

# MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE

## ORDRES ET ÉQUIVALENCES

Si  $E$  est un ensemble, on note

- $\emptyset_E$  la relation vide, définie par  $\forall e, e', (e, e') \notin \emptyset_E$
- $\text{Id}_E$  la relation identité, définie par  $\{(e, e)/e \in E\}$
- $\Pi_E$  la relation pleine, définie comme  $E \times E$ .

**Exercice 1.** Ces relations sont-elles transitives ? Symétriques ? Antisymétriques ? Réflexives ?

**Exercice 2.** Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. On note  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  le quotient de  $\mathbf{Z}$  par la relation "avoir le même diviseur modulo  $n$ ". Montrer que  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  est un groupe pour l'addition et un monoïde pour la multiplication.

**Exercice 3.** Montrer que l'intersection de deux relations d'équivalence est une relation d'équivalence.

**Définition 1.** Soient  $(E_1, \leq_1)$  et  $(E_2, \leq_2)$  deux ensembles munis de relations d'ordre. On définit l'ordre lexicographique  $\preceq$  sur  $E_1 \times E_2$  par " $(a, b) \preceq (a', b')$  si et seulement si  $a \leq_1 a' \vee (a = a' \wedge b \leq_2 b')$ ". On définit aussi l'ordre produit  $\leq$  sur  $E_1 \times E_2$  par " $(a, b) \leq (a', b')$  si et seulement si  $a \leq_1 a'$  et  $b \leq_2 b'$ ". Si nécessaire, on généralise ces définitions à  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ .

Notez qu'il n'y a pas de symboles standardisés pour l'ordre lexicographique ou l'ordre produit.

**Exercice 4.** \* Si  $(E, \leq)$  est un ensemble muni d'une relation d'ordre, montrer que l'ordre produit sur  $E^2$  et l'ordre lexicographique sur  $E^2$  sont bien des relations d'ordre.

**Exercice 5.** \*\* Rappeler le principe de récurrence. En partant du théorème d'induction et du fait que  $(\mathbf{N}, \leq)$  est un ensemble bien ordonné, prouver le principe habituel de récurrence.

**Exercice 6.** \*\* Commenter la démonstration suivante :

**Proposition** Dans tout groupe de  $n$  personnes, tous les gens ont le même âge.

**Preuve** Notons, pour tout  $n$ ,  $P_n$  la proposition "Dans tout groupe de  $n$  personnes, tous les gens ont le même âge". Prouvons par récurrence sur  $n$  que  $P_n$  est toujours vrai.

- $P_1$  Trivial.
- $P_n \implies P_{n+1}$  ? Soit  $n$  tel que  $P_n$  soit vrai. Numérotons les individus 1, 2...  $n$ . Soient alors  $G$  le groupe composé des individus 1, 2...  $n - 1$  et  $H$  le groupe composé des individus 2, ...,  $n$ . D'après  $P_n$ , comme  $G$  est un groupe de  $n$  individus, tous les individus de  $G$  ont le même âge. De même, tous les individus de  $H$  ont le même âge. Comme la personne 2 est à la fois dans  $G$  et dans  $H$ , tous les individus de  $G$  et tous les individus de  $H$  ont le même âge que cette personne 2. Ce qui prouve le cas.

## Corrections

**Exercice 6.** Soit  $E$  un ensemble. Dans  $\mathcal{P}(E)$ , l'union est-elle associative ? Commutative ? Admet-elle un élément neutre ? Quid de l'intersection ? Quid de la différence symétrique ?

### Union

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois parties de  $E$ . Par définition de l'union, nous avons  $A \cup (B \cup C) = \{x \in E/x \in A \vee x \in B \vee x \in C\} = (A \cup B) \cup C$ . Nous avons donc  $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ ,  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ , c'est-à-dire, par définition de l'associativité, l'union est associative sur  $\mathcal{P}(E)$ .

Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . Par définition de l'union, nous avons alors  $A \cup B = \{x \in E/x \in A \vee x \in B\} = B \cup A$ . Nous avons donc  $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$ ,  $A \cup B = B \cup A$ , c'est-à-dire, par définition de la commutativité, l'union est commutative sur  $\mathcal{P}(E)$ .

