

MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE

RELATIONS

Exercice 1. Soit E un ensemble. Soit $*$ une opération binaire sur E . Prouver que $*$ admet au plus un élément neutre.

Exercice 2. Soit E un ensemble. Prouver que la relation \subseteq est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.

Définition 1. Un ordre \mathcal{R} sur E est dit total si, pour tout x et y dans E on a soit $x\mathcal{R}y$, soit $y\mathcal{R}x$. Un ordre qui n'est pas total est dit partiel.

Exercice 3. La relation \subseteq constitue-t-elle un ordre total ou un ordre partiel sur $\mathcal{P}(E)$?

Exercice 4. Soient \mathcal{R} et \mathcal{R}' deux relations transitives sur un ensemble E . Montrer que

- $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ est transitive
- $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ n'est pas forcément transitive.

Exercice 5. Soit \mathcal{R} une relation quelconque sur E . Montrer que $(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1})^*$ est une relation d'équivalence.

Exercice 6. * Soit E un ensemble. Dans $\mathcal{P}(E)$, l'union est-elle associative ? Commutative ? Admet-elle un élément neutre ? Quid de l'intersection ? Quid de la différence symétrique ?

Exercice 7. * Soit \mathcal{R} une relation. Prouver que \mathcal{R}^* est transitive. On admettra que, pour tout i , $\mathcal{R}^{i+j} = \mathcal{R}^i \cdot \mathcal{R}^j$.

Corrections

Exercice 4. Prouver que tout sous-ensemble de \mathbf{N} est dénombrable.

Considérons un sous-ensemble A de \mathbf{N} . Nous souhaitons prouver que soit A est en bijection avec \mathbf{N} , soit il existe n tel que A soit en bijection avec $[n]$.

Commençons par considérer le cas où A est fini. Alors, par définition, il existe n tel que A soit en bijection avec $[n]$. Ce qui prouve le cas.

Considérons donc maintenant le cas où A est infini. Comme nous sommes dans \mathbf{N} , il existe un plus petit élément de A . Nommons cet élément a_0 . Soient de même a_1 le deuxième plus petit élément de \mathbf{N} , a_2 le troisième plus petit élément... Soit alors $f: A \rightarrow \mathbf{N}$ la fonction définie par $\forall a_i \in A, f(a_i) = i$. Nous souhaitons prouver que f est une bijection.

Injection Supposons qu'il existe a et b dans A tels que $f(a) = f(b)$. Notons $n = f(a)$. Par définition, le seul antécédent de n par f est a_n . Par conséquent, nous avons $a = b = a_n$.

Surjection Soit n dans \mathbf{N} . Comme A contient au moins n éléments, il existe un $n + 1^{\text{o}}$ plus petit élément dans A , nommé a_n . Or $f(a_n) = n$. Nous avons donc prouvé que tout élément n de \mathbf{N} admet un antécédent par f , c'est-à-dire que f est surjective.

Nous avons donc prouvé l'existence d'une bijection entre A et \mathbf{N} . Ce qui conclut le cas.

Dans tous les cas, A est donc dénombrable. \square

Exercice 5. Comparer la cardinalité de \mathbf{R}^2 et la cardinalité de \mathbf{R} . Vous pourrez vous servir de l'écriture décimale des nombres réels.

L'idée générale va consister à prendre les nombres de \mathbf{R}^2 et à intercaler leurs décimales pour obtenir les nombres de \mathbf{R} . Rédigeons maintenant cela proprement.

Lemme 1. Il existe une bijection entre \mathbf{R} et $[0, 1[$.

Il existe une surjection de $[0, 1[$ vers \mathbf{R} : la fonction $x \neq 0 \mapsto \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ et $0 \mapsto 0$.

Il existe une injection de $[0, 1[$ vers \mathbf{R} : la fonction $x \mapsto x$.

D'après le théorème de Cantor-Bernstein, il existe donc une bijection entre \mathbf{R} et $[0, 1[$. Appelons cette bijection p .

Lemme 2. Il existe une bijection entre \mathbf{R}^2 et $[0, 1[^2$.

Il suffit d'utiliser $q: (x, y) \mapsto (p(x), p(y))$ dont on prouve simplement qu'elle est bijective.

Lemme 3. Il existe une bijection entre $[0, 1[^2$ et $[0, 1[$.

Pour tout nombre x de $[0, 1[$, nous noterons x_0 le premier chiffre de x après la virgule en notation décimale infinie, x_1 le deuxième chiffre... On pourra donc écrire x sous la forme $0, x_0x_1x_2 \dots x_n \dots$

Soit alors $f: [0, 1[^2 \rightarrow [0, 1[$ la fonction définie par $(x, y) \mapsto z$, où z est le nombre dont l'écriture décimale est définie par, pour tout k entier naturel, $z_{2 \cdot k} = x_k$ et $z_{2k+1} = y_k$. En d'autres termes, on a $z = 0, x_0y_0x_1y_1x_2y_2 \dots x_ny_n \dots$. Prouvons que f est une bijection.

injection. Supposons l'existence de (x, y) et (a, b) tels que $f(x, y) = f(a, b)$. Notons $z = f(x, y) = f(a, b)$. Alors, pour tout k dans \mathbf{N} , $z_{2 \cdot k} = x_k$ et $z_{2 \cdot k} = a_k$. Par conséquent, tous les chiffres de x et a sont identiques, c'est-à-dire que $x = a$. De même, on obtient $y = b$. C'est-à-dire $(x, y) = (a, b)$. Par conséquent, f est injective.

surjection. Considérons un nombre z de $[0, 1[$. Soit alors x le nombre de $[0, 1[$ dont l'écriture décimale est définie par, pour tout entier naturel k , $x_k = z_{2 \cdot k}$. Soit de même y nombre de $[0, 1[$ dont l'écriture décimale est définie par, pour tout entier naturel k , $y_k = z_{2 \cdot k+1}$. Alors, par définition de f , on a $f(x, y) = z$. Par conséquent, f est surjective.

La fonction f est donc bien une bijection. Ce qui signifie que $[0, 1[^2$ et $[0, 1[$ sont de même cardinalité.

Conclusion

Considérons la fonction $g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $g: (x, y) \mapsto p^{-1}(f(p(x), p(y)))$. Prouvons que g est une bijection.

injection. Soient (x, y) et (a, b) dans \mathbf{R}^2 tels que $g(a, b) = g(x, y)$. Comme p^{-1} est une bijection, on a aussi $f(p(x), p(y)) = f(p(a), p(b))$. Comme f est une bijection et b est une bijection, on en déduit $x = a$ et $y = b$.

surjection. Soit z dans \mathbf{R} . Comme f^{-1} et p sont des bijections, on peut trouver x et y tels que $(p(x), p(y)) = f^{-1}(p(z))$. Alors, $g(x, y) = z$.

Nous avons donc bien prouvé que g est une bijection.

En d'autres termes, il existe une bijection entre \mathbf{R}^2 et \mathbf{R} .

CQFD

Note Je vous ai mis la preuve complète mais je me serais satisfait du Lemme 3.