

# MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE

## INDUCTIONS

Considérons l'ensemble des *entiers de Peano*,  $\mathcal{N}$ , défini par induction par  $\mathcal{N} ::= \text{Zero} \mid S(\mathcal{N})$ , où  $S$  est l'opération appelée « successeur ».

**Exercice 1.** Définir par induction structurelle  $\mathcal{N}_P$ , l'ensemble des entiers de Peano pairs et  $\mathcal{N}_I$ , l'ensemble des entiers de Peano impairs.

**Exercice 2.** Prouver que tout entier de Peano appartient soit à  $P$ , soit à  $I$ .

**Exercice 3.** Que pensez-vous de la proposition suivante ?

**Proposition 1.** *Considérons  $n$  pièces de monnaie avec  $n \geq 2$ , d'apparence identique, mais dont une est fautive et a un poids inférieur. Il suffit d'une seule pesée sur une balance à 2 plateaux pour trouver quelle est la fautive pièce.*

**Preuve** Par récurrence sur  $n$ . Posons  $P_n$  l'énoncé de cette proposition.

- Si  $n = 2$ , trivial.
- Soit  $n$  tel que  $P_n$  soit vrai. Considérons maintenant  $n + 1$  pièces dont une fautive. Mettons à part une des pièces. Restent  $n$  pièces. D'après  $P_n$ , s'il y a une fautive pièce parmi ces  $n$ , nous pouvons la trouver en une pesée. Dans le cas contraire, c'est la pièce que nous avons mise à part. Nous avons donc effectué exactement une pesée, ce qui prouve le cas.

Nous avons donc prouvé par récurrence que  $\forall n \geq 2, P_n$ .

Considérons, en OCaml, la définition suivante pour les entiers de Peano :

```
type peano = Zero
          | S of peano
```

**Exercice 4.** Sans utiliser =, comment comparer deux entiers de Peano en OCaml ?

**Exercice 5.** \* À l'aide de OCaml, définir et implanter l'addition de deux entiers de Peano.

**Exercice 6.** \* À l'aide de plusieurs ensembles définis par induction structurelle, essayez de définir un ensemble contenant, en gros, du français. Vous pourrez vous inspirer des fiches d'analyse grammaticale de [http://grammaire.reverso.net/index\\_alpha/Fiches/Fiche31.htm](http://grammaire.reverso.net/index_alpha/Fiches/Fiche31.htm).

N'essayez pas de faire quelque chose de parfait, ce sujet de recherche reste ouvert...

—

## Corrigé du TD 6

**Exercice 1.** Considérons l'ensemble  $\mathcal{A}$  défini comme  $\{1 - \frac{1}{2 \cdot n} / n \in \mathbf{N}^*\}$ . L'ensemble  $\mathcal{A}$  admet-il une borne supérieure dans  $\mathbf{N}$  ? Un plus grand élément ? Un majorant ? Pour tout  $n$  dans  $\mathbf{N}^*$ , vous pourrez noter  $u_n = 1 - \frac{1}{2 \cdot n}$ .

**Majorant** Pour tout  $n$ ,  $u_n \leq 1$ . En d'autres termes,  $\mathcal{A}$  ne contient aucun élément supérieur ou égal à 1. Par conséquent,  $\mathcal{A}$  admet au moins un majorant : 1.

**Plus grand élément** Aucun élément de  $\mathcal{A}$  n'est dans  $\mathbf{N}$ . Par conséquent,  $\mathcal{A}$  ne peut pas admettre de plus grand élément dans  $\mathbf{N}$ .

**Borne supérieure** Prouvons que 1 est la borne supérieure de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathbf{N}$ .

- Comme précédemment, nous avons  $\forall x \in \mathcal{A}, x \leq 1$ .

- Soit maintenant  $y$  dans  $\mathbf{N}$  tel que  $\forall x \in A, x \leq y$ . En particulier, on a donc  $\frac{1}{2} \leq y$ . Comme  $y$  est un entier, nous avons donc  $1 \leq y$ .

Par définition de la borne supérieure, nous venons donc de prouver que 1 est la borne supérieure de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathbf{N}$ .

**Exercice 2.** Pour tout nombre réel  $x$ , nous noterons  $E(x)$  la partie entière de  $x$ , c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ . Soit  $\mathcal{R}$  la relation sur  $\mathbf{R}$  définie par  $\forall x, y \in \mathbf{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow E(x) = E(y)$ .

À quoi ressemble  $\mathbf{R}/\mathcal{R}$  ? Prouver que  $\mathbf{R}/\mathcal{R}$  est dénombrable.

Rappelons que  $\mathbf{R}/\mathcal{R}$  est l'ensemble des classes d'équivalence par la relation  $\mathcal{R}$ , c'est-à-dire  $\{\{y \in \mathbf{R}/x\mathcal{R}y\} / x \in \mathbf{R}\}$ . Comme deux réels de même partie entière auront exactement la même classe d'équivalence, on peut réécrire cela  $\{\{y \in \mathbf{R}/x\mathcal{R}y\} / x \in \mathbf{Z}\}$ , ou encore  $\{[x, x+1[ / x \in \mathbf{Z}\}$  – insistons sur le fait qu'il s'agit d'un ensemble de segments et non pas de l'union de ces segments.

Pour prouver que  $\mathbf{R}/\mathcal{R}$  est dénombrable, prouvons qu'il existe une bijection entre  $\mathbf{R}/\mathcal{R}$  et  $\mathbf{Z}$ . Pour ce faire, définissons la fonction  $f: \mathbf{R}/\mathcal{R} \rightarrow \mathbf{Z}$  par  $\forall x \in \mathbf{Z}, f([x, x+1[) = x$  et prouvons que  $f$  est une bijection.

**Injection** Soient  $a$  et  $b$  dans  $\mathbf{R}/\mathcal{R}$  tels que  $f(a) = f(b)$ . Par définition de  $\mathbf{R}/\mathcal{R}$ , nous pouvons trouver  $x$  et  $y$  dans  $\mathbf{Z}$  tels que  $a = [x, x+1[$  et  $b = [y, y+1[$ . Or, par définition de  $f$ , nous avons alors  $f(a) = x$  et  $f(b) = y$ . Comme  $f(a) = f(b)$ , nous en déduisons  $x = y$  et donc  $a = b$ .

Nous avons donc de prouvé que  $\forall a, b \in \mathbf{R}/\mathcal{R}, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ , c'est-à-dire  $f$  est injective.

**Surjection** Soit  $z$  dans  $\mathbf{Z}$ . Alors, par définition,  $[z, z+1[$  appartient à  $\mathbf{R}/\mathcal{R}$  et  $f([z, z+1[) = z$ . En d'autres termes,  $\forall z \in \mathbf{Z}, \exists x \in \mathbf{R}/\mathcal{R}, f(x) = z$ , c'est-à-dire que  $f$  est surjective.

Nous venons donc de prouver que  $f$  est injective et surjective, c'est-à-dire que  $f$  est bijective. Par conséquent, il existe une bijection entre  $\mathbf{R}/\mathcal{R}$  et un ensemble dénombrable, c'est-à-dire que  $\mathbf{R}/\mathcal{R}$  est un ensemble dénombrable.

CQFD