Universalités des automates cellulaires

N. Ollinger

Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Marseille
CNRS & Université de Provence

Luminy – 2 mai 2006

Jeu de la vie

Règle locale

Jeu de la vie : AC 2D introduit par J. H. Conway en 1970.

Univers : grille infinie de cellules vivantes ou mortes.

Le temps s'écoule à chaque top d'horloge : uniformément, chaque cellule observe les 8 cellules voisines et :

meurt d'isolement si elle a moins de 2 voisines vivantes ;

meurt d'étouffement si elle a plus de 3 voisines vivantes ;

survit si elle a 2 ou 3 voisines vivantes ;

naît si elle a exactement 3 voisines vivantes.

Jeu de la vie

Dynamique

Démonstration

Jeu de la vie
Universalité

Le jeu de la vie possède une dynamique riche et complexe.

On peut même simuler un ordinateur avec le jeu de la vie.

Berlekamp, Conway et Guy. Winning Ways for Your Mathematical Plays.

Jeu de la vie

Universalité

Le jeu de la vie possède une dynamique riche et complexe.

On peut même simuler un ordinateur avec le jeu de la vie.

Berlekamp, Conway et Guy. Winning Ways for Your Mathematical Plays.

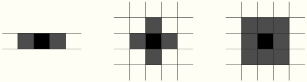
Attention, simuler, c'est plus compliqué qu'il n'y paraît !

Durand, Roka. The Game of Life : Universality Revisited. 1998

Automate cellulaire

Un d-AC $\mathcal{A}$ est un quadruplet $(\mathbb{Z}^d, Q, V, \delta)$ où

- ➡ Q est l'ensemble fini des états de $\mathcal{A}$;
- ➡ $V \subset \mathbb{Z}^d$, de taille k, est le voisinage de $\mathcal{A}$;



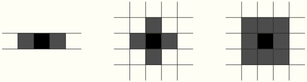
- ➡ $\delta : Q^k \to Q$ est la règle locale de transition de $\mathcal{A}$.

Une configuration est une application de $\mathbb{Z}^d$ dans Q.

Automate cellulaire

Un d-AC $\mathcal{A}$ est un quadruplet $(\mathbb{Z}^d, Q, V, \delta)$ où

- Q est l'ensemble fini des états de $\mathcal{A}$;
- $V \subset \mathbb{Z}^d$, de taille k, est le voisinage de $\mathcal{A}$;



- $\delta : Q^k \to Q$ est la règle locale de transition de $\mathcal{A}$.

Une configuration est une application de $\mathbb{Z}^d$ dans Q.

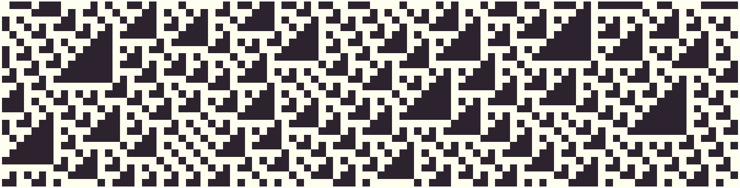
La fonction globale de transition G vérifie :

$$\forall p \in \mathbb{Z}^d, \quad G(C)_p = \delta(C_{p+V_0}, \ldots, C_{p+V_{k-1}}) \quad .$$

Diagrammes espace-temps

Le diagramme espace-temps $\Delta : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N} \to Q$ engendré par la configuration C de $\mathcal{A}$ satisfait :

$$\forall t \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{Z}^d, \quad \Delta(p, t) = G^t(C)_p \quad .$$



exemple : $(\mathbb{Z}, \{\square, \blacksquare\}, \{-1, 0\}, (x, y) \mapsto x \oplus y)$

Caractérisation topologique

Munir $Q^{\mathbb{Z}^d}$ de la topologie de Cantor

topologie produit de la topologie triviale

Le shift de $v \in \mathbb{Z}^d$, σ_v est défini par $\sigma_v(C)_{p+v} = C_p$.

Caractérisation topologique

Munir $Q^{\mathbb{Z}^d}$ de la topologie de Cantor

topologie produit de la topologie triviale

Le shift de $v \in \mathbb{Z}^d$, σ_v est défini par $\sigma_v(C)_{p+v} = C_p$.

