Pavages :

de l'apériodicité à l'indécidabilité

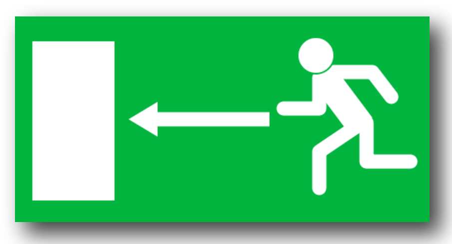
séminaire LIMD, Chambéry, 18 oct 2007

Nicolas Ollinger
équipe Escape, LIF, Marseille

Pavages :

de l'apériodicité à l'indécidabilité

séminaire LIMD, Chambéry, 18 oct 2007



Nicolas Ollinger
équipe Escape, LIF, Marseille

Avant-propos

Nilpotence

Problème de décision **Nil**

Entrée : $f : \Sigma^2 \to \Sigma$ avec Σ fini

Question : $\exists n \in \mathbb{N},\ \ f^n = \text{cste}$?

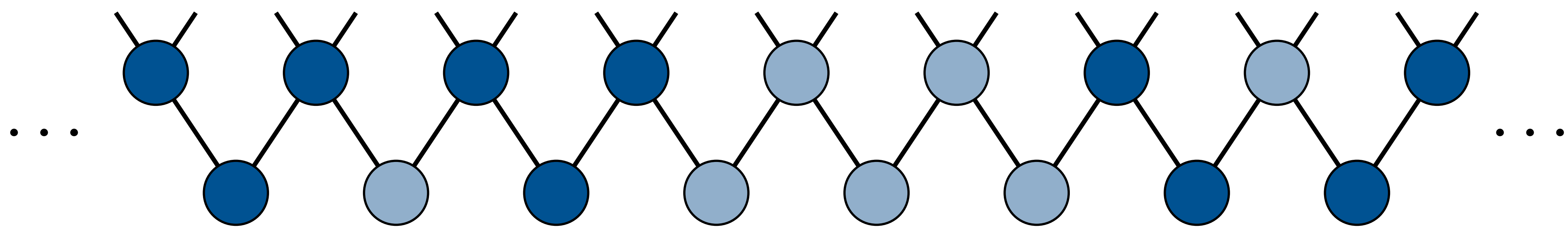
$$\begin{aligned} f^0(u_1) &= u_1 \\ f^n(u_1, \ldots, u_{n+1}) &= f(f^{n-1}(u_1, \ldots, u_n), f^{n-1}(u_2, \ldots, u_{n+1})) \end{aligned}$$

Nil est récursivement énumérable

Automate cellulaire

Associons à f l'automate cellulaire de règle globale F

$$F : \Sigma^{\mathbb{Z}} \to \Sigma^{\mathbb{Z}}$$
$$F(c)(i) = f(c(i), c(i+1))$$



$f \in$ **Nil** ssi $\forall c \exists n \;\; F^n(c) = cste$

Indécidabilité de **Nil**

Jarkko Kari. The Nilpotency Problem of One-Dimensional Cellular Automata. **SIAM J. Comput. 21(3): 571-586 (1992)**

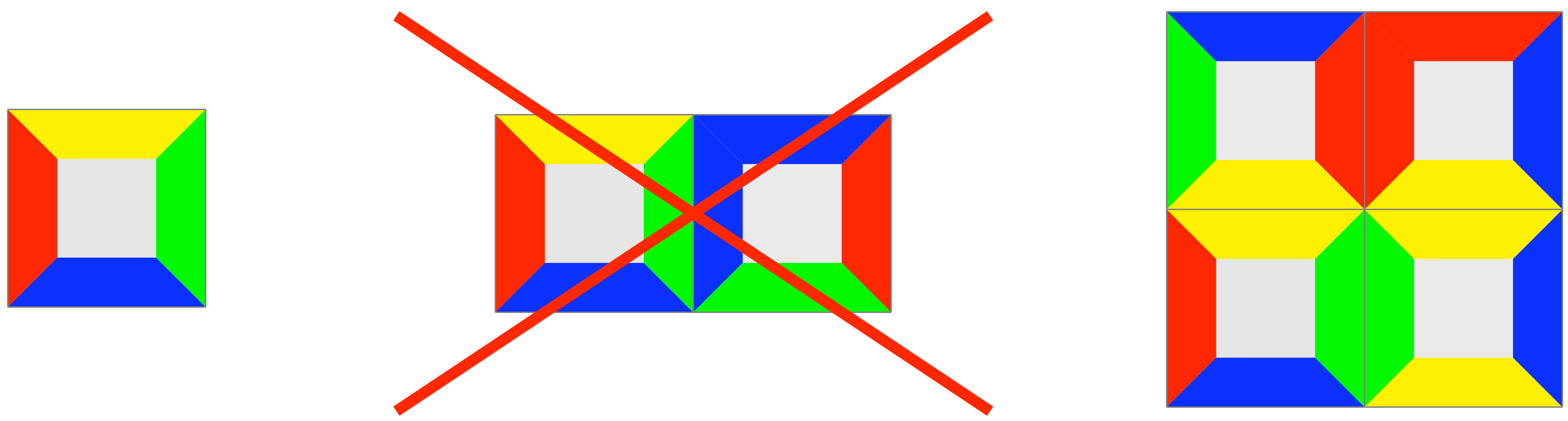
Difficulté : simuler des MT dans toute configuration de sorte que si la MT s'arrête, l'AC est nilpotent.

La démonstration procède par réduction à **DP**

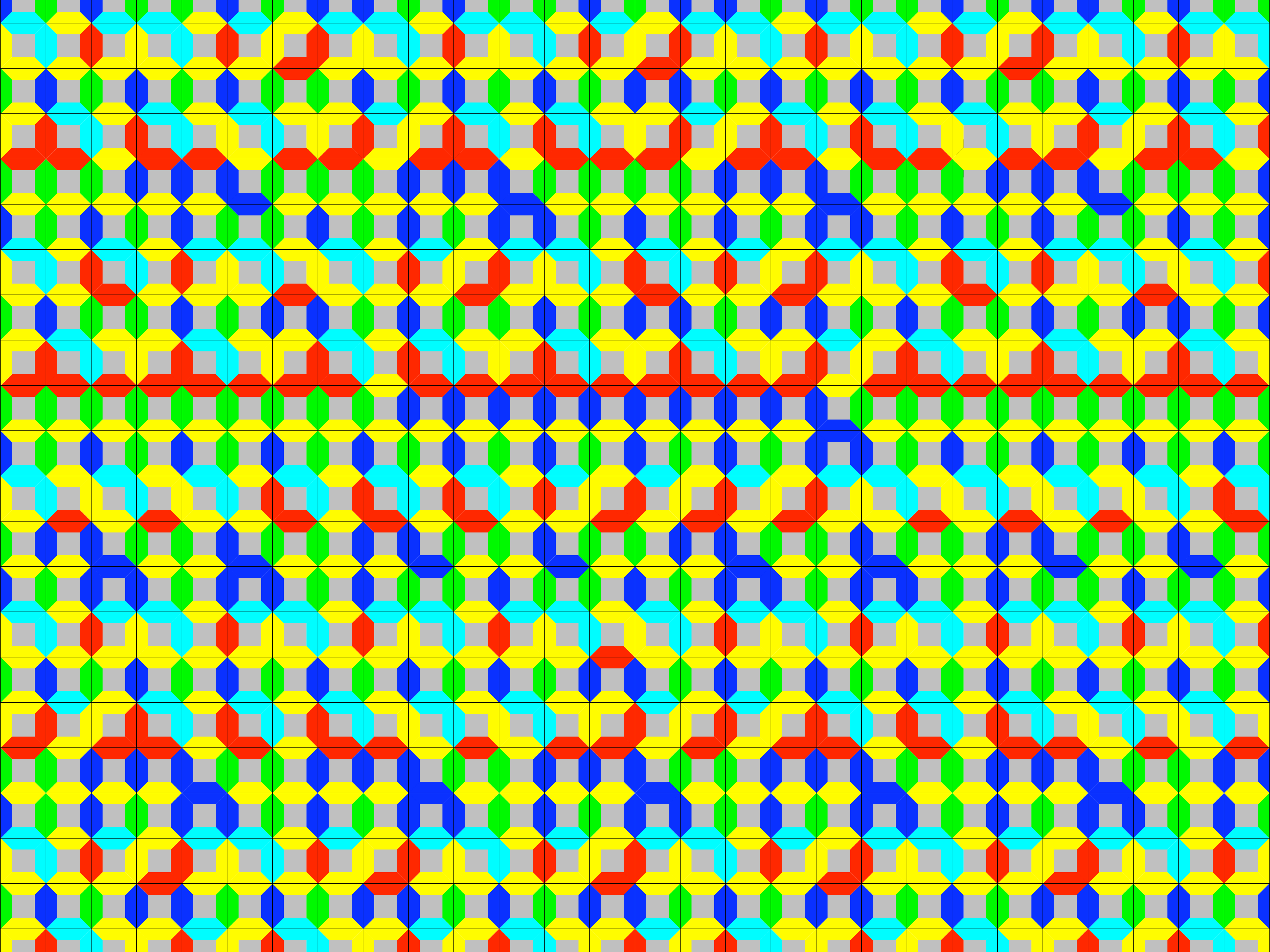
Pavages du plan

Tuiles de Wang

Un jeu de tuiles de Wang est un ensemble de carrés aux côtés colorés $\tau \subseteq C^4$ où C est un ensemble fini de couleurs.



Les tuiles se collent en respectant les couleurs.

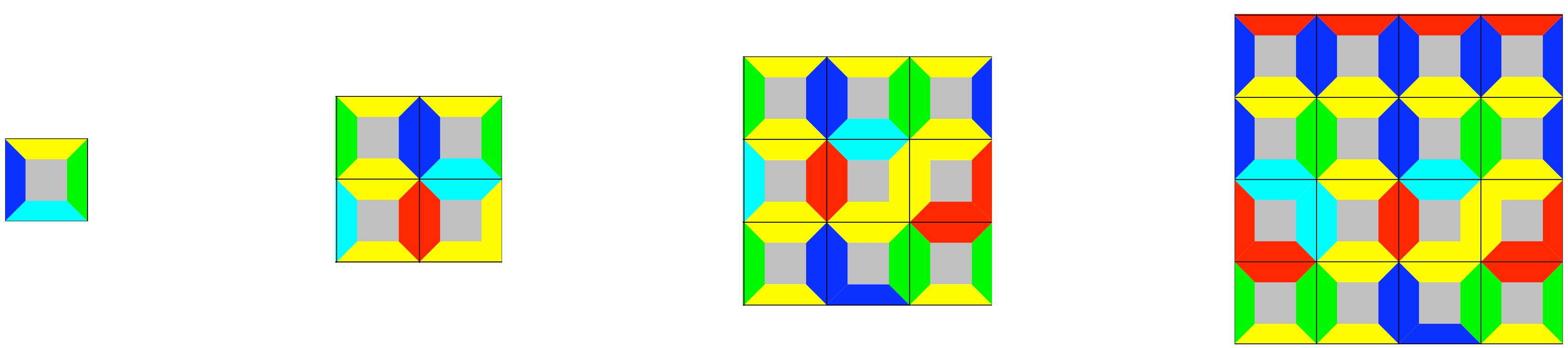


Domino Problem

Problème de décision **DP**

Entrée : $\tau \subseteq C^4$ avec C fini

Question : peut-on paver le plan avec τ ?



