Mathématiques pour l'informatique
Récapitulatif

Exercice 1. * Considérons l'ensemble $\mathcal{A}$ défini comme $\{1 - \frac{1}{2 \cdot n} / n \in \boldsymbol{N}^*\}$. L'ensemble $\mathcal{A}$ admet-il une borne supérieure dans $\boldsymbol{N}$? Un plus grand élément ? Un majorant ? Pour tout n dans $\boldsymbol{N}^*$, vous pourrez noter $u_n = 1 - \frac{1}{2 \cdot n}$.

Note Cet exercice est assez long mais pas très difficile. Si vous faites attention à ce que vous écrivez, vous devriez y arriver sans trop de mal.

Exercice 2. ** Pour tout nombre réel x, nous noterons $E(x)$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\boldsymbol{R}$ définie par $\forall x, y \in \boldsymbol{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow E(x) = E(y)$.

À quoi ressemble $\boldsymbol{R}/\mathcal{R}$? Prouver que $\boldsymbol{R}/\mathcal{R}$ est dénombrable.

Note Vous n'y arriverez pas si vous ne trouvez pas à quoi ressemble $\boldsymbol{R}/\mathcal{R}$.

Correction du TD 5

Exercice 4 Si $(E, \leq)$ est un ensemble muni d'une relation d'ordre, montrer que l'ordre produit sur E^2 et l'ordre lexicographique sur E^2 sont bien des relations d'ordre.

Considérons $(E, \leq)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre. Considérons l'ordre produit $\trianglelefteq$ sur E^2 et l'ordre lexicographique $\preceq$ sur E^2. Pour chacune de ces deux relations, nous allons essayer de prouver la transitivité, l'antisymétrie et la réflexivité. Pour simplifier les notations, nous noterons $<$ la relation définie par $x < y$ si et seulement si $x \leq y$ et $x \neq y$.

Note Pour simplifier légèrement les choses, nous allons utiliser le fait que $<$ est transitive, comme prouvé à l'exercice 2 de l'examen. On aurait pu s'en passer.

Ordre produit.

Transitivité. Soient a, b, c, d, e et f dans E tels que $(a, b) \trianglelefteq (c, d)$ et $(c, d) \trianglelefteq (e, f)$. Par définition de l'ordre produit, nous avons donc $a \leq c$, $c \leq e$, $b \leq d$ et $d \leq f$. Comme $\leq$ est une relation d'ordre, cette relation est transitive. En particulier, nous en déduisons que $a \leq e$ et $b \leq f$. Par définition de l'ordre produit, cela signifie $(a, b) \trianglelefteq (e, f)$.

Nous venons juste de prouver que $\forall a, b, c, d, e, f \in E, (a, b) \trianglelefteq (c, d) \wedge (c, d) \trianglelefteq (e, f) \Rightarrow (a, b) \trianglelefteq (e, f)$, c'est-à-dire que l'ordre produit est transitif sur E^2.

Antisymétrie. Soient a, b, c et d dans E tels que $(a, b) \trianglelefteq (c, d)$ et $(c, d) \trianglelefteq (a, b)$. Par définition de l'ordre produit, nous avons donc $a \leq c$, $b \leq d$, $c \leq a$ et $d \leq b$. Comme $\leq$ est une relation d'ordre, cette relation est antisymétrique. En particulier, nous en déduisons que $a = c$ et $b = d$, c'est-à-dire $(a, b) = (c, d)$. Nous venons donc de prouver que l'ordre produit est antisymétrique sur E^2.

Réflexivité. Soient a et b dans E. Comme $\leq$ est une relation d'ordre sur E, cette relation est réflexive. Nous avons donc $a \leq a$ et $b \leq b$. Par définition de l'ordre produit, nous avons donc $(a, b) \trianglelefteq (a, b)$. En d'autres termes, pour tout (a, b) dans E^2, nous avons $(a, b) \trianglelefteq (a, b)$. C'est-à-dire, par définition, que l'ordre produit est réflexif sur E^2.

Nous venons de prouver que l'ordre produit est transitif, antisymétrique et réflexif sur E^2. Par définition d'un ordre, cela signifie que *l'ordre produit est bien un ordre sur* E^2.

Ordre lexicographique.

Transitivité. Soient a, b, c, d, e et f dans E tels que $(a, b) \preceq (c, d)$ et $(c, d) \preceq (e, f)$. Par définition de l'ordre lexicographique, nous avons d'une part soit $a < c$, soit $a = c$ et $b \leqslant d$, et d'autre part soir $c < e$, soit $c = e$ et $d \leqslant f$. Considérons tous les cas possibles.

