MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE
ENSEMBLES DÉNOMBRABLES

Ensembles finis

Exercice 1. Soient E et F deux ensembles finis. Prouver que

- $E \times F$ est un ensemble fini et $|E \times F| = |E| \cdot |F|$;
- F^E est un ensemble fini et $|F^E| = |F|^{|E|}$ — rappelons que F^E est l'ensemble des applications de E dans F ;
- $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini et $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$.

Exercice 2. (Principe des tiroirs) Considérons n tiroirs, dans lesquels on veut placer un total de m chaussettes. Prouver qu'au moins un tiroir contiendra au moins m/n chaussettes.

Ensembles dénombrables

Exercice 3. Prouver que si E et F sont dénombrables, $E \times F$ est aussi dénombrable.

Exercice 4. * Prouver que tout sous-ensemble de $\boldsymbol{N}$ est dénombrable.

Exercice 5. * Comparer la cardinalité de $\boldsymbol{R}^2$ et la cardinalité de $\boldsymbol{R}$. Vous pourrez vous servir de l'écriture décimale des nombres réels.

Correction des exercices précédents

Exercice 3

Soit $f: E \longrightarrow F$ une application.

Première question Supposons $E \neq \emptyset$.

i. Supposons f injective. Soit alors r la correspondance définie comme $(\mathrm{Im}(f), E, \{(y, x) / y = f(x)\})$. Nous allons chercher à prouver que r est bien une application de $\mathrm{Im}(f)$ vers E et que $r \circ f = \mathrm{Id}_E$.

   application. par définition, r est une application de $\mathrm{Im}(f)$ vers E si et seulement si pour tout élément y de $\mathrm{Im}(f)$, il existe exactement un x dans E tel que $r(y) = x$. Considérons donc un y quelconque pris dans $\mathrm{Im}(f)$. Par définition de $\mathrm{Im}(f)$, y admet au moins un antécédent x par f. Par conséquent, il existe au moins un x dans E tel que $f(x) = y$. Par définition de r, nous avons donc $r(y) = x$. Tout y de F a donc au moins une image par r.

   Supposons maintenant qu'il existe un y doté de deux images par r : x et z. C'est-à-dire, par définition de r, que nous avons $y = f(x)$ et $y = f(z)$. Comme f est injective, nous en déduisons que $x = z$. Tout y de F a donc au plus une image par r.

   Nous avons donc prouvé que tout y de F a exactement une image par r, c'est-à-dire que r est une application de $\mathrm{Im}(f)$ vers F.

   composition. considérons un élément x de E. Nous avons $(r \circ f)(x) = r(f(x))$. Par définition de r, nous avons immédiatement $r(f(x)) = x$. Nous avons donc prouvé que $r \circ f = \mathrm{Id}_E$.

   CQFD.

ii. Supposons maintenant l'existence d'une application r telle que $r \circ f = \mathrm{Id}_E$. Nous allons chercher à prouver que f est bien injective.

   Soient x et y deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$. Comme $r \circ f = \mathrm{Id}_E$, $(r \circ f)(x) = x$ et $(r \circ f)(y) = y$. Or $(r \circ f)(x) = r(f(x))$. Comme $f(x) = f(y)$, on en déduit que $(r \circ f)(x) = r(f(y)) = (r \circ f)(y)$. En combinant ces deux déductions, nous avons $x = y$.

Nous venons de prouver que f est bien injective.
CQFD

Ceci prouve la première question.

Deuxième question La preuve est essentiellement la même.

Troisième question

i. Supposons que f est une application bijective. Considérons alors r, l'inverse à gauche de f, dont nous venons de prouver l'existence. Nous savons maintenant que r est une application de $\mathrm{Im}(f)$ vers E. Comme, de plus, f est surjective, nous savons que $\mathrm{Im}(f) = F$. Nous avons donc prouvé l'existence d'une application $r\colon F \longrightarrow E$ telle que $r \circ f = \mathrm{Id}_E$.

   Si nous arrivons à prouver que $f \circ r = \mathrm{Id}_F$, nous aurons trouvé f^{-1}. Nous pouvons déjà remarquer que $f \circ r$ est bien une application de F dans F. Soit alors y dans F. Par définition de r, si $r(y) = x$, alors $f(x) = y$. Nous avons alors $f(r(y)) = f(x) = y$. Comme nous avons prouvé ceci pour tout y, nous venons de prouver que $f \circ r = \mathrm{Id}_F$.

   Il ne nous reste plus qu'à poser $f^{-1} = r$ et le cas est prouvé.

ii. Supposons que f est une application admettant un inverse. Il existe donc une application $f^{-1}\colon F \longrightarrow E$ telle que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

   Injectivité. Soient x et y dans E tels que $f(x) = f(y)$. Nous avons alors $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ et $(f^{-1} \circ f)(y) = y$. Comme $f(x) = f(y)$, nous avons aussi $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y))$. Nous en déduisons que $x = y$.

   Surjectivité. Soit y dans F. Soit alors $x = f^{-1}(y)$. Nous avons $f(x) = f \circ f^{-1}(y) = y$. Nous venons donc de prouver que y admet un antécédent par f.

   CQFD

Exercice 6 Soit $f\colon E \longrightarrow F$ une application bijective. Pour prouver que l'application f^{-1} est définie de manière unique, il suffit de prouver que s'il existe deux applications réciproques de f, ces deux applications coïncident en tout point.

Choisissons donc y dans F. Comme f est bijective, il existe x dans E tel que $f(x) = y$. Nous avons alors $g(f(x)) = h(f(x)) = x$, donc $g(y) = h(y)$. Nous venons donc de prouver que h et g coïncident en tout point. CQFD

Exercice 5 Soient $f\colon E \longrightarrow F$ et $g\colon F \longrightarrow G$ deux applications bijectives.

Notons alors $h = (g \circ f)^{-1}$ et $k = f^{-1} \circ g^{-1}$. Pour prouver l'égalité de h et k, la méthode la plus simple consiste à remarquer que h et k sont tous les deux des inverses de $g \circ f$ et à utiliser le résultat de l'exercice 6. La fonction h est inverse de $g \circ f$ par définition. Pour la fonction k, considérons x dans G. Comme $\circ$ est une loi associative, nous avons $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = g(f(f^{-1}(g^{-1}(x))$. Comme f est une application bijective, nous savons que, pour tout y, $f(f^{-1}(y)) = y$. Par conséquent, nous pouvons réduire $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = g(g^{-1}(x))$. De même, $g(g^{-1}(x)) = x$. Ce dont nous déduisons que, pour tout x, $(g \circ f)(k(x)) = x$. En d'autres termes, $g \circ f$ et k sont inverses.

Nous en déduisons que $h = k$.

CQFD

Note Il était possible de prouver le résultat sans passer par l'exercice 6 mais c'était un peu plus long.