

MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE

ENCORE DE L'INDUCTION

Pour tout ce qui suit, on appellera A l'ensemble des arbres binaires, défini par induction par

$$A ::= \begin{array}{l} \text{Feuille}(i) \quad i \in \mathbf{N} \\ | \\ \text{Noeud}(A, A) \end{array}$$

Exercice 1. Définir par induction les fonctions $h: A \rightarrow \mathbf{N}$, $f: A \rightarrow \mathbf{N}$ et $n: A \rightarrow \mathbf{N}$ qui, à tout arbre binaire associent respectivement sa hauteur, son nombre de feuilles et son nombre de nœuds. La hauteur d'un arbre réduit à une feuille est 0.

Définition 1. Un arbre binaire est dit équilibré si, pour chaque nœud $\text{Noeud}(g, d)$ de l'arbre, on a $|h(g) - h(d)| \leq 1$.

Exercice 2. Définir par induction l'ensemble AVL des arbres binaires équilibrés.

Exercice 3. On définit la suite u par

- $u_0 = 0$
- $u_1 = 1$
- $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Prouver que, pour tout arbre équilibré a , on a $u_{h(a)} \leq n(a)$.

Exercice 4. * Considérons le sous-ensemble E de \mathbf{N}^2 défini par induction comme

$$E ::= \begin{array}{l} (0, 0) \\ | \\ (0, 1) \\ | \\ f(E, E) \\ | \\ g(E) \end{array}$$

où

- $f: \mathbf{N}^2 \times \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}^2$ est définie par $\forall (m, n) \in \mathbf{N}^2, \forall (m', n') \in \mathbf{N}^2, f((m, n), (m', n')) = (m + m', n + n')$;
- $g: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ est définie par $\forall (m, n) \in \mathbf{N}^2, g(m, n) = (n, m)$.

Prouver que $E = \mathbf{N}^2$. Prouver que cette définition est ambiguë.

Exercice 5. ** Considérons le sous-ensemble E de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ défini par induction à l'aide des bases $\mathcal{B} = \{(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^* / m < n\}$ et des opérateurs d'induction $\mathcal{I} = \{(m, n) \mapsto (m + n, n)\}$.

Montrer que $E = \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$.

Montrer que cette définition n'est pas ambiguë !

Correction du TD 7

Exercice 2. Prouver que tout entier de Peano appartient soit à \mathcal{N}_P , soit à \mathcal{N}_I .

Rappelons que l'ensemble des entiers de Peano \mathcal{N} est défini par $\mathcal{N} ::= \begin{array}{l} \text{Zero} \\ | \\ S(\mathcal{N}) \end{array}$. On aura de même les entiers pairs $\mathcal{N}_P ::= \begin{array}{l} \text{Zero} \\ | \\ S(S(\mathcal{N}_P)) \end{array}$ et les entiers impairs $\mathcal{N}_I ::= \begin{array}{l} S(\text{Zero}) \\ | \\ S(S(\mathcal{N}_I)) \end{array}$.

Considérons pour tout n dans \mathbf{N} la proposition P_n définie comme : "l'entier de Peano $p_n = \underbrace{S(S(S(\dots(S(\text{Zero}))))}_{n \text{ fois}}$ est soit dans \mathcal{N}_P soit dans \mathcal{N}_I ." Nous allons prouver *par récurrence forte* que P_n est vraie pour tout n .

Initialisation. P_0 s'énonce "Zero est soit dans \mathcal{N}_P soit dans \mathcal{N}_I ". Or, par définition de \mathcal{N}_P , nous avons $\text{Zero} \in \mathcal{N}_P$, ce qui prouve le cas.

Hérédité. Soit n tel que, pour tout $k \leq n$, P_k soit vrai. Considérons alors P_{n+1} .

- Si $n = 0$, P_1 s'énonce " $S(\text{Zero})$ est soit dans \mathcal{N}_P soit dans \mathcal{N}_I ". Or, par définition de \mathcal{N}_I , nous avons $S(\text{Zero}) \in \mathcal{N}_I$, ce qui prouve le cas.
- Dans le cas contraire, nous pouvons écrire $n = m + 1$ avec $m \geq 0$. Par conséquent, nous avons $p_{n+1} = S(S(p_m))$ avec $m \leq n$. Or, d'après P_m , nous savons que p_m appartient à \mathcal{N}_P ou à \mathcal{N}_I .
 - Si $p_m \in \mathcal{N}_P$, par définition de \mathcal{N}_P , nous avons aussi $S(S(p_m)) \in \mathcal{N}_P$.
 - Si $p_m \in \mathcal{N}_I$, par définition de \mathcal{N}_I , nous avons aussi $S(S(p_m)) \in \mathcal{N}_I$.

En d'autres termes, p_{n+1} est soit dans \mathcal{N}_P soit dans \mathcal{N}_I , ce qui prouve le cas.

De même, p_{n+1} est soit dans \mathcal{N}_P soit dans \mathcal{N}_I , ce qui prouve le cas.

Par récurrence, nous avons donc prouvé que, pour tout n , p_n est soit dans \mathcal{N}_P soit dans \mathcal{N}_I . En d'autres termes, tout élément de \mathcal{N} qui peut être atteint en appliquant un nombre fini de fois S (le seul opérateur d'induction) à Zero (le seul cas de base) est soit pair soit impair. Comme nous avons vu que tout élément d'un ensemble défini par induction peut être atteint en appliquant un nombre fini de fois les opérateurs d'induction aux cas de base, nous venons de montrer que tout élément de \mathcal{N} appartient soit à \mathcal{N}_P , soit à \mathcal{N}_I .

Exercice 5. À l'aide de OCaml, définir et implanter l'addition de deux entiers de Peano.

Voici une possibilité parmi plusieurs :

```
let rec addition m n = match m with
| Zero -> n                (* 0 + n = n *)
| S m' -> addition m' (S n) (* (m + 1) + n = m + (n + 1) *)
```

Au passage, voici la comparaison

```
let rec comparaison = match (m,n) with
| (Zero, Zero) -> true      (* 0 = 0 *)
| (S m', S n') -> comparaison m' n' (* m'+1 = n'+1 ssi m' = n' *)
| (S _, Zero) | (Zero, S_) -> false (* m'+1 != 0 et n'+1 != 0 *)
```

Exercice 6. À l'aide de plusieurs ensembles définis par induction structurelle, essayez de définir un ensemble contenant, en gros, du français.

Il y a des centaines de réponses possibles à cette question, aucune d'entre elles parfaite. Voici une piste :

```
phrase ::= sujet verbe complément
sujet  ::= nom
        | pronom
        | sujet qualificatif
verbe  ::= ....
complément ::= préposition complément indirect
            | complément direct
```