Théorème [Hedlund 69]. Une application $G : Q^{\mathbb{Z}^d} \to Q^{\mathbb{Z}^d}$ est la fonction globale d'un AC ssi G est continue et commute avec les shifts de $\mathbb{Z}^d$.

Caractérisation topologique

Munir $Q^{\mathbb{Z}^d}$ de la topologie de Cantor

topologie produit de la topologie triviale

Le shift de $v \in \mathbb{Z}^d$, σ_v est défini par $\sigma_v(C)_{p+v} = C_p$.

Théorème [Hedlund 69]. Une application $G : Q^{\mathbb{Z}^d} \to Q^{\mathbb{Z}^d}$ est la fonction globale d'un AC ssi G est continue et commute avec les shifts de $\mathbb{Z}^d$.

Conséquence. Composer des AC, inverser des AC bijectifs engendre des AC.

Sous-automate

Un AC $\mathcal{A}$ est isomorphe à un AC $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$) s'il existe $\varphi : Q_{\mathcal{A}} \to Q_{\mathcal{B}}$ bijective telle que

$$\overline{\varphi} \circ G_{\mathcal{A}} = G_{\mathcal{B}} \circ \overline{\varphi}$$

Sous-automate

Un AC $\mathcal{A}$ est isomorphe à un AC $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$) s'il existe $\varphi : Q_\mathcal{A} \to Q_\mathcal{B}$ bijective telle que

$$\overline{\varphi} \circ G_\mathcal{A} = G_\mathcal{B} \circ \overline{\varphi}$$

Définition. Un AC $\mathcal{A}$ est un sous-automate d'un AC $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$) s'il existe $\varphi : S_\mathcal{A} \to S_\mathcal{B}$ injective qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "G_\mathcal{A}"'] & \overline{\varphi}(C) \arrow[d, "G_\mathcal{B}"] \\ G_\mathcal{A}(C) \arrow[r, "\varphi"'] & \overline{\varphi}(G_\mathcal{A}(C)) \end{tikzcd}$$

Opérations

Un AC autarcique est un AC de voisinage 0.

Un shift élémentaire σ_v vérifie $\|v\|_1 = 1$.

Opérations

Un AC autarcique est un AC de voisinage 0.

Un shift élémentaire σ_v vérifie $\|v\|_1 = 1$.

La composition de deux AC $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ vérifie

$$G_{\mathcal{A}\circ\mathcal{B}} = G_{\mathcal{A}} \circ G_{\mathcal{B}}$$

Le produit de deux AC $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ vérifie

$$G_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}} = G_{\mathcal{A}} \times G_{\mathcal{B}}$$

Caractérisation combinatoire

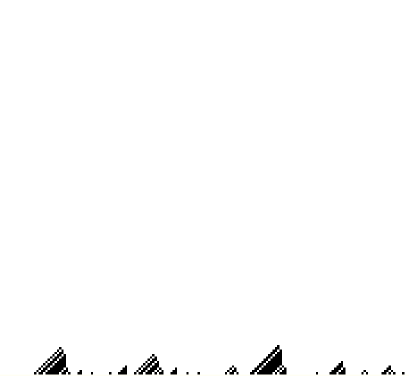
Théorème [NO 02]. L'ensemble des AC est la clôture des AC autarciques et des shifts élémentaires par : composition, produit, sous-automate.

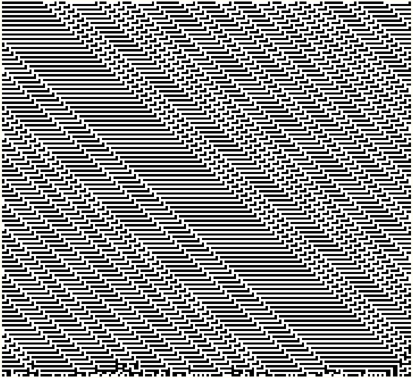
Caractérisation combinatoire

Théorème [NO 02]. L'ensemble des AC est la clôture des AC autarciques et des shifts élémentaires par : composition, produit, sous-automate.

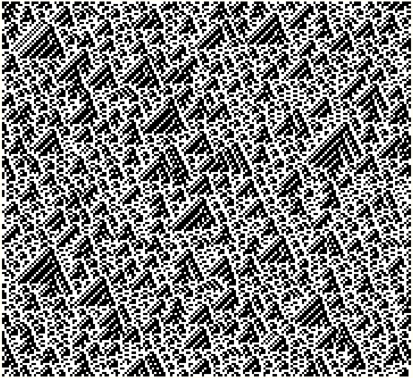
Théorème [NO 02]. L'ensemble des AC bijectifs est la clôture des AC autarciques bijectifs et des shifts élémentaires par : composition, produit, sous-automate.