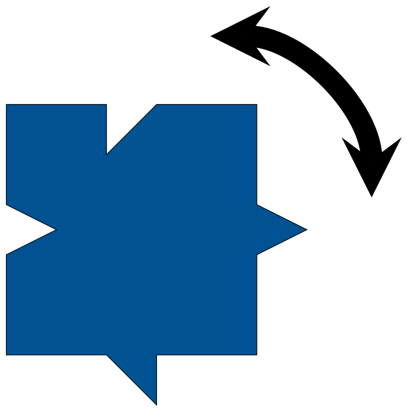
…

DP est co-récursivement énumérable

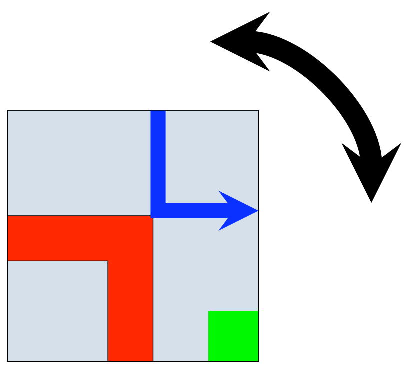
Historique

- **(Hao Wang, 196x)** décidabilité restreintes aux formules AEA.
- Il introduit les jeux de tuiles et le **Domino Problem**.
- Conjecture la décidabilité.

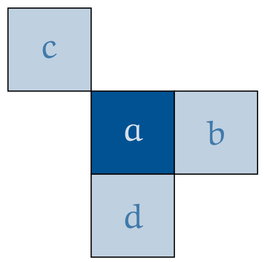
Variation sur les tuiles



Tuiles polygonales à coordonnées rationnelles, rotations des tuiles autorisées.

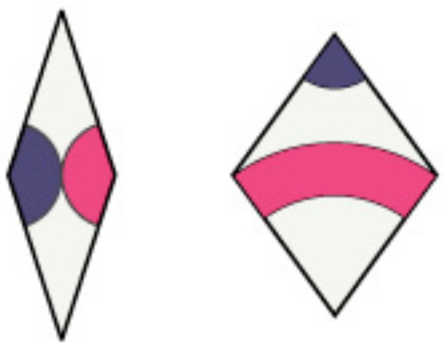


Tuiles carrés avec dessins et flèches, rotations multiples de $\pi/2$ autorisées.

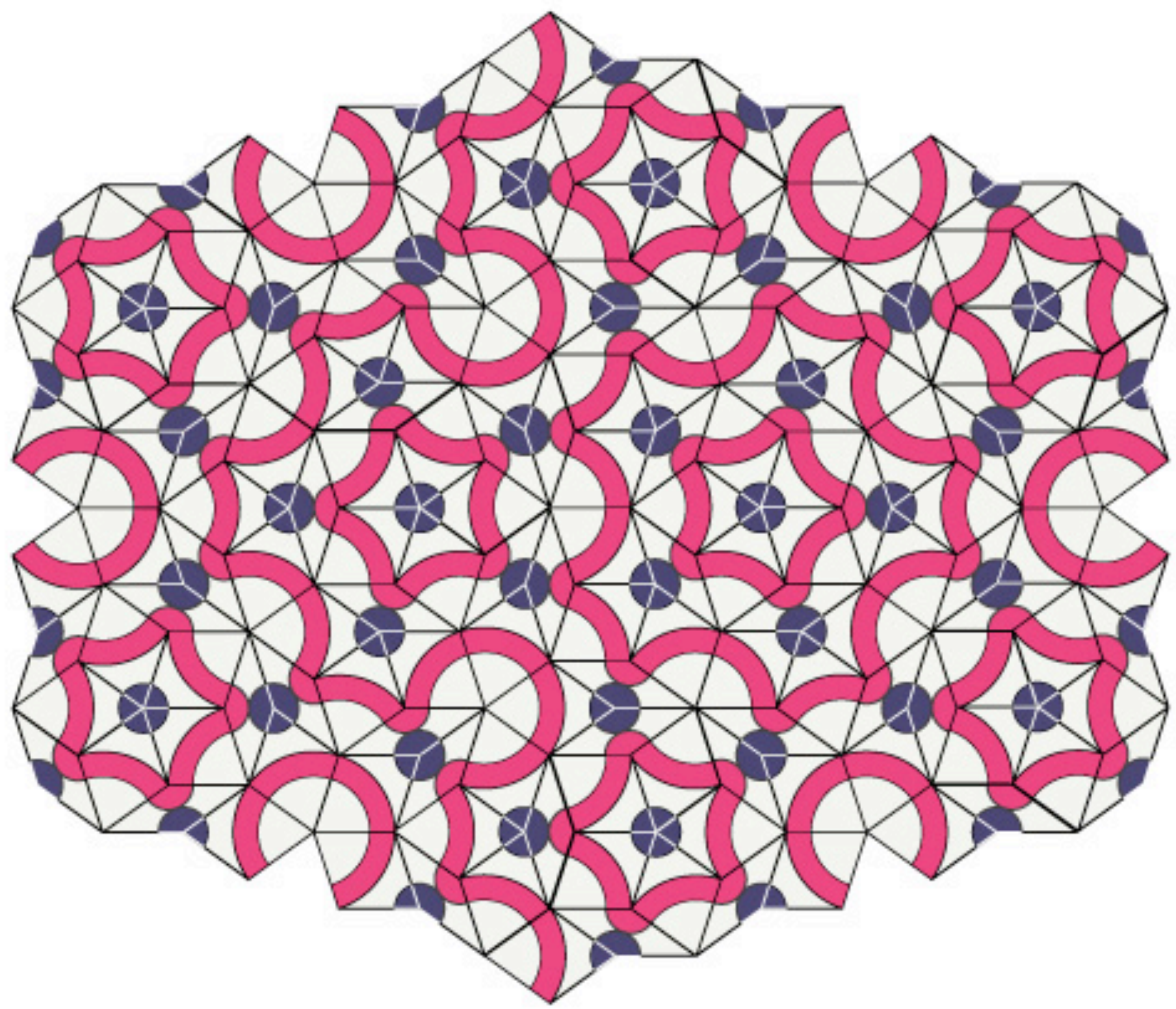


Contrainte locale de pavage, règle locale.

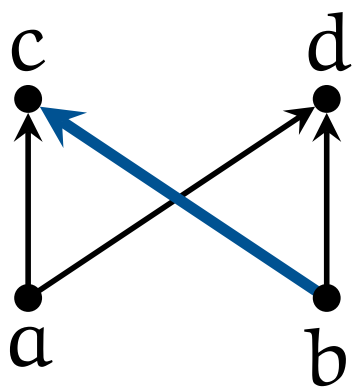
Le cas Penrose



Coordonnées non rationnelles, non recodable trivialement en tuiles de Wang.



Relation domino



Relation domino

Une relation $\mathcal{R} \subseteq \Sigma^2$ vérifiant

$\forall a, b, c, d \in \Sigma^4, a\mathcal{R}b \wedge a\mathcal{R}d \wedge b\mathcal{R}d \longrightarrow b\mathcal{R}c$

$(a, b) \sim_{\mathcal{R}} (c, d)$ si $a\mathcal{R}b \wedge a\mathcal{R}d \wedge b\mathcal{R}d$

couleur droite de $a \in \Sigma$: $|a\rangle$ tel que $\exists b \ \ (a, b) \sim_{\mathcal{R}} |a\rangle$

couleur gauche de $a \in \Sigma$: $\langle a|$ tel que $\exists b \ \ (b, a) \sim_{\mathcal{R}} \langle a|$

on obtient bien $a\mathcal{R}b$ ssi $|a\rangle = \langle b|$

Dans la suite

On mélange allègrement :

- tuiles de Wang ;
- tuiles avec flèches et couleurs ;
- paires de relations domino.

Apériodicité

Pavages périodiques

Périodicité

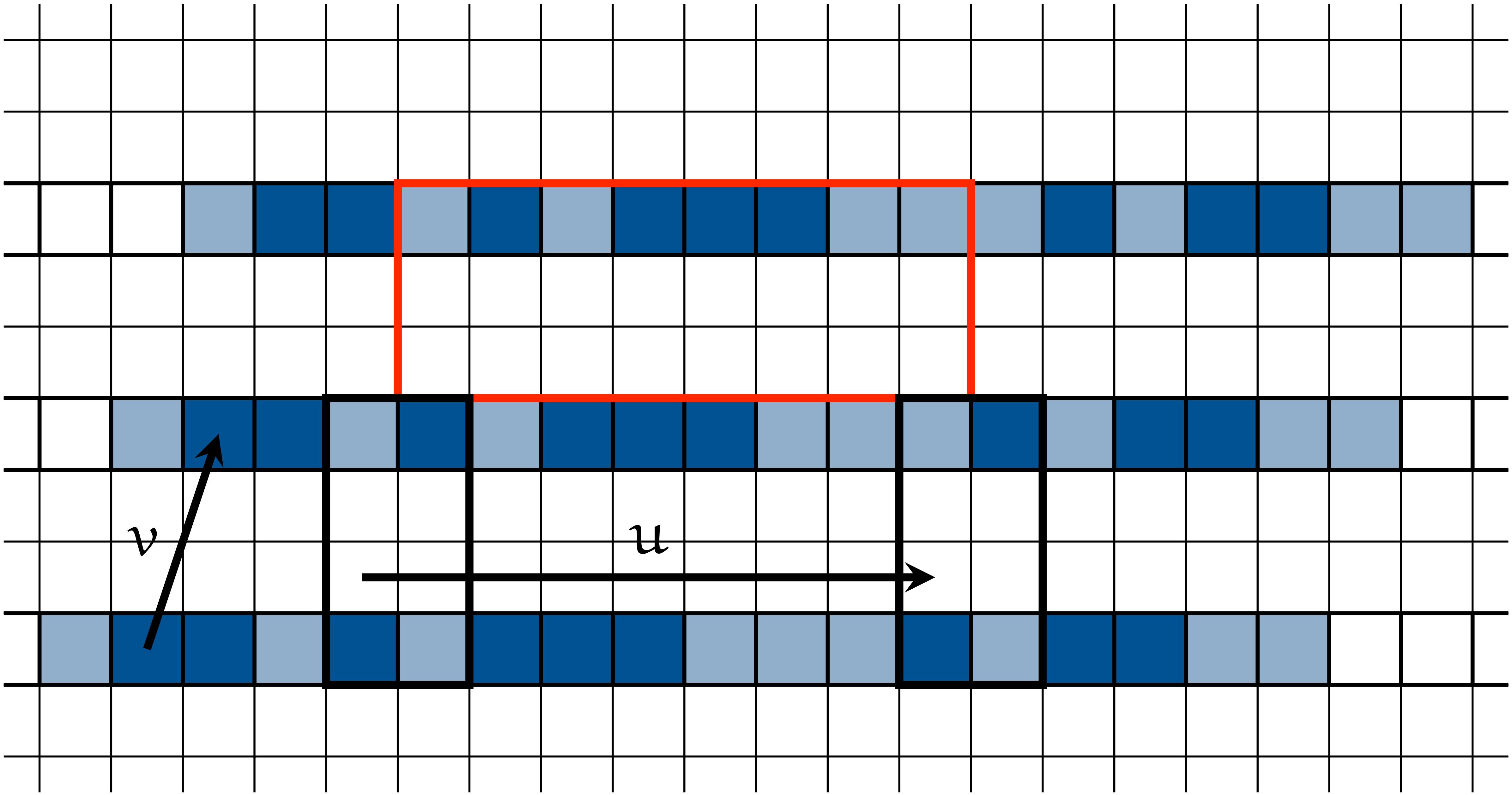
Un pavage $P \in \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ est 1-périodique si :
$\exists v \in \mathbb{Z}^2, \forall z \in \mathbb{Z}^2, \;\; P(z+v) = P(v)$