- Si $a < c$ et $c < e$. Comme $<$ est transitive, nous déduisons $a < e$. Par définition de l'ordre lexicographique, nous avons donc $(a, b) \preceq (e, f)$.
- Si $a < c$, $c = e$ et $d \leq f$. Nous avons alors $a < e$. Par définition de l'ordre lexicographique, nous avons donc $(a, b) \preceq (e, f)$.
- Si $a = c$, $b \leq d$, $c = e$ et $d \leq f$. Comme $\leq$ est une relation d'ordre, elle est transitive. Par conséquent, nous déduisons $b \leq f$. Comme, de plus, $a = e$, par définition de l'ordre lexicographique, nous avons donc $(a, b) \preceq (e, f)$.
- Si $a = c$, $b \leq d$ et $c < e$. Nous avons alors $a < e$. Par définition de l'ordre lexicographique, nous avons donc $(a, b) \preceq (e, f)$.

Nous avons donc prouvé que, dans tous les cas, $(a, b) \preceq (e, f)$. En d'autres termes, $\forall a, b, c, d, e, f \in E, (a, b) \preceq (c, d) \wedge (c, d) \preceq (e, f) \Longrightarrow (a, b) \preceq (e, f)$, c'est-à-dire que *l'ordre lexicographique est bien transitif sur* E^2.

Antisymétrie. Soient a, b, c et d dans E tels que $(a, b) \preceq (c, d)$ et $(c, d) \preceq (a, b)$. Par définition de l'ordre lexicographique, nous avons d'une part soit $a < c$, soit $a = c$ et $b \leq d$ et d'autre part, soit $c < a$, soit $c = a$ et $d \leq b$. Considérons tous les cas possibles.

- Si $a < c$ et $c < a$. Alors $a < a$, ce qui est impossible. Nous en déduisons que le cas ne peut se produire.
- Si $a < c$, $c = a$ et $d \leq b$. Alors $a < a$, ce qui est tout aussi impossible. Nous en déduisons que le cas ne peut se produire non plus.
- Si $a = c$, $b \leq d$ et $c < a$. Comme précédemment, ce cas ne peut se produire.
- Si $a = c$, $b \leq d$, $c = a$ et $d \leq b$. Comme $\leq$ est une relation d'ordre, elle est antisymétrique. Comme $b \leq d$ et $d \leq b$, nous avons donc $b = d$. En d'autres termes, $a = c$ et $b = d$, c'est-à-dire $(a, b) = (c, d)$.

Nous venons donc de prouver que, $\forall a, b, c, d \in E, (a, b) \preceq (c, d) \wedge (c, d) \preceq (a, b) \Longrightarrow (a, b) = (c, d)$, c'est-à-dire que *l'ordre lexicographique est bien antisymétrique sur* E^2.

Réflexif. Soient a et b dans E. Comme $a = a$ et $b \leq b$, par définition de l'ordre lexicographique, nous avons $(a, b) \preceq (a, b)$.

Nous venons donc de prouver que $\forall a, b \in E, (a, b) \preceq (a, b)$. En d'autres termes, *l'ordre lexicographique est bien réflexif sur* E^2.

L'ordre lexicographique est donc transitif, antisymétrique et réflexif sur E^2, c'est-à-dire, par définition, que *l'ordre lexicographique est bien un ordre sur* E^2.

CQFD

Exercice 5 Rappeler le principe de récurrence. En partant du théorème d'induction et du fait que $(\boldsymbol{N}, \leqslant)$ est un ensemble bien ordonné, prouver le principe habituel de récurrence.

Théorème 1. ***Récurrence***

Soit $\{\mathcal{P}_n / n \in \boldsymbol{N}\}$ *un ensemble de propositions tel que*

- $\mathcal{P}_0$ *est vraie ;*
- *pour tout* n *dans* $\boldsymbol{N}$, $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$.

Alors pour tout n *dans* $\boldsymbol{N}$, $\mathcal{P}_n$ *est vraie.*

Rappelons au passage le théorème d'induction

Théorème 2. ***Induction***

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble bien ordonné. Soit $\{\mathcal{H}(x)/x \in E\}$ un ensemble de propositions logiques tel que $\forall x \in E, (\forall y \prec x, \mathcal{H}(y)) \Rightarrow \mathcal{H}(x)$.

Alors, pour tout x de E, $\mathcal{H}(x)$ est vérifié.