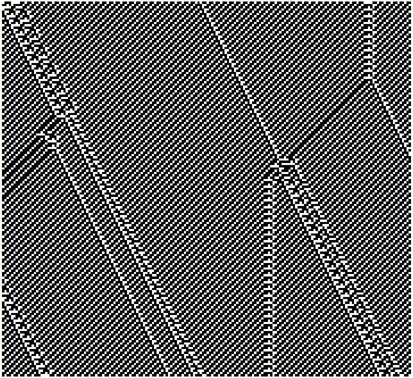
Automates cellulaires simples





Automates cellulaires complexes





Classifications

Nombreuses tentatives de classification :

- **[Wolfram 1984]** Approche expérimentale ;
- **[Culik Yu 1988]** Tentative de formalisation ;
- **[Gilman, Cattaneo, Formenti, Martin]** Approche topologique du chaos ;
- **[Mazoyer, Rapaport, NO 1997, 2002]** Groupage : infinité de classes.

Objectif de l'exposé

Caractériser les AC dont la dynamique est complexe :

- ➡ les diagrammes espace-temps sont compliqués ;
- ➡ on peut calculer avec ces automates.

Remarque. On ne cherche pas des critères récursifs : tout est indécidable ici.

Configurations récursives

Quelles configurations de $Q^{\mathbb{Z}^d}$ manipuler ?

Configurations récursives

Quelles configurations de $Q^{\mathbb{Z}^d}$ manipuler ?

L'ensemble des configurations récursives !

Calculer l'image d'une configuration :

let image delta c p =
delta (c (p-1)) (c p) (c (p+1))

Configurations récursives

Quelles configurations de $Q^{\mathbb{Z}^d}$ manipuler ?

L'ensemble des configurations récursives !

Calculer l'image d'une configuration :

let image delta c p =
delta (c (p-1)) (c p) (c (p+1))

Hélas : c'est une mauvaise idée !

cf. Théorème de Rice

Configurations périodiques

Se restreindre aux configurations périodiques ?

Configurations périodiques

Se restreindre aux configurations périodiques ?

Les AC ne brisent pas les symétries.

Une configuration périodique de taille n devient périodique en temps de période au plus $|Q|^n$.

Pas très intéressant pour calculer...

Configurations ultimement périodiques

Dans cet exposé on s'intéressera aux configurations ultimement périodiques.

$$\exists r \exists v \in \mathbb{Z}^d \quad \forall p \in \mathbb{Z}^d \forall b \in \{0,1\}^d$$

$$\|p\|_1 \geq r \Rightarrow C_p = C_{p+\Sigma_{i=1}^d b_i v_i}$$

Configurations ultimement périodiques

Dans cet exposé on s'intéressera aux configurations ultimement périodiques.

$$\exists r \exists v \in \mathbb{Z}^d \quad \forall p \in \mathbb{Z}^d \forall b \in \{0,1\}^d$$

$$\|p\|_1 \geq r \Rightarrow C_p = C_{p+\Sigma_{i=1}^d b_i v_i}$$

L'image par un AC d'une configuration ultimement périodique est ultimement périodique.

En dimension 1, on peut avoir une période différente à gauche et à droite.

Éléments de calculabilité (1/2)

Fonctions partielles calculables de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$?

Remarque. $\mathbb{N}$ et $\Sigma^\star$ sont en bijection.

Éléments de calculabilité (1/2)

Fonctions partielles calculables de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$?

Remarque. $\mathbb{N}$ et $\Sigma^\star$ sont en bijection.

Les machines de Turing φ_n proposent une modélisation idéalisée du calcul mécanique.

...BBBBBabaabBBBBB...

q

Éléments de calculabilité (1/2)

Fonctions partielles calculables de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$?

Remarque. $\mathbb{N}$ et $\Sigma^\star$ sont en bijection.

Les machines de Turing φ_n proposent une modélisation idéalisée du calcul mécanique.

...BBBBBabaabBBBBB...
q

Thèse de Church-Turing. Les fonctions calculables sont exactement celles calculables par les MT.