Un pavage est 2-périodique s'il admet deux vecteurs de périodicité non colinéaires.

Proposition

Si un jeu de tuiles de Wang admet un pavage 1-périodique, alors il admet un pavage 2-périodique.

Idée de la preuve



Apériodicité

Les pavages périodiques sont récursivement énumérables

Apériodicité

Un jeu de tuiles est apériodique s'il n'admet aucun pavage périodique.

Existe-t-il des jeux de tuiles apériodiques ?

[Berger 1964]

Robert Berger. The Undecidability of the Domino Problem.
PhD Thesis, Harvard, 1964 et Memoirs of the AMS 66, 1966

Théorème

DP n'est pas récursif.

Corollaire

Il existe des jeux de tuiles apériodiques.

Réduction

Réduction au problème de l'arrêt des MTs

$$\underset{\text{MT}}{\varphi} \xrightarrow{\text{récursivement}} \underset{\text{jeu de tuiles}}{\tau}$$

φ s'arrête $\longleftrightarrow$ τ ne pave pas le plan

Idée : coder le calcul Turing sans prévoir l'arrêt

Subtilités

Tout pavage de τ doit contenir des calculs non bornés de φ.

Par compacité, ces calculs doivent être présents partout.

Les jeux de tuiles construits sont apériodiques.

Petits jeux apériodiques

20426	Berger, 1964
104	Berger, 1964
92	Knuth, 1966
40	Laüchli, 1966
56	Robinson, 1967
35	Robinson, 1971
34	Penrose, 1973
32	Robinson, 1973
24	Robinson, 1977
16	Ammann, 1978
13	Culik and Kari, 1995

Preuves d'indécidabilité

Berger 1964, l'originale

Robinson 1971, substitions explicites

Durand-Levin-Shen 200x, nouveau schéma de preuve

Kari 2007, approche radicalement différente

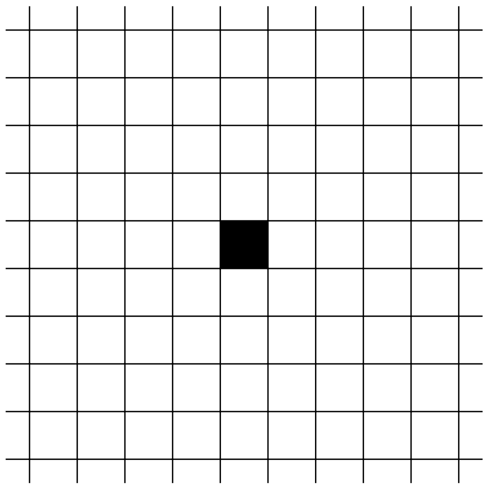
Durand-Romaschenko-Shen 2007, approche par point fixe

Dans cet exposé

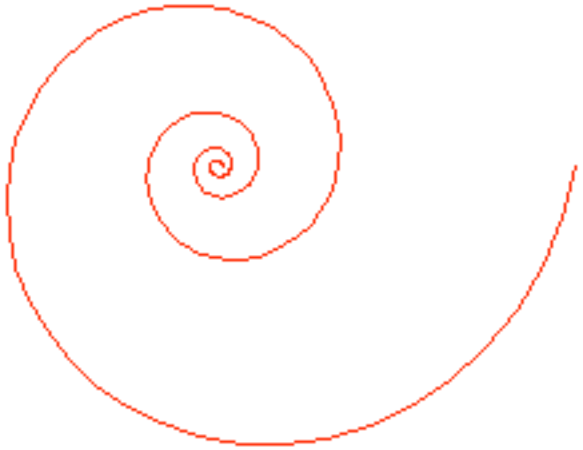
- Construction à base de substitutions ;
- Nouveau jeu apériodique de 104 tuiles ;
- Géométriquement inspiré de Robinson ;
- Schéma de preuve à la Durand-Levin-Shen ;
- Pavabilité codé dans des substitutions 2×2.

Substitutions 2×2

Apériodique ?

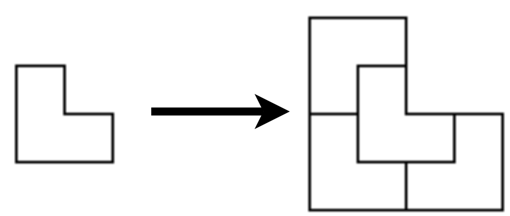


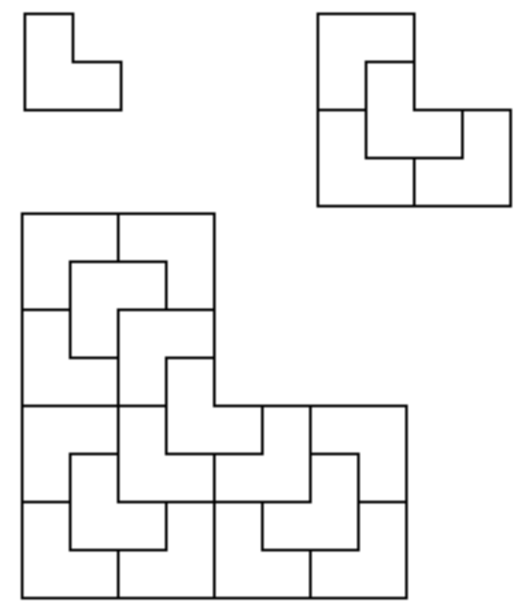
Problème d'extraction



Avec quel codage ?

Les substitutions





Idée : les substitutions non triviales engendrent des coloriages du plan apériodiques.

Substitution 2×2

Posons $\boxplus = \{0, 1\}^2$

Substitution

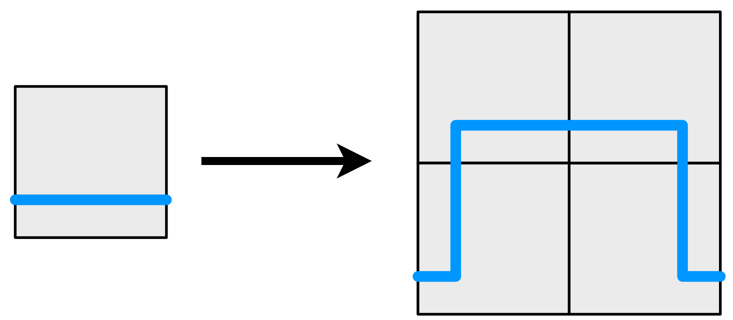
Une substitution 2×2 est une application $s : \Sigma \to \Sigma^{\boxplus}$ où Σ est un alphabet fini. S est l'extension de s à tout motif par :

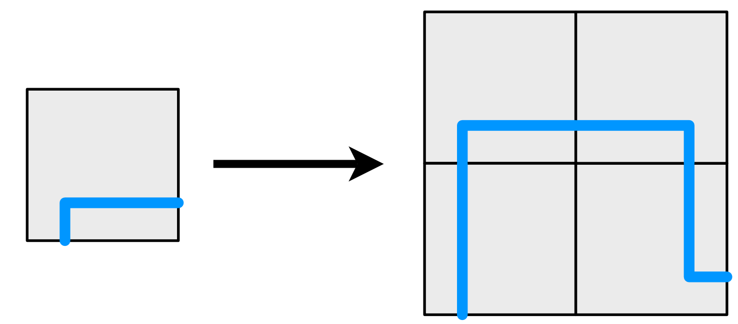
$$\forall z \in \mathbb{Z}^2, \forall \mathbf{c} \in \boxplus, \;\; S(C)(2z + \mathbf{c}) = s(C(z))(\mathbf{c})$$

S commute faiblement avec les translations :

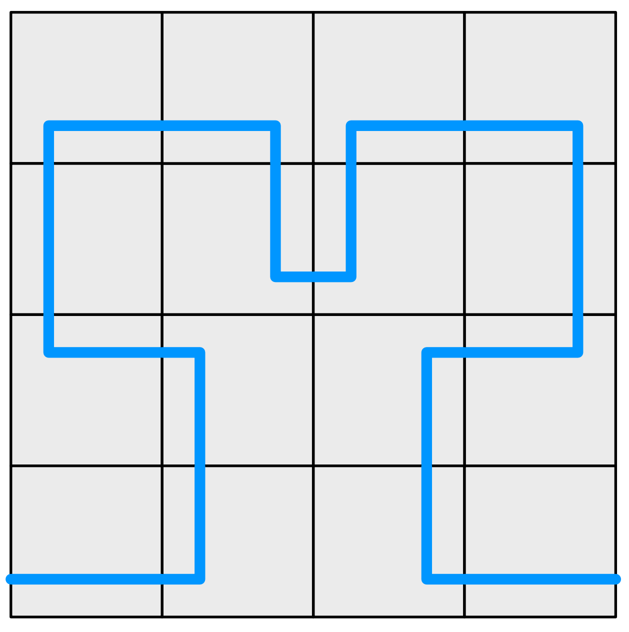
$$S \circ \sigma_u = \sigma_{2u} \circ S$$