Note Je ne demandais pas quelque chose d'aussi détaillé.

Pour prouver le théorème de récurrence, considérons un ensemble de propositions $\{\mathcal{P}_n/n \in \boldsymbol{N}\}$ tel que

- $\mathcal{P}_0$ est vraie ;
- pour tout n dans $\boldsymbol{N}$, $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$.

Nous allons chercher à prouver (sans utiliser la récurrence) que, pour tout n dans $\boldsymbol{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Comme $(\boldsymbol{N}, \leqslant)$ est un ensemble bien ordonné, nous pouvons appliquer ce théorème à $\boldsymbol{N}$. Nous obtenons alors “Soit $\{\mathcal{H}_n/n \in \boldsymbol{N}\}$ un ensemble de propositions logiques tel que $\forall n \in \boldsymbol{N}$, $(\forall k < n, \mathcal{H}_k) \Rightarrow \mathcal{H}_n$. Alors, pour tout n de $\boldsymbol{N}$, $\mathcal{H}$_n est vérifié.”

Reste à trouver les bonnes propositions $\{\mathcal{H}_n/n \in \boldsymbol{N}\}$.

Notons pour tout n dans $\boldsymbol{N}$ la proposition $\mathcal{H}_n$ définie $\mathcal{P}_n$. comme $\mathcal{P}_o \wedge \mathcal{P}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}_n$.

Soit alors n dans $\boldsymbol{N}$ tel que $\forall k < n, \mathcal{H}_k$. Deux cas peuvent se présenter :

- Si $n = 0$ alors l'information $\forall k < n, \mathcal{H}_k$ ne nous apporte rien. Cependant, par hypothèse, nous savons que $\mathcal{P}_0$ est vérifiée, c'est-à-dire que $\mathcal{H}_n$ est vérifiée.
- Si $n > 0$ alors, l'information $\forall k < n, \mathcal{H}_k$ nous informe en particulier que $\mathcal{P}_{n-1}$ est vérifiée. Or, par hypothèse, ceci implique que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée, c'est-à-dire que $\mathcal{H}_n$ est vérifiée.

Dans tous les cas, nous avons donc $\mathcal{H}_n$. En d'autres termes, nous venons de prouver que $\forall n \in \boldsymbol{N}, (\forall k < n, \mathcal{H}_k) \Rightarrow \mathcal{H}_n$. Par théorème d'induction, comme $(\boldsymbol{N}, \leqslant)$ est un ensemble bien ordonné, nous en déduisons que pour tout n de $\boldsymbol{N}$, $\mathcal{H}_n$ est vérifié.

En d'autres termes, pour tout n dans $\boldsymbol{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Nous venons donc de prouver que, pour tout ensemble de propositions $\{\mathcal{P}_n/n \in \boldsymbol{N}\}$ tel que

- $\mathcal{P}_0$ est vraie ;
- pour tout n dans $\boldsymbol{N}$, $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$;

alors pour tout n dans $\boldsymbol{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

En d'autres termes, nous venons de prouver la récurrence.

CQFD

Exercice 6 Commenter la démonstration suivante :

Proposition Dans tout groupe de n personnes, tous les gens ont le même âge.

Preuve Notons, pour tout n, P_n la proposition “Dans tout groupe de n personnes, tous les gens ont le même âge”. Prouvons par récurrence sur n que P_n est toujours vrai.

- P_1 Trivial.
- $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$? Soit n tel que P_n soit vrai. Numérotons les individus 1, 2... n. Soient alors G le groupe composé des individus 1,2... $n-1$ et H le groupe composé des individus 2,...,n. D'après P_n, comme G est un groupe de n individus, tous les individus de G ont le même âge. De même, tous les individus de H ont le même âge. Comme la personne 2 est à la fois dans G et dans H, tous les individus de G et tous les individus de H ont le même âge que cette personne 2. Ce qui prouve le cas.

Cette démonstration est, bien entendu, fausse. Pour s'en rendre compte, il suffit de regarder ce qu'elle est supposée prouver.

L'erreur est la suivante : si $\mathcal{P}_1$ est effectivement trivial, la preuve de $\mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ n'est vraie que pour $n \geqslant 2$. En effet, si $n = 1$, la personne 2 n'existe pas ! En d'autres termes, nous avons prouvé que si, dans tout groupe de 2 personnes, tous les gens ont le même âge, alors dans tout groupe de n personnes, tous les gens ont le même âge.

Moralité : faites attention à ce genre d'erreurs dans vos copies.