Éléments de calculabilité (2/2)

Il existe une MT universelle :

$$\forall n \forall i \quad \varphi_U(\langle n, i \rangle) = \varphi_n(i)$$

Éléments de calculabilité (2/2)

Il existe une MT universelle :

$$\forall n \forall i \quad \varphi_U(\langle n, i \rangle) = \varphi_n(i)$$

Conséquence. l'arrêt des MT est indécidable.

diagonalisation à la Cantor

Éléments de calculabilité (2/2)

Il existe une MT universelle :

$$\forall n \forall i \quad \varphi_U(\langle n, i \rangle) = \varphi_n(i)$$

Conséquence. l'arrêt des MT est indécidable.

diagonalisation à la Cantor

Réduction Turing : un problème A se réduit à un problème B s'il existe une fonction calculable qui transforme A en B : $x \in A \leftrightarrow f(x) \in B$.

Éléments de calculabilité (2/2)

Il existe une MT universelle :

$$\forall n \forall i \quad \varphi_U(\langle n, i \rangle) = \varphi_n(i)$$

Conséquence. l'arrêt des MT est indécidable.

diagonalisation à la Cantor

Réduction Turing : un problème A se réduit à un problème B s'il existe une fonction calculable qui transforme A en B : $x \in A \leftrightarrow f(x) \in B$.

Théorème de Rice. Les propriétés des fonctions calculées par les MT sont triviales ou indécidables.

Problème d'accessibilité

AC-ACCESSIBILITÉ. Étant donné un AC $\mathcal{A}$ et deux configurations (ult. pér.) C et C', peut-on atteindre C' à partir de C ($\exists t \quad G_{\mathcal{A}}^t(C) = C'$) ?

Problème d'accessibilité

AC-ACCESSIBILITÉ. Étant donné un AC $\mathcal{A}$ et deux configurations (ult. pér.) C et C', peut-on atteindre C' à partir de C ($\exists t \quad G^t_{\mathcal{A}}(C) = C'$) ?

Ce problème est semi-décidable : on énumère.

Problème d'accessibilité

AC-ACCESSIBILITÉ. Étant donné un AC $\mathcal{A}$ et deux configurations (ult. pér.) C et C', peut-on atteindre C' à partir de C ($\exists t \quad G^t_{\mathcal{A}}(C) = C'$) ?

Ce problème est semi-décidable : on énumère.

AC-ACCESSIBILITÉ est indécidable.

Problème d'accessibilité

AC-ACCESSIBILITÉ. Étant donné un AC $\mathcal{A}$ et deux configurations (ult. pér.) C et C', peut-on atteindre C' à partir de C ($\exists t \quad G_{\mathcal{A}}^t(C) = C'$) ?

Ce problème est semi-décidable : on énumère.

AC-ACCESSIBILITÉ est indécidable.

Que se passe-t-il si on fixe $\mathcal{A}$?

Universalité Turing

Première proposition. Un AC est complexe si son accessibilité est indécidable.

Universalité Turing

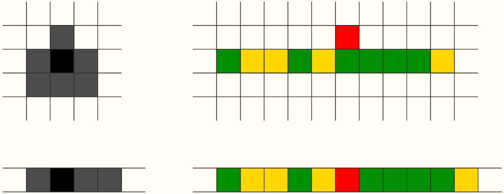
Première proposition. Un AC est complexe si son accessibilité est indécidable.

Comment construire des AC complexes ?

Il suffit de simuler une MT universelle avec un AC !

Simulation de machine de Turing

Simulation pas à pas : en 2D, mais aussi en 1D.

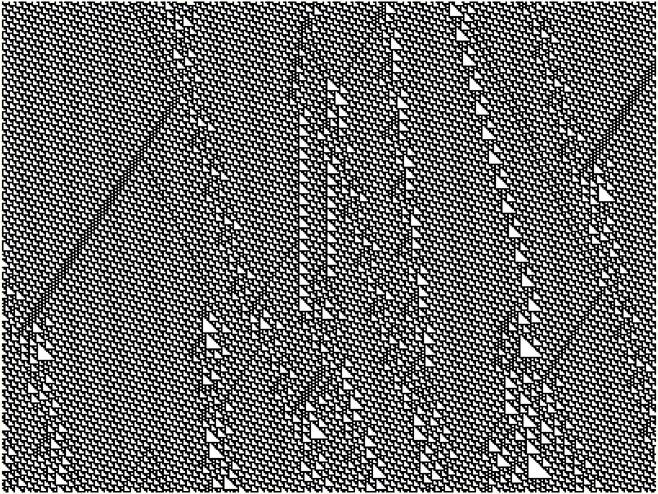


On simule une MT universelle à m symboles et n états par un AC 1D à $m+n$ ou mn états.