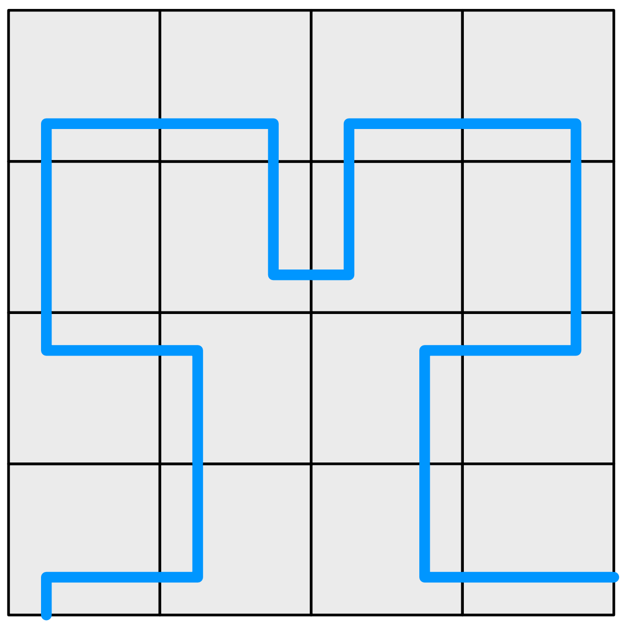
Un exemple

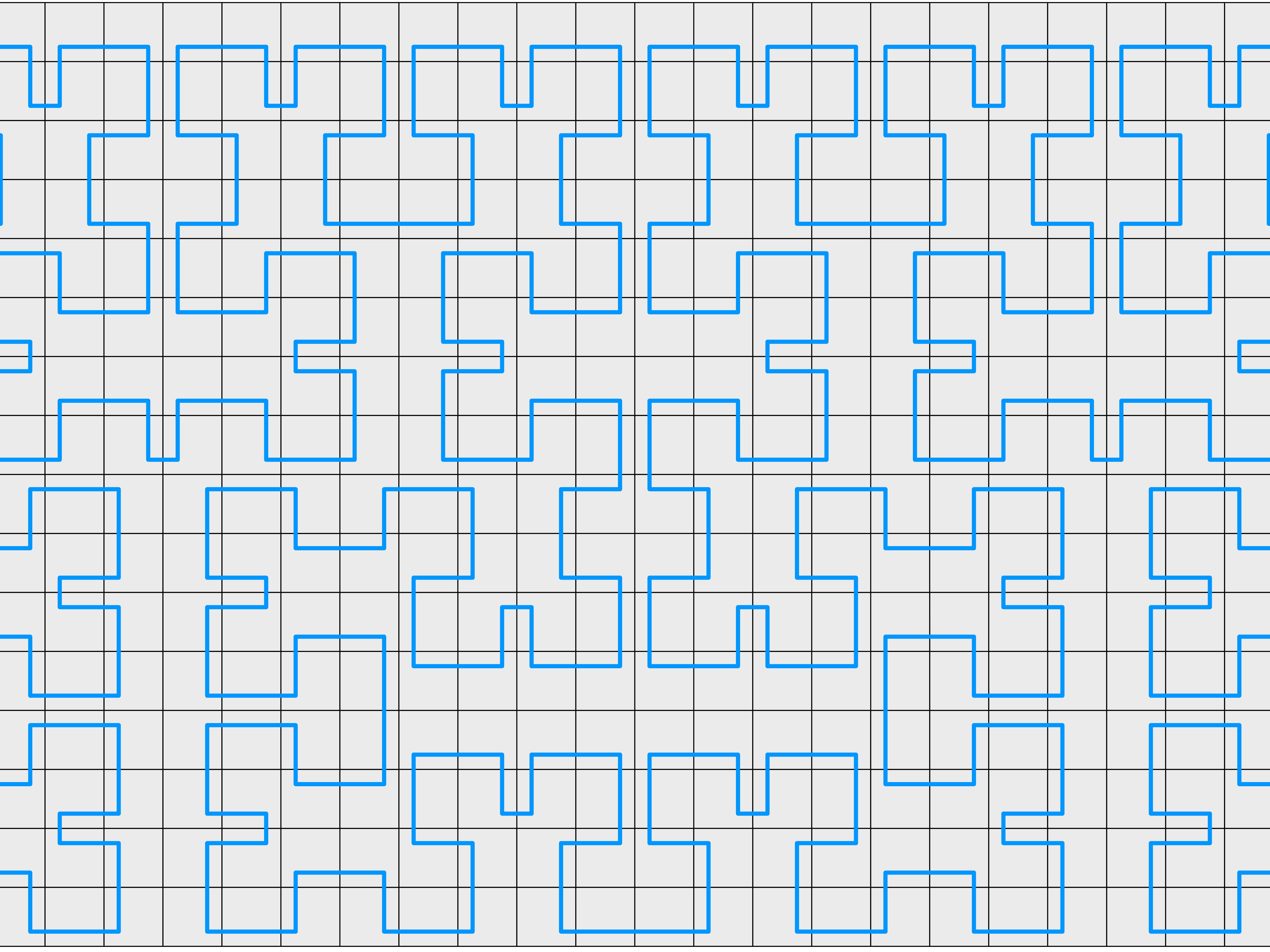




4+8=12 lettres







Ensemble limite

Ensemble limite

$\Lambda_S = \bigcap_n \Lambda_S^{(n)}$ où $\Lambda_S^{(0)} = \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ et

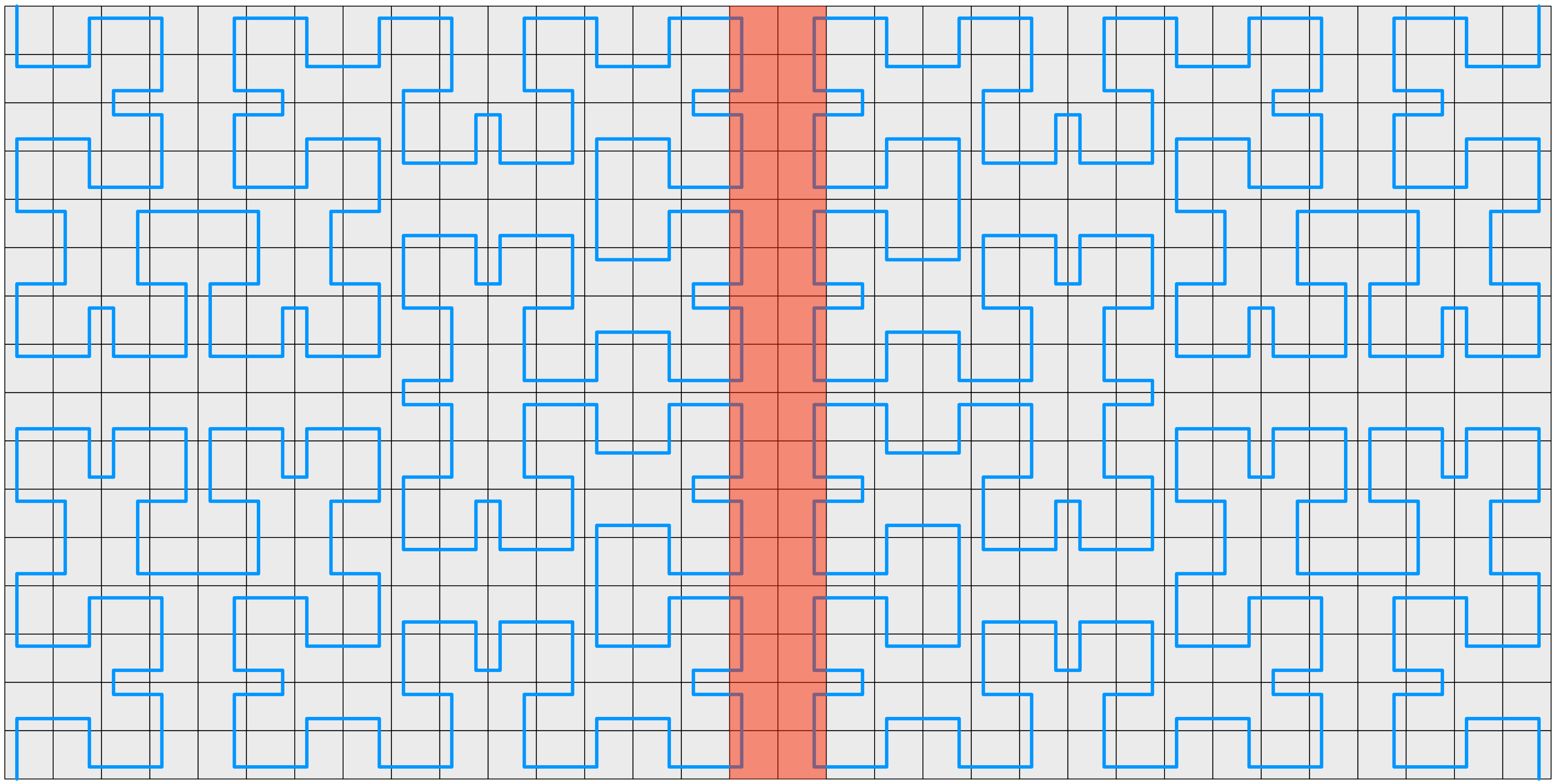
$$\Lambda_S^{(n+1)} = \left\{ \sigma_u \circ S(C) \mid C \in \Lambda_S^{(n)}, u \in \boxplus \right\}$$

Un *historique* pour C est une suite $(C_i, u_i) \in \left(\Sigma^{\mathbb{Z}^2} \times \boxplus\right)^{\mathbb{N}}$ telle que $C_0 = C$ et, pour tout i, $C_i = \sigma_{u_i} \circ S(C_{i+1})$.

Proposition

L'ensemble limite est l'ensemble des coloriages admettant un historique.