Soit  $A$  une partie de  $E$ . Nous avons alors  $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$ . Nous avons donc  $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$  et  $\forall A \in \mathcal{P}(E)$ ,  $A \cup \emptyset = A$ , c'est-à-dire, par définition d'un élément neutre, *l'union admet l'ensemble vide comme élément neutre sur  $\mathcal{P}(E)$ .*

### Intersection

Les preuves sont essentiellement identiques. L'intersection est associative, commutative et admet comme élément neutre  $E$ .

### Différence symétrique

Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . Par définition de la différence symétrique, nous avons  $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . Comme l'union et l'intersection sont commutatives, nous en déduisons  $A\Delta B = (B \cup A) \setminus (B \cap A)$ , c'est-à-dire  $A\Delta B = B\Delta A$ . *La différence symétrique est donc commutative sur  $\mathcal{P}(E)$ .*

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  deux parties de  $E$ . Soit  $x$  dans  $E$ . Les positions possibles de  $x$  par rapport à  $A$ ,  $B$  et  $C$  déterminent huit combinaisons, résumées dans le tableau suivant

Hypothèses			Dédutions			
$x \in A?$	$x \in B?$	$x \in C?$	$x \in A\Delta B?$	$x \in (A\Delta B)\Delta C?$	$x \in B\Delta C?$	$x \in A\Delta(B\Delta C)?$
Oui	Oui	Oui	Non	Oui	Non	Oui
Oui	Oui	Non	Non	Non	Oui	Non
Oui	Non	Oui	Oui	Non	Oui	Non
Oui	Non	Non	Oui	Oui	Non	Oui
Non	Oui	Oui	Oui	Non	Non	Non
Non	Oui	Non	Oui	Oui	Oui	Oui
Non	Non	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
Non	Non	Non	Non	Non	Non	Non

Après avoir étudié les 8 cas, nous remarquons que  $x \in A\Delta(B\Delta C)$  si et seulement si  $x \in (A\Delta B)\Delta C$ . En d'autres termes,  $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ , c'est-à-dire que *la différence symétrique est associative.*

Enfin, remarquons que, pour tout  $A$  partie de  $E$ , nous avons  $A\Delta E = E\Delta A = A$ . En d'autres termes, *la différence symétrique admet comme élément neutre  $E$ .*

**Exercice 7.** Soit  $\mathcal{R}$  une relation sur  $E$ . Prouver que  $\mathcal{R}^*$  est transitive. On admettra que, pour tout  $i$ ,  $\mathcal{R}^{i+j} = \mathcal{R}^i \cdot \mathcal{R}^j$ .

**Note** Nous poserons  $\mathcal{R}^0 = \text{Id}_E = \{(x, x) / x \in E\}$ .

Considérons trois éléments  $x$ ,  $y$  et  $z$  de  $E$  tels que  $(x, y) \in \mathcal{R}^*$  et  $(y, z) \in \mathcal{R}^*$ . Par définition,  $\mathcal{R}^* = \cup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{R}^i$ . Par conséquent, et par définition de l'union, il existe  $i$  et  $j$  dans  $\mathbb{N}$  tels que  $(x, y) \in \mathcal{R}^i$  et  $(y, z) \in \mathcal{R}^j$ . Par définition de la composition de relations, nous en déduisons que  $(x, z) \in \mathcal{R}^i \cdot \mathcal{R}^j$ . Comme nous admettons que  $\mathcal{R}^i \cdot \mathcal{R}^j = \mathcal{R}^{i+j}$ , nous avons donc  $(x, z) \in \mathcal{R}^{i+j}$ . A fortiori, nous avons  $(x, z) \in \cup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{R}^k = \mathcal{R}^*$ . *Nous venons donc de prouver la transitivité de  $\mathcal{R}^*$ .*

**Lemme bonus 1** La loi  $\cdot$  de composition de relations est associative.

Soient  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$  trois relations sur  $E$ . Notons  $\mathcal{C} = (\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}') \cdot \mathcal{R}''$  et  $\mathcal{D} = \mathcal{R} \cdot (\mathcal{R}' \cdot \mathcal{R}'')$ . Nous allons montrer que  $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ , c'est-à-dire  $(x, y) \in \mathcal{C} \iff (x, y) \in \mathcal{D}$ .