Historique

année	auteur	d	k	états
1966	von Neumann	2	5	29
1968	Codd	2	5	8
1970	Conway	2	8	2
1970	Banks	2	5	2
		1	3	18
1971	Smith III	2	7	7
		1	3	18
1987	Albert & Culik II	1	3	14
1990	Lindgren & Nordhal	1	3	7
2002	NO	1	3	6
2002	Cook & Wolfram	1	3	2

Règle 110



Universalité de la règle 110

Régle 110 : AC 1D, deux états, voisinage $\{-1, 0, 1\}$

*let delta x y z = (110 lsr (4*x+2*y+z)) land 1*

Universalité de la règle 110

Régle 110 : AC 1D, deux états, voisinage $\{-1, 0, 1\}$

*let delta x y z = (110 lsr (4*x+2*y+z)) land 1*

Cet automate simule toute MT :

- ➡ 110 simule des Systèmes de Post cycliques ;
- ➡ Post cyclique simule Post ;
- ➡ Systèmes de Post simulent les MT.

Universalité de la règle 110

Régle 110 : AC 1D, deux états, voisinage $\{-1, 0, 1\}$

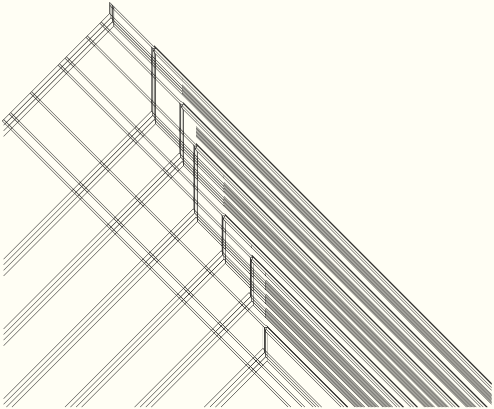
*let delta x y z = (110 lsr (4*x+2*y+z)) land 1*

Cet automate simule toute MT :

- 110 simule des Systèmes de Post cycliques ;
- Post cyclique simule Post ;
- Systèmes de Post simulent les MT.

Pour simuler une machine très simple : des diagrammes de largeur plusieurs centaines de milliers de cellules, autant en hauteur !

Principe de la simulation pour 110



Réflexion

Quels AC caractérise-t-on réellement ?

Réflexion

Quels AC caractérise-t-on réellement ?

Les AC pour lesquels l'accessibilité est indécidable, ceux pour lesquels la seule solution est la simulation.

Réflexion

Quels AC caractérise-t-on réellement ?

Les AC pour lesquels l'accessibilité est indécidable, ceux pour lesquels la seule solution est la simulation.

Combien ça coûte de simuler un AC ?

Simulation polynomiale

Pour connaître l'état de la cellule p à l'instant t :
Calculer récursivement l'état de ses voisines à l'instant $t-1$, jusqu'à l'instant 0. Le nombre de fois où la règle locale est appliqué est polynomial en t (de l'ordre de t^{d+1}).

Simulation polynomiale

Pour connaître l'état de la cellule p à l'instant t : Calculer récursivement l'état de ses voisines à l'instant $t-1$, jusqu'à l'instant 0. Le nombre de fois où la règle locale est appliqué est polynomial en t (de l'ordre de t^{d+1}).

À AC fixé, peut-on faire mieux ? Et dans le pire cas ?

Éléments de complexité (1/2)

On mesure le temps et l'espace de calcul des MT.

Éléments de complexité (1/2)

On mesure le temps et l'espace de calcul des MT.

On définit alors des classes de complexité : P, NP, etc.

Éléments de complexité (1/2)

On mesure le temps et l'espace de calcul des MT.

On définit alors des classes de complexité : P, NP, etc.

Thèse de Church-Turing étendue. Les fonctions calculables en temps polynomial sont exactement celles calculables en temps polynomial par les MT.

