c \notin B)\}$.

i. Commençons par montrer que $P \subseteq Q$.

Soit c dans P . C'est-à-dire, par définition de P , $c \in E$ et $((c \in A$ et $c \notin B)$ ou $(c \in B$ et $c \notin A)$). Nous allons essayer de montrer que, pour chacune de ces possibilités, c appartient aussi à Q .

a) Si $c \in A$ et $c \notin B$.

Comme $c \in A$, a fortiori, $c \in A \wedge c \in B$. De même, comme $c \notin B$, a fortiori, $c \notin A \wedge c \notin B$. Comme, de plus, $c \in E$, nous en déduisons que c appartient à Q . Ce qui clôt le cas.

b) Si $c \notin A$ et $c \in B$.

En échangeant A et B dans la preuve du cas *a*), nous pouvons de même conclure que c appartient à Q . Ce qui clôt le cas.

Nous venons de prouver que, pour tout c de P , c appartient à Q . En d'autres termes, $P \subseteq Q$.

ii. Montrons maintenant que $Q \subseteq P$

Soit c dans Q . C'est-à-dire, par définition de Q , $c \in E$, soit $c \in A$ soit $c \in B$ et soit $c \notin A$, soit $c \notin B$. Montrons que, pour chacune de ces quatre combinaisons possibles, c appartient aussi à P .

a) Si $c \in A$ et $c \notin A$.

Ce cas ne peut se produire.

b) Si $c \in A$ et $c \notin B$.

Comme $c \in A \wedge c \notin B$, a fortiori, $(c \in A \wedge c \notin B) \vee (c \in B \wedge c \notin A)$. Comme, de plus, $c \in E$, nous en déduisons que c appartient à P . Ce qui clôt le cas.

c) Si $c \in B$ et $c \notin A$.

Comme le cas b).

d) Si $c \in B$ et $c \notin B$.

Comme le cas a).

Nous venons de prouver que, pour tout c de Q , c appartient à P . En d'autres termes, $Q \subseteq P$.

Nous avons donc prouvé $P \subseteq Q$ et $Q \subseteq P$, c'est-à-dire $P = Q$. QED