

Preuve de complétion de la logique des propositions

Proposition 1. *Tout séquent valide est prouvable. En d'autres termes, si $\Gamma \models f$ alors $\Gamma \vdash f$.*

Définition 2. Poids d'une formule.

Si f est une formule, on note $w(f)$ ou "poids de f " la valeur définie de la manière suivante :

- *si f est une proposition, $w(f) = 0$*
- *si f s'écrit $\neg f'$, $w(f) = w(f') + 1$;*
- *si f s'écrit $g \Rightarrow h$, $w(f) = w(g) + w(h) + 2$.*

Définition 3. Poids d'un séquent.

Si Γ, f est un séquent, on note $w(\Gamma, f)$ le poids de ce séquent, défini comme $w(f) + \sum_{g \in \Gamma} w(g)$.

Lemme 4. *Soient Γ et f tels que*

- i. $\Gamma \models f$*
- ii. tous les éléments de Γ soient de la forme p_i ou $\neg p_i$, avec p_i une proposition*
- iii. f soit une proposition p .*

Alors $\Gamma \vdash f$.

Preuve Prouvons par l'absurde que p apparaît dans Γ . Ainsi, supposons que p n'apparaisse pas dans Γ . Il est alors possible de trouver une sémantique \mathcal{S} telle que $\mathcal{S}(\Gamma) = 1$ et $\mathcal{S}(p) = 0$. Or, puisque $\mathcal{S}(p) = 0$, nous avons aussi $\mathcal{S}(f) = 0$. Mais puisque $\mathcal{S}(\Gamma) = 1$, nous avons simultanément $\mathcal{S}(f) = 1$, ce qui est absurde.

Par l'absurde, nous en déduisons que p apparaît bien dans Γ .

Par conséquent, nous pouvons appliquer la règle PAR HYPOTHÈSE pour construire une preuve de $\Gamma \vdash f$.

Lemme 5. *Soient Γ et f tels que*

- i. $\Gamma \models f$*
- ii. tous les éléments de Γ soient de la forme p_i ou $\neg p_i$, avec p_i une proposition*
- iii. f soit de la forme $\neg p$, où p est une proposition.*

Alors $\Gamma \vdash f$.

Preuve Nous prouvons de même que dans le lemme précédent que $\neg p$ apparaît dans Γ et que nous pouvons construire une preuve de $\Gamma \vdash f$ à l'aide de la règle PAR HYPOTHÈSE.

Revenons à notre théorème. Soit, pour tout n , \mathcal{H}_n l'hypothèse "Si (Γ, f) est un séquent dont le poids est inférieur ou égal à n et tel que $\Gamma \models f$ alors $\Gamma \vdash f$ ". Prouvons par récurrence sur n que \mathcal{H} est toujours vraie.

Initialisation Si $n=0$, Γ est composé uniquement de formules et f est une formule. Nous pouvons donc conclure directement d'après le lemme 4.

Héritage Soit n tel que \mathcal{H}_n . Soient Γ et f tels que $\Gamma \models f$. Considérons les différentes structures possibles de f et Γ .

Si f s'écrit $\neg\neg f'$

Alors, par définition de la notion de sémantique, de $\Gamma \models f$ et $f = \neg\neg f'$, nous déduisons que $\Gamma \models f'$. Or, $w(\Gamma, f) = w(\Gamma, f') + 2$. D'après \mathcal{H}_n , comme $\Gamma \models f'$, nous en déduisons de plus qu'il existe une preuve de $\Gamma \vdash f'$.

Par conséquent, nous pouvons appliquer la règle ÉLIMINATION DE LA DOUBLE NÉGATION pour construire une preuve de $\Gamma \vdash f$.

Si f s'écrit $g \implies h$

Nous avons alors $\Gamma \models g \implies h$ et, comme nous l'avons prouvé en classe, $\Gamma, g \models h$. Or le séquent $(\Gamma \cup \{g\}, h)$ est de poids $n - 1$. D'après \mathcal{H}_n , nous pouvons donc déduire qu'il existe une preuve de $\Gamma, g \vdash h$.

Par conséquent, nous pouvons appliquer la règle ÉLIMINATION DE L'IMPLICATION pour construire une preuve de $\Gamma \vdash f$.

Si f s'écrit $\neg(g \implies h)$

Nous avons alors $\Gamma \models \neg(g \implies h)$ et, comme nous l'avons prouvé en classe, $\Gamma, h \models \neg g$. Or, le séquent $(\Gamma \cup \{h\}, \neg g)$ est de poids $n - 1$. D'après \mathcal{H}_n , nous pouvons donc déduire qu'il existe une preuve de $\Gamma, h \vdash \neg g$.

Reste à prouver que nous pouvons en déduire une preuve de $\Gamma \vdash \neg(g \implies h)$.

Si Γ s'écrit $\Gamma', \neg\neg g$

Comme nous l'avons prouvé en classe, nous avons alors $\Gamma', g \models f$. De nouveau, le séquent $(\Gamma' \cup \{g\}, f)$ est de poids inférieur à n . D'après \mathcal{H}_n , nous pouvons donc déduire qu'il existe une preuve de $\Gamma', g \vdash f$.

Reste à prouver que nous pouvons en déduire une preuve de $\Gamma', \neg\neg g \vdash f$.

Si Γ s'écrit $\Gamma', g \implies h$

Considérons alors les séquents $(\Gamma' \cup \{\neg f\}, g)$ et $(\Gamma' \cup \{h\}, f)$. Ces deux séquents sont de poids inférieur à n . D'après \mathcal{H}_n , nous pouvons donc déduire qu'il existe une preuve de $\Gamma', \neg f \vdash g$ et une preuve de $\Gamma', h \vdash f$. Nous pouvons ainsi écrire la preuve suivante :

$$\text{RAA} \frac{\text{MP} \frac{\text{AFF} \frac{\Gamma', \neg f \vdash g \checkmark}{\Gamma', g \implies h, \neg f \vdash g} \quad \text{PH} \frac{\checkmark}{\Gamma', g \implies h, \neg f \vdash g \implies h}}{\Gamma', \neg f \vdash h} \quad \text{ELIM} \Rightarrow \frac{\Gamma', h \vdash f \checkmark}{\Gamma', \neg f \vdash h \implies f}}{\Gamma', \neg f \vdash \neg f} \quad \text{PH} \frac{\checkmark}{\Gamma, \neg f \vdash \neg f}}{\Gamma \vdash f}$$

Si Γ s'écrit $\Gamma', \neg(g \implies h)$

Nous avons alors $\Gamma', g, \neg f \models h$. Or, ce séquent est de poids inférieur à n . D'après \mathcal{H}_n , nous pouvons donc déduire qu'il existe une preuve de $\Gamma', g, \neg h \vdash f$. Nous pouvons ainsi écrire la preuve suivante :

$$\text{RAA} \frac{\text{ELIM} \Rightarrow \frac{\text{AFF} \frac{\Gamma', \neg f, g \vdash h}{\Gamma, \neg f, g \vdash h} \quad \text{PH} \frac{\checkmark}{\Gamma, \neg f \vdash \neg(g \implies h)}}{\Gamma \vdash f}}$$

Cas restants

Dans tous les cas restants, tous les éléments de Γ sont de la forme p_i ou $\neg p_i$, avec p_i une proposition et f est de la forme p ou $\neg p$, avec p une proposition. Nous pouvons donc appliquer les lemmes 4 et 5 et déduire que $\Gamma \vdash f$. Ce qui achève la récurrence.

Par récurrence, nous concluons que pour tout n , \mathcal{H}_n est vraie. Nous venons donc de prouver notre théorème.

□