Subtilités



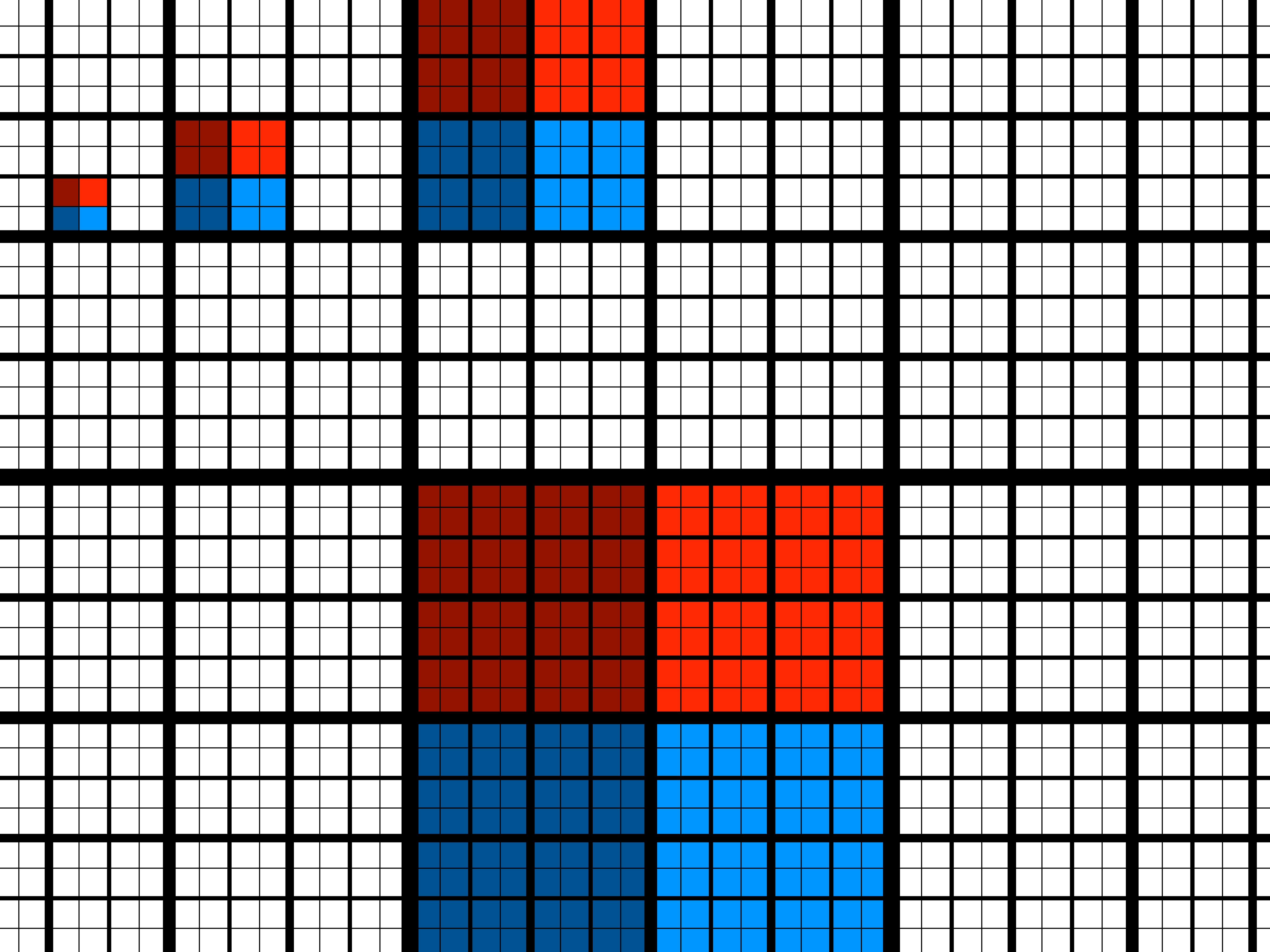
Remarque : l'ensemble limite n'est pas la clôture des motifs finis obtenus par substitution.

Codage par tuiles

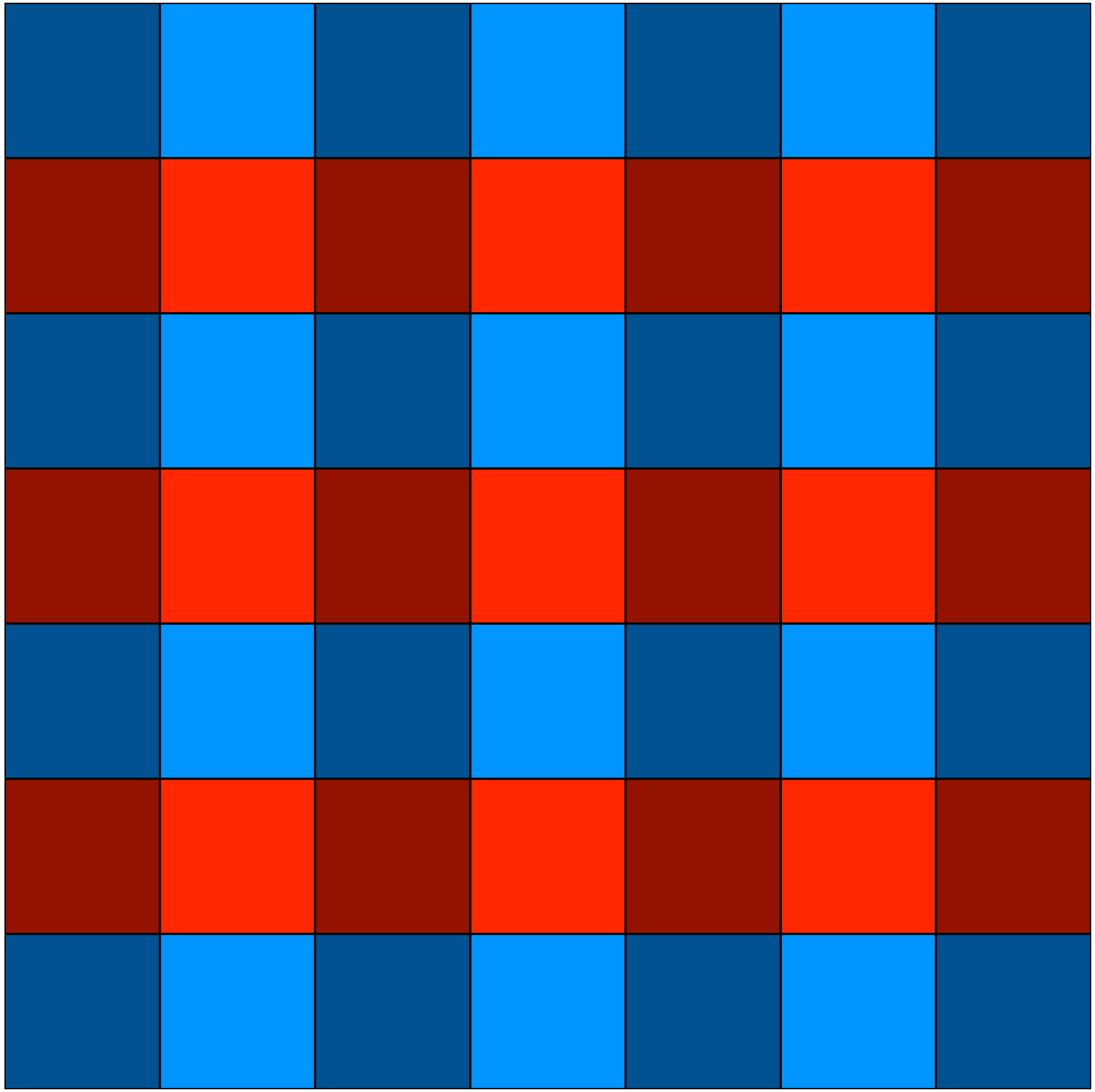
- Certaines substitutions ont un ensemble limite apériodique ;
- Comment forcer une substitution avec des contraintes locales de pavage ?

