Mathématiques pour l'Informatique

Vers l'infini

David Teller

13 mars 2009

Jusqu'à présent

Nous avons déjà abordé

Les ensembles Le regroupement de valeurs caractérisées par des critères.

Les fonctions Les traitements et transformations qu'on peut apporter à ces valeurs.

La cardinalité Comment relier, comparer et classer les ensembles.

Jusqu'à présent

Nous avons déjà abordé

Les ensembles Le regroupement de valeurs caractérisées par des critères.

Les fonctions Les traitements et transformations qu'on peut apporter à ces valeurs.

La cardinalité Comment relier, comparer et classer les ensembles.

Pour ce chapitre, nous allons caractériser parler de relations :comment classer les éléments d'ensembles.

Relations

Definition (Relation)

Si E est un ensemble, une *relation* sur E est un sous-ensemble de $E \times E$.

Si $\mathcal{R}$ est une relation, pour signifier que x et y sont liés par $\mathcal{R}$, on notera au choix $(x, y) \in \mathcal{R}$, $\mathcal{R}(x, y)$ ou $x\mathcal{R}y$.

Relations

Definition (Relation)

Si E est un ensemble, une *relation* sur E est un sous-ensemble de $E \times E$.

Si $\mathcal{R}$ est une relation, pour signifier que x et y sont liés par $\mathcal{R}$, on notera au choix $(x, y) \in \mathcal{R}$, $\mathcal{R}(x, y)$ ou $x\mathcal{R}y$.

Exemples

- L'égalité sur E, définie comme $\{(x, x)/x \in E\}$. On note $x = y$ si x et y sont liées par la relation d'égalité.
- L'infériorité sur $\mathbf{N}$. On note $x < h$ si x et y sont liées par la relation d'égalité.
- La divisibilité sur $\mathbf{N}$. On note $p|q$ si q est divisible par p.
- L'adjacence géométrique.
- L'existence d'un chemin entre x et y dans un labyrinthe.

Inversion

Definition (Inversion)

Si $\mathcal{R}$ est une relation, la *relation inverse* $\mathcal{R}^{-1}$ est définie par $x\mathcal{R}^{-1}y \iff y\mathcal{R}x$.

Exemple La relation inverse de l'égalité est l'égalité.
Exemple La relation inverse de $<$ est $>$.

Composition

Definition (Composition)

Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont deux relations sur E, la *relation composée* $\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}'$ est la relation définie par $x\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}'y \iff \exists z/x\mathcal{R}z \wedge z\mathcal{R}'y$.

Exemples

- La relation composée $= \cdot <$ est $<$. De même, la relation composée $< \cdot =$ est $<$.
- Sur $\mathbf{R}$, la relation composée $> \cdot <$ est l'ensemble entier : pour tout x et tout y, il existe z tel que $x > z$ et $z < y$.

Interlude

Exercices

- À quoi ressemble la relation $\leq \cdot \leq$? En d'autres termes, comment peut-on caractériser l'ensemble des (x, y) tels que $x \leq \cdot \leq y$?
- À quoi ressemble la relation $\leq \cdot \geq$?
- À quoi ressemble la relation $\geq \cdot \leq$?

Clôture transitive

Definition (Clôture transitive)

Si $\mathcal{R}$ est une relation sur E, sa *clôture transitive* $\mathcal{R}^*$ est la relation définie par $\mathcal{R}^* = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{R}^n$.

Exemples

- Sur le plan, si $\rightarrow$ est la relation "être à moins d'un centimètre vers la droite", $\rightarrow^*$ est la relation "être à droite".
- Dans un labyrinthe, si $\rightarrow$ est la relation entre deux cases "être juste à côté", $\rightarrow^*$ est la relation "il existe un chemin entre ces deux cases".

Exercice Dans $\mathbf{N}$, si $\rightarrow$ est la relation définie par "$x \rightarrow y$ si et seulement si $y = x + 1$", à quoi ressemble la relation $\rightarrow^*$? Prouvez-le.

Propriétés des relations

Definition

Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation. Alors $\mathcal{R}$ sera dite

- réflexive si, $\forall e, e\mathcal{R}e$;
- symétrique si, $\forall e, f, e\mathcal{R}f \Rightarrow f\mathcal{R}e$;
- antisymétrique si $\forall e, f, e\mathcal{R}f \wedge f\mathcal{R}e \Rightarrow e = f$;
- transitive si $\forall e, f, g, e\mathcal{R}f \wedge f\mathcal{R}g \Rightarrow e\mathcal{R}g$

Questions

Considérons la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbf{N}$ par $m\mathcal{R}n \iff n = m + 1$.
Q Cette relation est-elle réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ? Transitive ?
A Cette relation n'est pas réflexive. Elle n'est pas symétrique. Elle est anti-symétrique (si, si). Elle n'est pas transitive.
Exercice Prouvez tout cela.

Divisibilité

Exercice La relation $|$ de divisibilité sur $\mathbf{N}$ est-elle réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ? Transitive ? Prouvez tout cela.

Clôture bien transitive

Theorem
Si E est un ensemble et $\mathbf{R}$ est une relation sur E, alors $\mathbf{R}^*$ est transitive.

Exercice Prouvez cela.