Éléments de complexité (2/2)

Notion de réduction entre problèmes (ici many-one logspace).

Éléments de complexité (2/2)

Notion de réduction entre problèmes (ici many-one logspace).

Un problème d'une classe est complet si tout problème de la classe se réduit à ce problème : NP-complétude, P-complétude.

Éléments de complexité (2/2)

Notion de réduction entre problèmes (ici many-one logspace).

Un problème d'une classe est complet si tout problème de la classe se réduit à ce problème : NP-complétude, P-complétude.

Attention au codage !

Problème de prédiction

AC-PRÉDICTION. Étant donné un AC $\mathcal{A}$, une configuration (ult. pér.) C, une position (p, t) dans le diagramme espace-temps et un état q, est-ce que $G_{\mathcal{A}}^{t}(C)_p = q$?

Problème de prédiction

AC-PRÉDICTION. Étant donné un AC $\mathcal{A}$, une configuration (ult. pér.) C, une position (p,t) dans le diagramme espace-temps et un état q, est-ce que $G^t_{\mathcal{A}}(C)_p = q$?

Le problème de prédiction est P-complet pour la réduction logspace many-one.

Problème de prédiction

AC-PRÉDICTION. Étant donné un AC $\mathcal{A}$, une configuration (ult. pér.) C, une position (p, t) dans le diagramme espace-temps et un état q, est-ce que $G^t_{\mathcal{A}}(C)_p = q$?

Le problème de prédiction est P-complet pour la réduction logspace many-one.

Que se passe-t-il si on fixe $\mathcal{A}$?

Simulation efficace de MT

Deuxième proposition. Un AC est complexe si sa prédiction est P-complète.

Simulation efficace de MT

Deuxième proposition. Un AC est complexe si sa prédiction est P-complète.

Comment construire des AC complexes ?

Il suffit de simuler polynomialement une MT universelle !

Évaluation de circuit booléen

Le problème **CIRCUIT-VALUE** est P-complet.

CIRCUIT-VALUE. Étant donné un circuit booléen sans cycle, la sortie s'évalue-t-elle à vrai ?

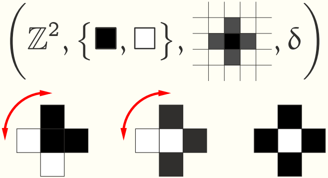
Évaluation de circuit booléen

Le problème **CIRCUIT-VALUE** est P-complet.

CIRCUIT-VALUE. Étant donné un circuit booléen sans cycle, la sortie s'évalue-t-elle à vrai ?

On peut aussi simuler des circuits booléens !

Banks
règle locale

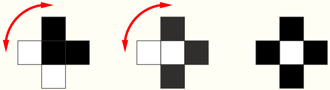


E. R. Banks. Universality in Cellular Automata. 1970

Banks

règle locale

$$\left(\mathbb{Z}^2, \{\blacksquare, \square\}, \quad, \delta\right)$$



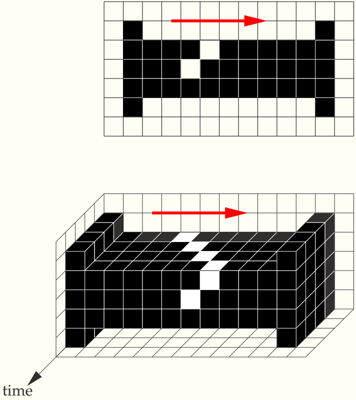
E. R. Banks. Universality in Cellular Automata. 1970

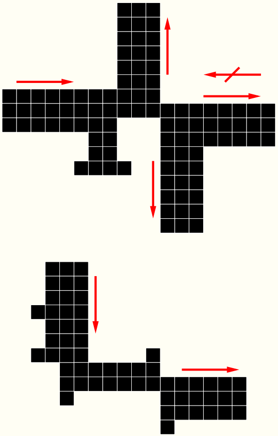
Coder des circuits booléens avec :

- ➡ des fils transportants des signaux binaire ;
- ➡ des portes logiques AND, OR et NOT ;
- ➡ des croisement et duplication de fils.