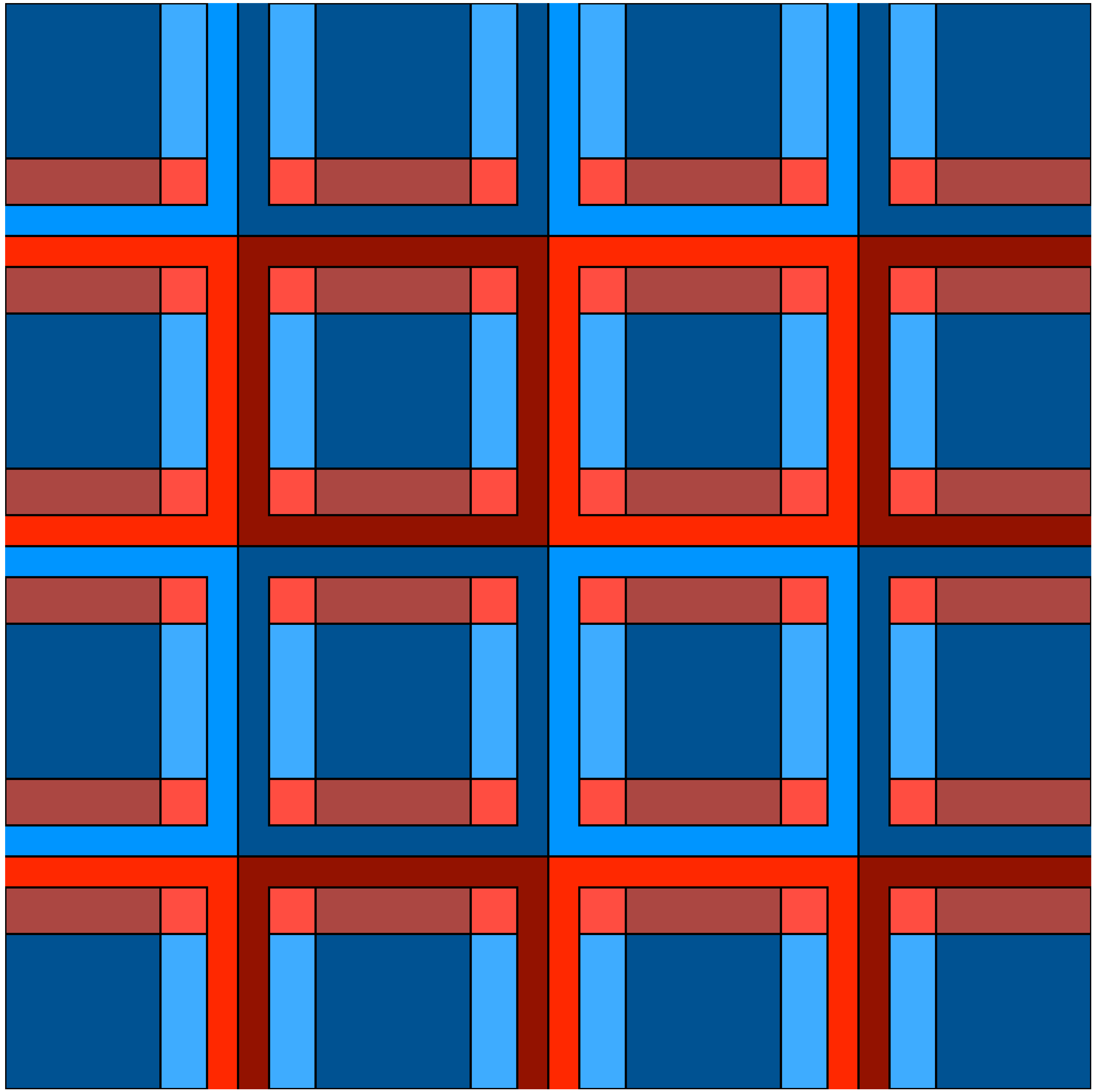
Approche historique

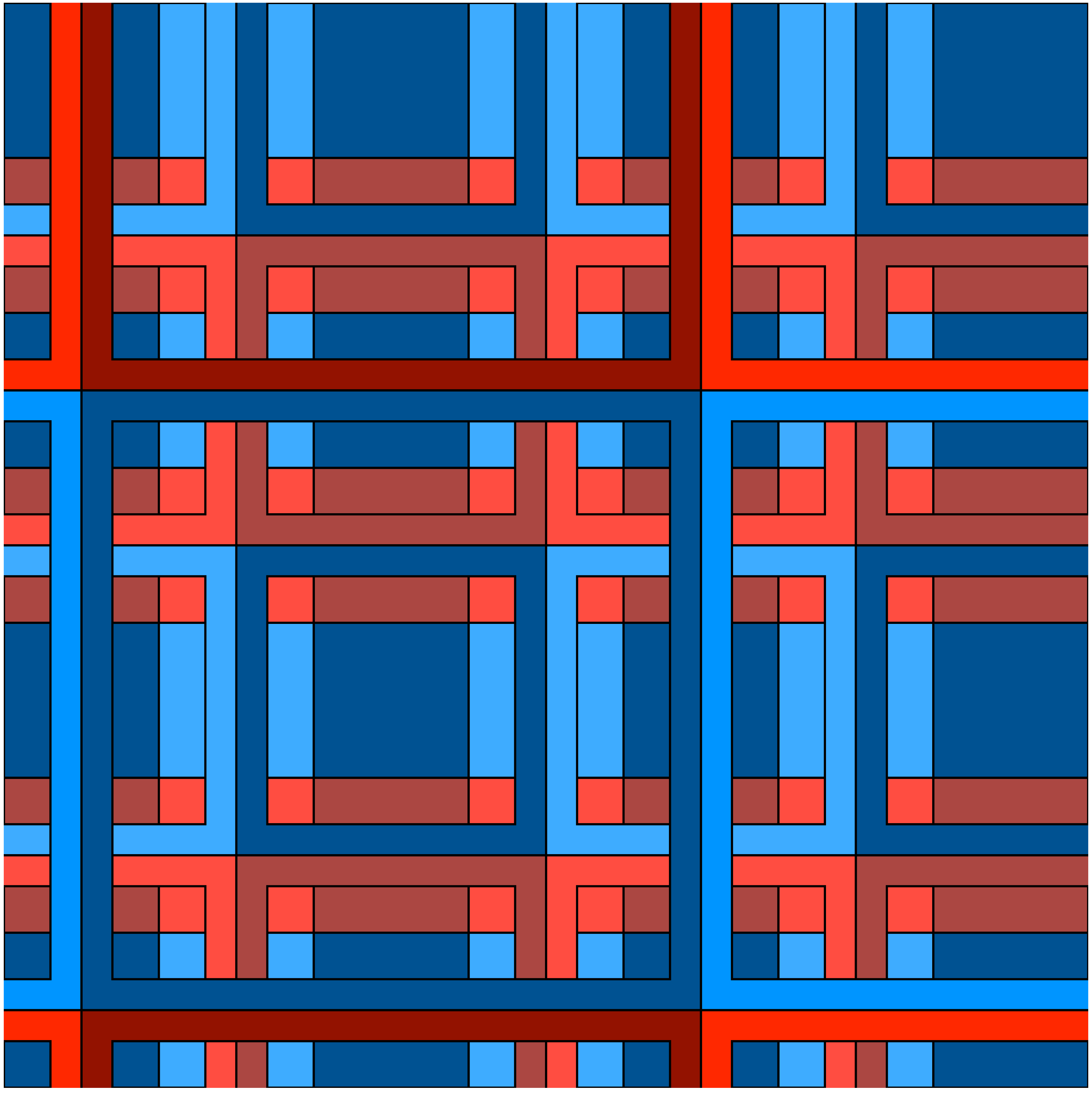
- Coder un historique dans le pavage.
- Vérifier localement que l'historique est bien cohérent.
- Coder une infinité de grilles emboîtées.