$\Rightarrow$  Soient  $x$  et  $y$  dans  $E$  tels que  $(x, y) \in \mathcal{C}$ . Alors, par définition de la composition  $\mathcal{C}$ , il existe  $a$  dans  $E$  tel que  $(x, a) \in \mathcal{R} \cdot \mathcal{R}'$  et  $(a, y) \in \mathcal{R}''$ . Par définition de la composition  $\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}'$ , il existe  $b$  dans  $E$  tel que  $(x, b) \in \mathcal{R}$  et  $(b, a) \in \mathcal{R}'$ .

Comme  $(b, a) \in \mathcal{R}'$  et  $(a, y) \in \mathcal{R}''$ , par définition de  $\mathcal{R}' \cdot \mathcal{R}''$ , nous en déduisons que  $(b, y) \in \mathcal{R}' \cdot \mathcal{R}''$ . Comme, de plus,  $(x, b) \in \mathcal{R}$ , par définition de  $\mathcal{D}$ , nous en déduisons que  $(x, y) \in \mathcal{D}$ . Ce qui prouve le cas.

$\Leftarrow$  Le cas est essentiellement identique.

Nous avons prouvé que, pour toutes  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$  relations sur  $E$ ,  $(\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}') \cdot \mathcal{R}'' = \mathcal{R} \cdot (\mathcal{R}' \cdot \mathcal{R}'')$ . En d'autres termes, la loi de composition de relations est associative.

**Lemme bonus 2** La loi  $\cdot$  de composition de relations admet  $\text{Id}_E = \{(x, x) / x \in E\}$  comme élément neutre.

Ce lemme est trivial.

**Lemme bonus 3** Soit  $\mathcal{R}$  une relation sur  $E$ . Alors, pour tout  $i$ ,  $\mathcal{R}^{i+j} = \mathcal{R}^i \cdot \mathcal{R}^j$ .

Soit pour tout  $i$  l'hypothèse  $\mathcal{H}_i$  : "Pour  $j$ , on a  $\mathcal{R}^{i+j} = \mathcal{R}^i \cdot \mathcal{R}^j$ ".

Prouvons  $\mathcal{H}_i$  par récurrence sur  $i$ .

**Initialisation.** Considérons le cas où  $i = 0$ . Soit  $j$  un entier. Nous avons  $\mathcal{R}^{0+j} = \mathcal{R}^j$ . Or, d'après le lemme bonus 2, on a  $\mathcal{R}^j = \mathcal{R}^0 \cdot \mathcal{R}^j$ . Ce qui prouve le cas.

**Hérédité.** Soit  $i$  tel que  $\mathcal{H}_i$  soit vraie. Par définition,  $\mathcal{R}^{i+j+1} = \mathcal{R} \cdot (\mathcal{R}^i \cdot \mathcal{R}^j)$ . D'après le lemme bonus 1, la composition de relations est associative, si bien que  $(\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}^i) \cdot \mathcal{R}^j = \mathcal{R} \cdot (\mathcal{R}^i \cdot \mathcal{R}^j)$ . Or, d'après  $\mathcal{H}_i$ , on a  $\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}^i = \mathcal{R}^{i+1}$ . Par conséquent,  $\mathcal{R}^{i+j+1} = \mathcal{R}^{i+1} \cdot \mathcal{R}^j$ . Ce qui prouve  $\mathcal{H}_{i+1}$ .

Par récurrence, nous avons donc prouvé que  $\mathcal{H}_i$  est toujours vraie. C'est-à-dire *pour tout*  $i$ ,  $\mathcal{R}^{i+j} = \mathcal{R}^i \cdot \mathcal{R}^j$ . CQFD