Banks

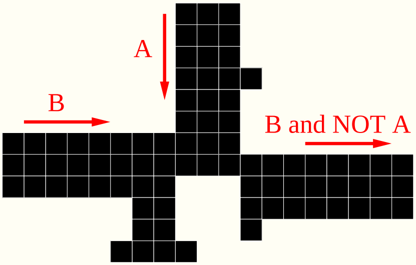
gadgets (1/2)

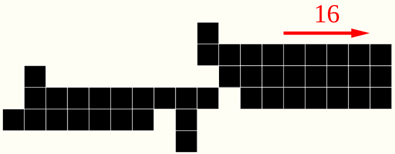




Banks

gadgets (2/2)





Banks
récapitulatif

On dessine un circuit booléen sur le plan, de taille polynomiale en la taille du circuit.

Banks
récapitulatif

On dessine un circuit booléen sur le plan, de taille polynomiale en la taille du circuit.

Le temps de traversé des signaux est linéaire en le nombre de cellules occupées.

Banks

récapitulatif

On dessine un circuit booléen sur le plan, de taille polynomiale en la taille du circuit.

Le temps de traversé des signaux est linéaire en le nombre de cellules occupées.

Si on sait prédire efficacement cet AC on sait calculer **CIRCUIT-VALUE** efficacement.

Banks

récapitulatif

On dessine un circuit booléen sur le plan, de taille polynomiale en la taille du circuit.

Le temps de traversé des signaux est linéaire en le nombre de cellules occupées.

Si on sait prédire efficacement cet AC on sait calculer **CIRCUIT-VALUE** efficacement.

La prédiction de cet AC est P-complète.

Règle 110 et P-complétude

La construction de Cook-Wolfram ne suffit pas !

Règle 110 et P-complétude

La construction de Cook-Wolfram ne suffit pas !

La simulation des MT par des systèmes de Post est inefficace.

Règle 110 et P-complétude

La construction de Cook-Wolfram ne suffit pas !

La simulation des MT par des systèmes de Post est inefficace.

On peut l'améliorer pour montrer que 110 est P-complet !

Neary et Woods, ICALP 2006 (!)

Parallélisme du calcul

Remarque. Il existe des AC dont l'accessibilité est indécidable, la prédiction P-complète mais avec des diagrammes pas tellement compliqués…

Parallélisme du calcul

Remarque. Il existe des AC dont l'accessibilité est indécidable, la prédiction P-complète mais avec des diagrammes pas tellement compliqués...

Les AC sont naturellement massivement parallèles, on ne caractérise pas cette propriété.

...BBBBB a b a a b BBBBB...
.... q . . . .
... ? ? ?>>> . <<< ? ? ? ? ?...

Parallélisme du calcul

Remarque. Il existe des AC dont l'accessibilité est indécidable, la prédiction P-complète mais avec des diagrammes pas tellement compliqués...

Les AC sont naturellement massivement parallèles, on ne caractérise pas cette propriété.

...BBBBB a b a a b BBBBB...
.... q . . . .
... ? ? ?>>>.<<< ? ? ? ? ?...

Comment le prendre en compte ?

Circuits booléens

Les circuits booléens sont intrinsèquement parallèles !

Circuits booléens

Les circuits booléens sont intrinsèquement parallèles !

Troisième proposition. Un AC est complexe s'il peut simuler n'importe quel circuit booléen.

Circuits booléens

Les circuits booléens sont intrinsèquement parallèles !

Troisième proposition. Un AC est complexe s'il peut simuler n'importe quel circuit booléen.

Cette propriété implique l'indécidabilité de l'accessibilité et la P-complètude de la prédiction.

Limitation : définition

Premier problème. Comment définir formellement cette simulation ?

Il faut faire attention au codage (réduction).

Quels sont les éléments nécessaires ?

Limitation : définition

Premier problème. Comment définir formellement cette simulation ?

Il faut faire attention au codage (réduction).

Quels sont les éléments nécessaires ?

On peut raisonner par blocs.

Limitation : 1D

Sérieux problème. Comment simule-t-on des circuits en 1D ?

On ne peut pas faire passer les fils !

Limitation : 1D

Sérieux problème. Comment simule-t-on des circuits en 1D ?

On ne peut pas faire passer les fils !

L'idée des circuits est compromise...

Retour sur les AC

Qu'est-ce qu'un AC :

- ➡ Un réseau régulier de cellule ;
- ➡ Chaque cellule échange son état avec ses voisines ;
- ➡ Chaque cellule calcule son nouvel état ;
- ➡ Tout ceci de manière synchrone et uniforme.