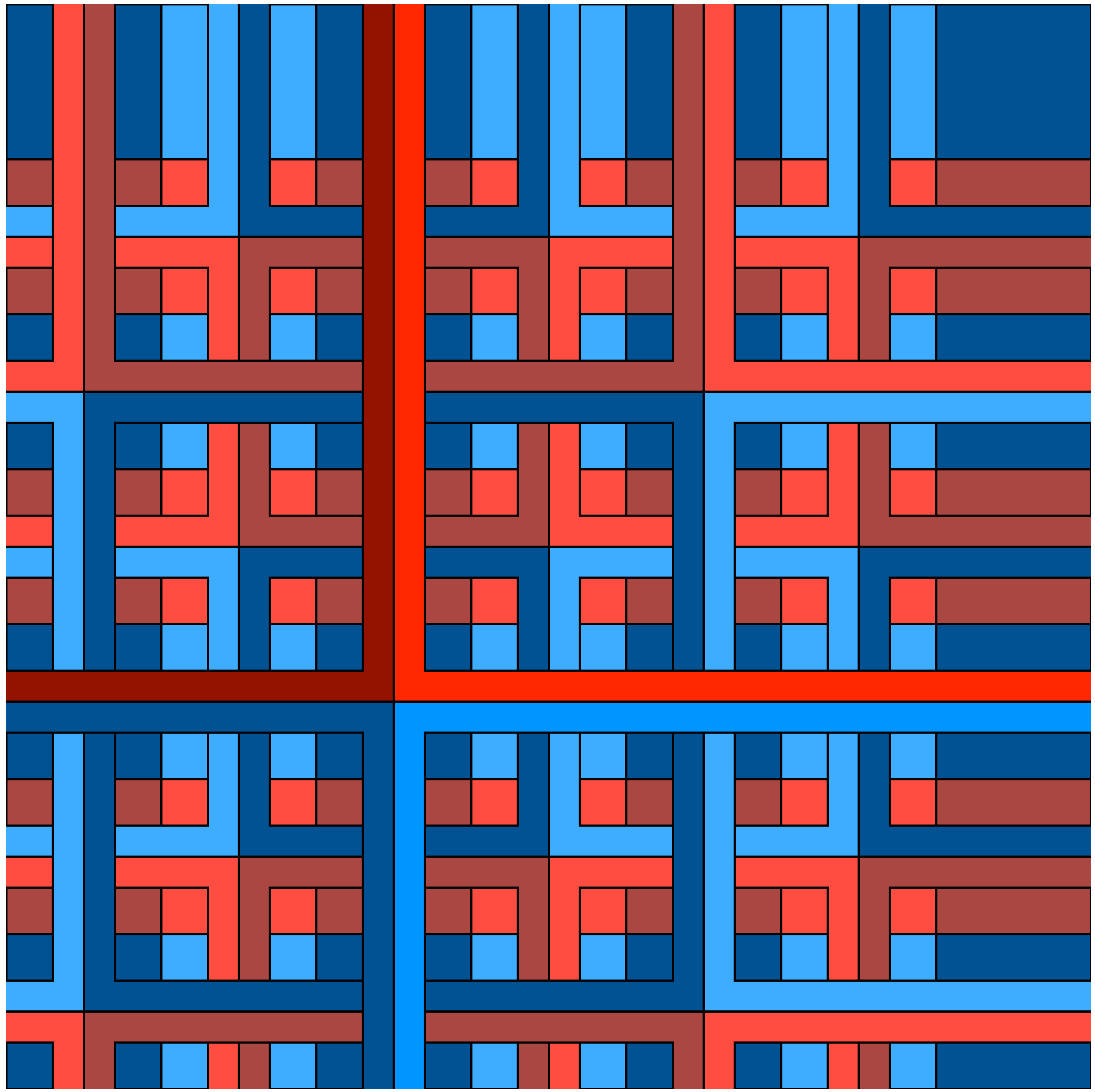


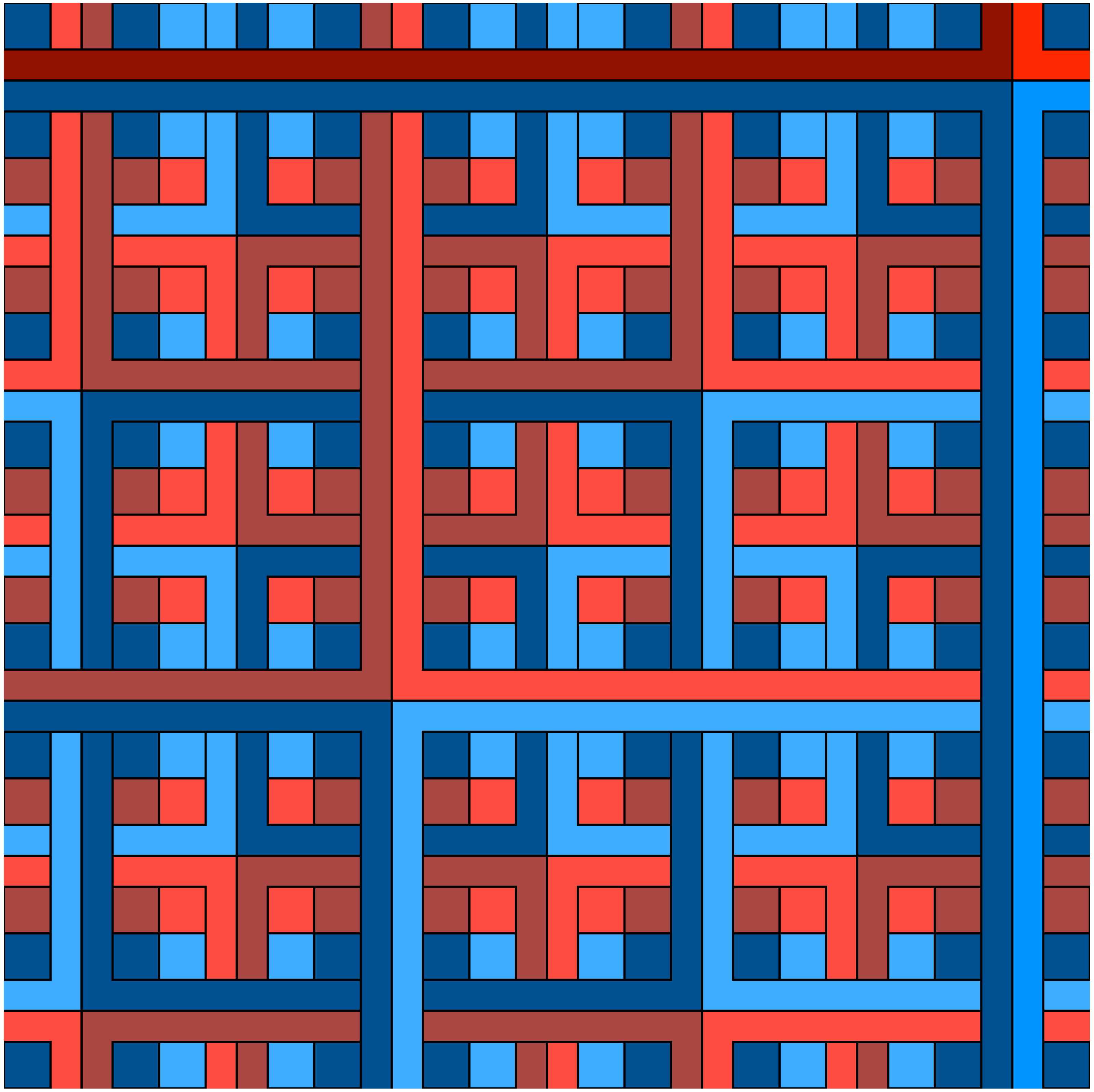
Un jeu de tuiles

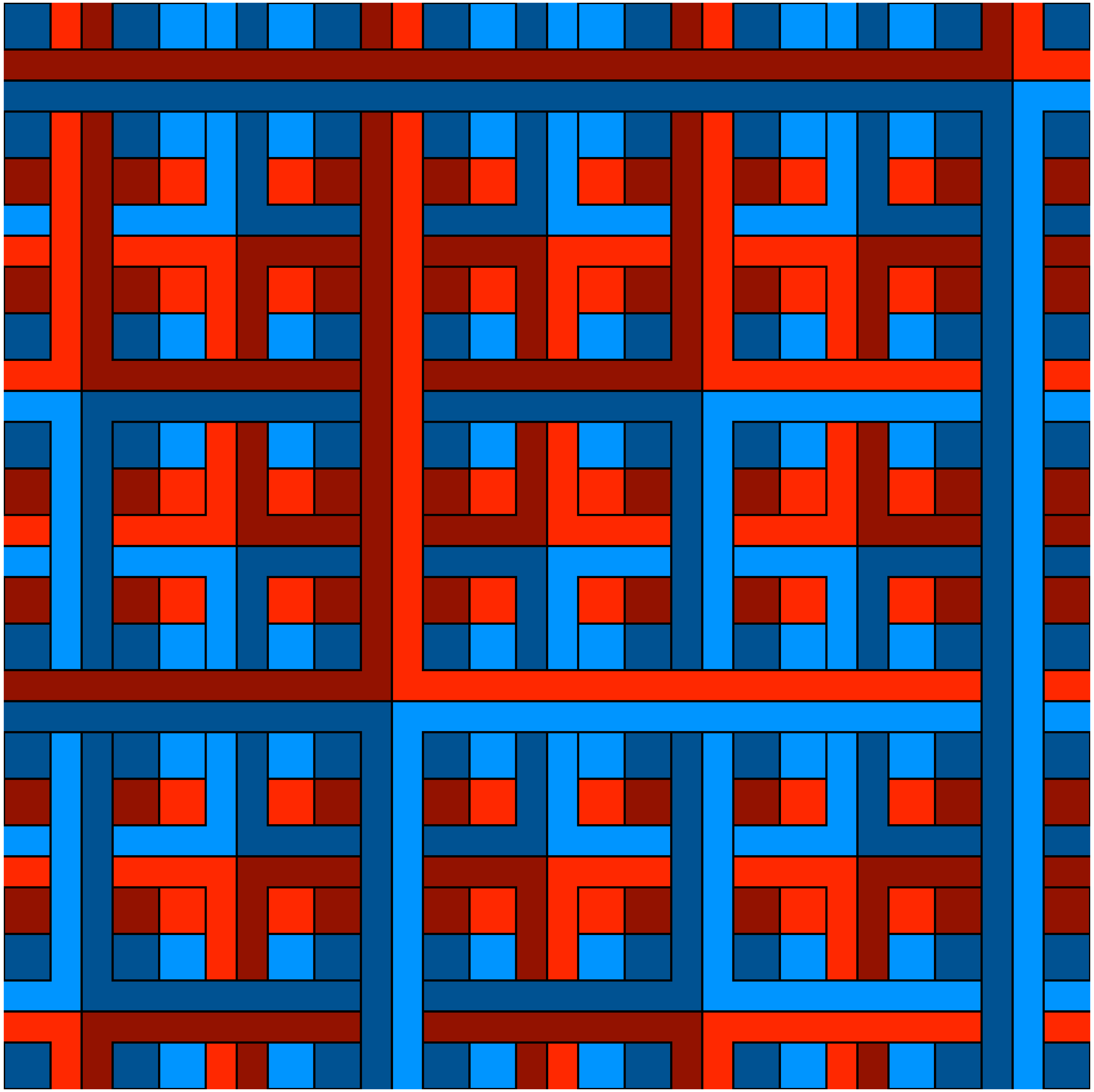




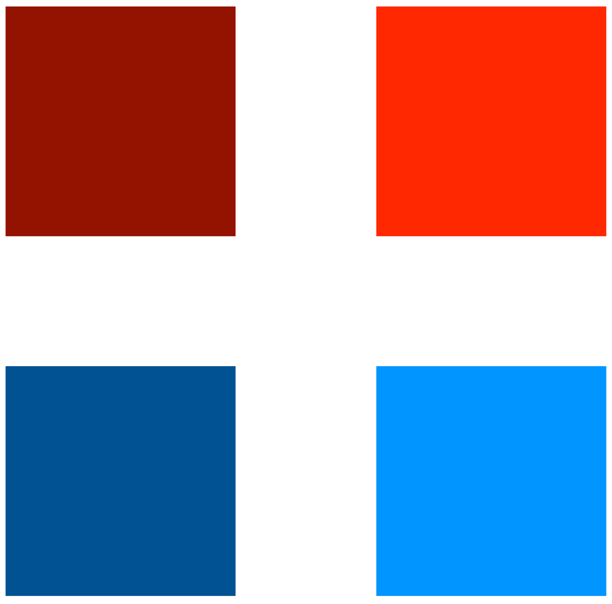






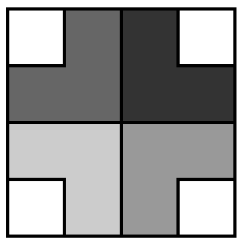


Couche 1



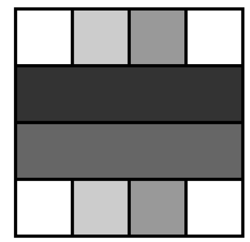
$$
\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \boxplus \\
(x,y)\mathcal{H}(x',y') &\leftrightarrow x = 1 - x' \wedge y = y' \\
(x,y)\mathcal{V}(x',y') &\leftrightarrow x = x' \wedge y = 1 - y'
\end{aligned}
$$

Couche 2



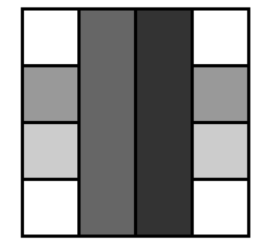
X

4



H

16



V

16

Sur les fils, les couleurs adjacentes vérifient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$

On ne colle que si les couleurs des fils sont compatibles.

couche 1

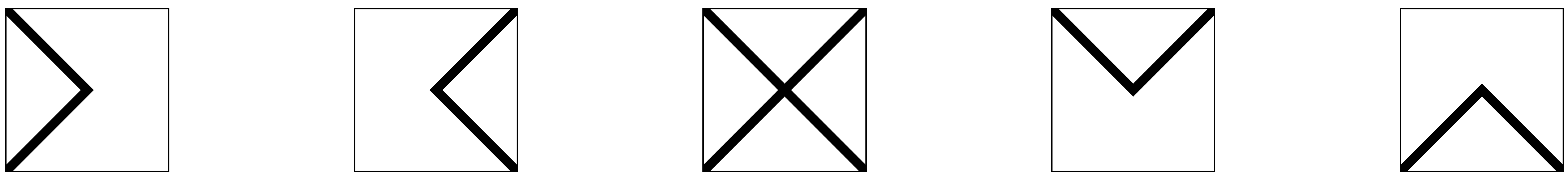
8

32

32

Couche 3

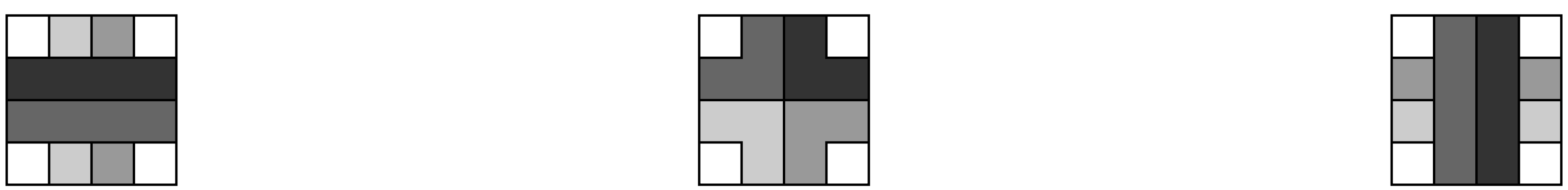
Un bit d'information supplémentaire pour forcer les carrés.



La règle de pavage est de respecter les flèches.