Retour sur les AC

Qu'est-ce qu'un AC :

- ➡ Un réseau régulier de cellule ;
- ➡ Chaque cellule échange son état avec ses voisines ;
- ➡ Chaque cellule calcule son nouvel état ;
- ➡ Tout ceci de manière synchrone et uniforme.

Chaque cellule applique la fonction δ, une fonction d'un ensemble fini dans un ensemble fini.

Retour sur les AC

Qu'est-ce qu'un AC :

- ➡ Un réseau régulier de cellule ;
- ➡ Chaque cellule échange son état avec ses voisines ;
- ➡ Chaque cellule calcule son nouvel état ;
- ➡ Tout ceci de manière synchrone et uniforme.

Chaque cellule applique la fonction δ, une fonction d'un ensemble fini dans un ensemble fini.

La fonction δ est codable par un circuit booléen.

Réflexion

Quatrième proposition. Un AC est complexe s'il peut simuler n'importe quel AC !

Réflexion

Quatrième proposition. Un AC est complexe s'il peut simuler n'importe quel AC !

Cette propriété se définit aussi bien en 1D qu'en 2D.

Réflexion

Quatrième proposition. Un AC est complexe s'il peut simuler n'importe quel AC !

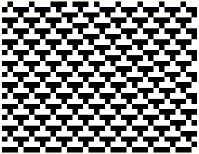
Cette propriété se définit aussi bien en 1D qu'en 2D.

Il est possible d'en donner une définition formelle courte.

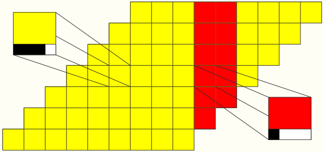
Groupage

Definition. Le $\langle m, n, k\rangle$ découpage de $\mathcal{A}$ est :

$$G_{\mathcal{A}^{\langle m,n,k\rangle}} = \sigma^k \circ o^m \circ G_{\mathcal{A}}^n \circ o^{-m} \ .$$



$\mathcal{A}$

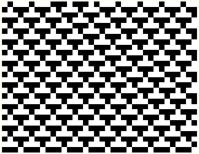


$\mathcal{A}^{\langle 4,4,1\rangle}$

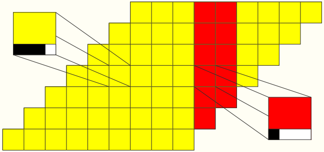
Groupage

Definition. Le $\langle m, n, k \rangle$ découpage de $\mathcal{A}$ est :

$$G_{\mathcal{A}^{\langle m,n,k \rangle}} = \sigma^k \circ o^m \circ G_{\mathcal{A}}^n \circ o^{-m} \ .$$



$\mathcal{A}$



$\mathcal{A}^{\langle 4,4,1 \rangle}$

Definition. $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$ si il existe $\langle m, n, k \rangle$ et $\langle m', n', k' \rangle$ tels que

$$\mathcal{A}^{\langle m,n,k \rangle} \subseteq \mathcal{B}^{\langle m',n',k' \rangle} \ .$$

Universalité intrinsèque

La relation $\leqslant$ est une relation de pré-ordre.

L'ordre induit admet une classe d'équivalence maximale.

Définition. Un AC $\mathcal{A}$ est intrinsèquement universel si :

$$\forall \mathcal{B}, \exists \langle m, n, k \rangle, \quad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^{\langle m,n,k \rangle} \quad .$$

Exemple simple en 1D

On peut construire une machine de Turing multi-tête qui soit intrinsèquement universelle.

La configuration est découpée en macro-cellules, séparées par un symbole #.

Chaque macro-cellule contient la table de transition, l'état et une tête Turing qui se charge de faire les calculs.

Historique

année	auteur	d	k	états
1966	von Neumann	2	5	29
1968	Codd	2	5	8
1970	Conway	2	8	2
1970	Banks	2	5	2
		1	3	18
1987	Albert & Culik II	1	3	14
2002	NO	1	3	6

Ont disparu : Smith III, Lindgren-Nordhal, Cook-Wolfram.

Et avec 2 états ?

Malheureusement, la construction de Cook-Wolfram ne s'adapte pas à l'intrinsèque universalité.

La meilleure construction à ce jour en 1D a 4 états.

(G. Richard, non publié)

Exercice. Montrer que 110 n'est pas intrinsèquement universel... ou bien le contraire...