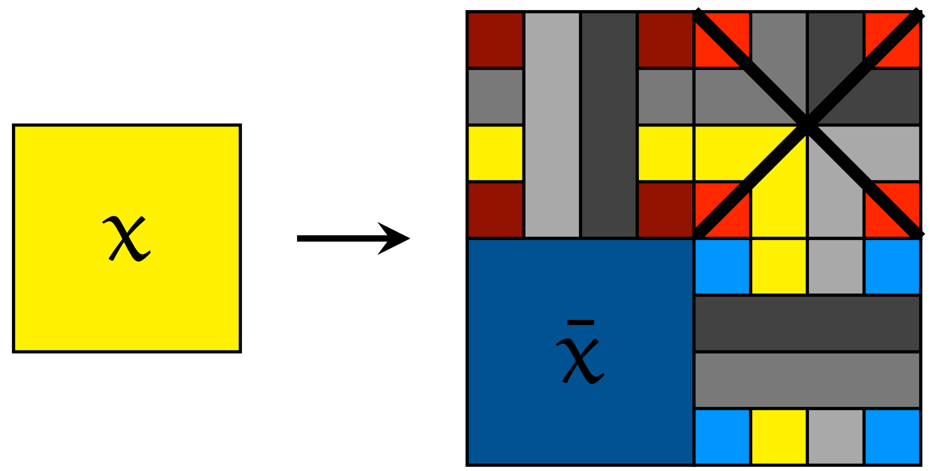
Les flèches sont cohérentes avec les couleurs des fils.

couche 2

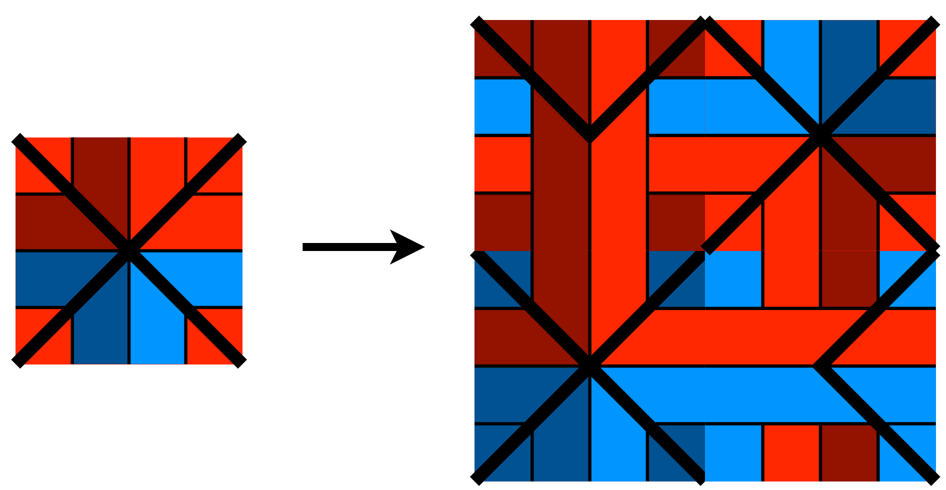


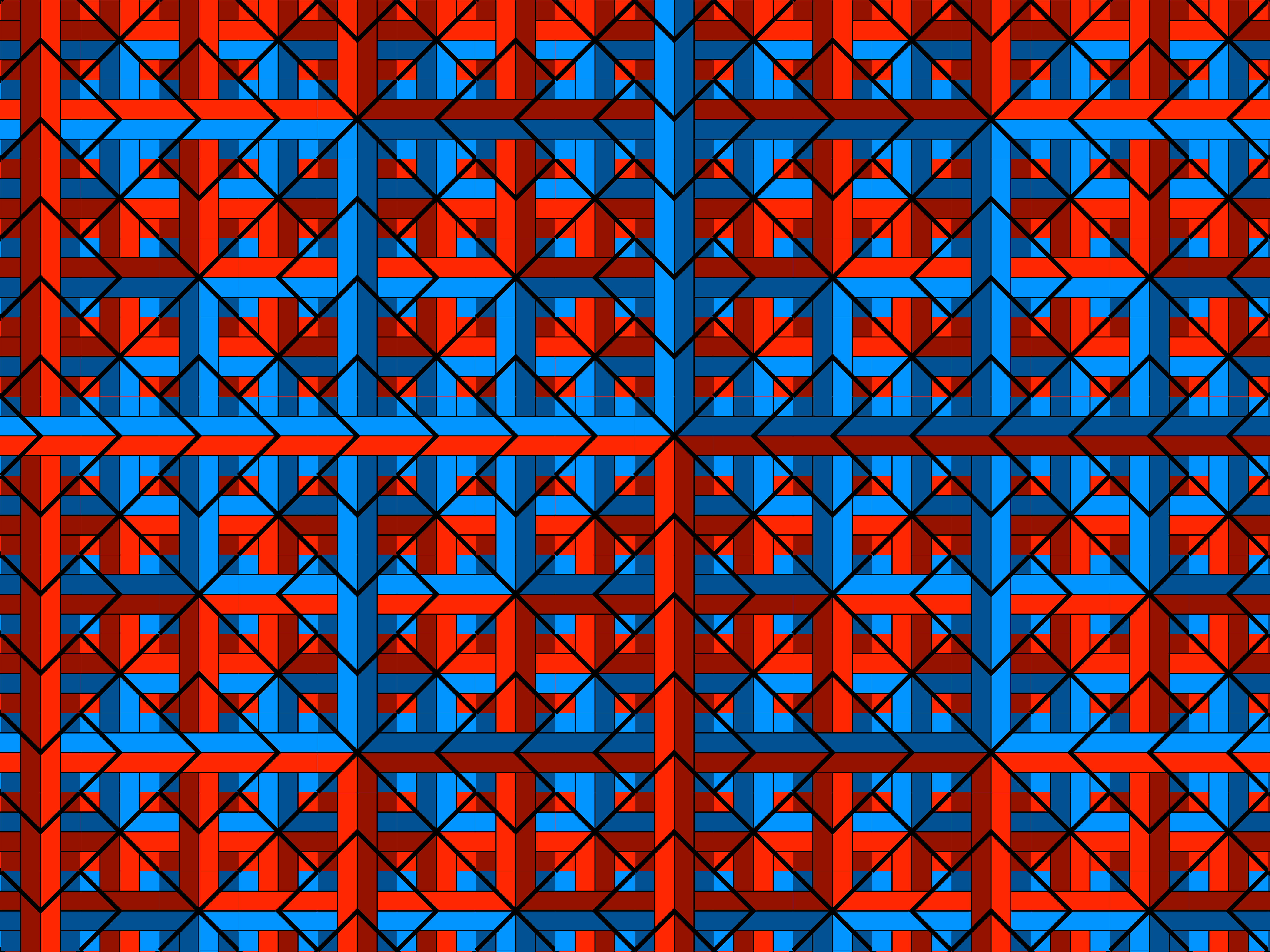
48 *8* *48*

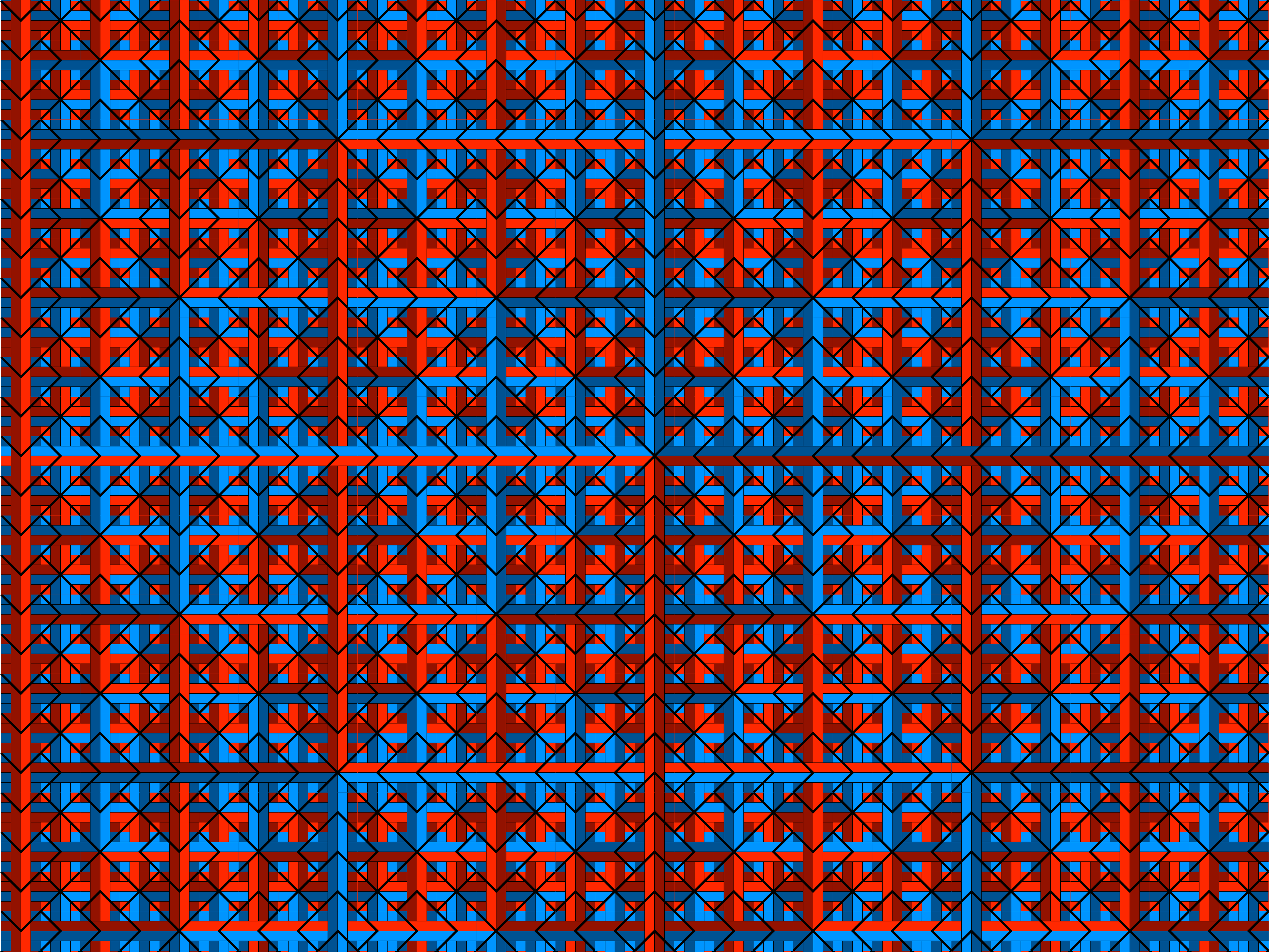
Substitution



Exemple :





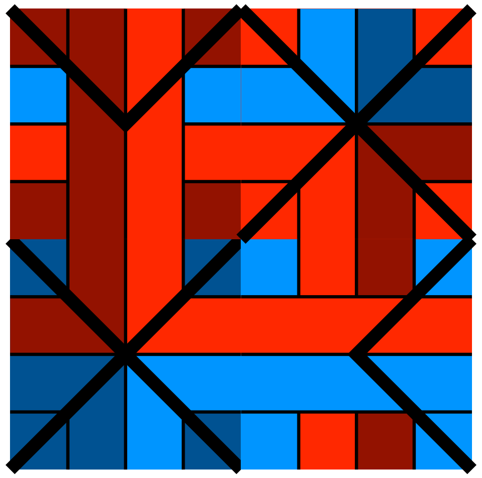


Démonstration

Lemme 1

Lemme 1

Tout pavage par τ est dans l'image de s.



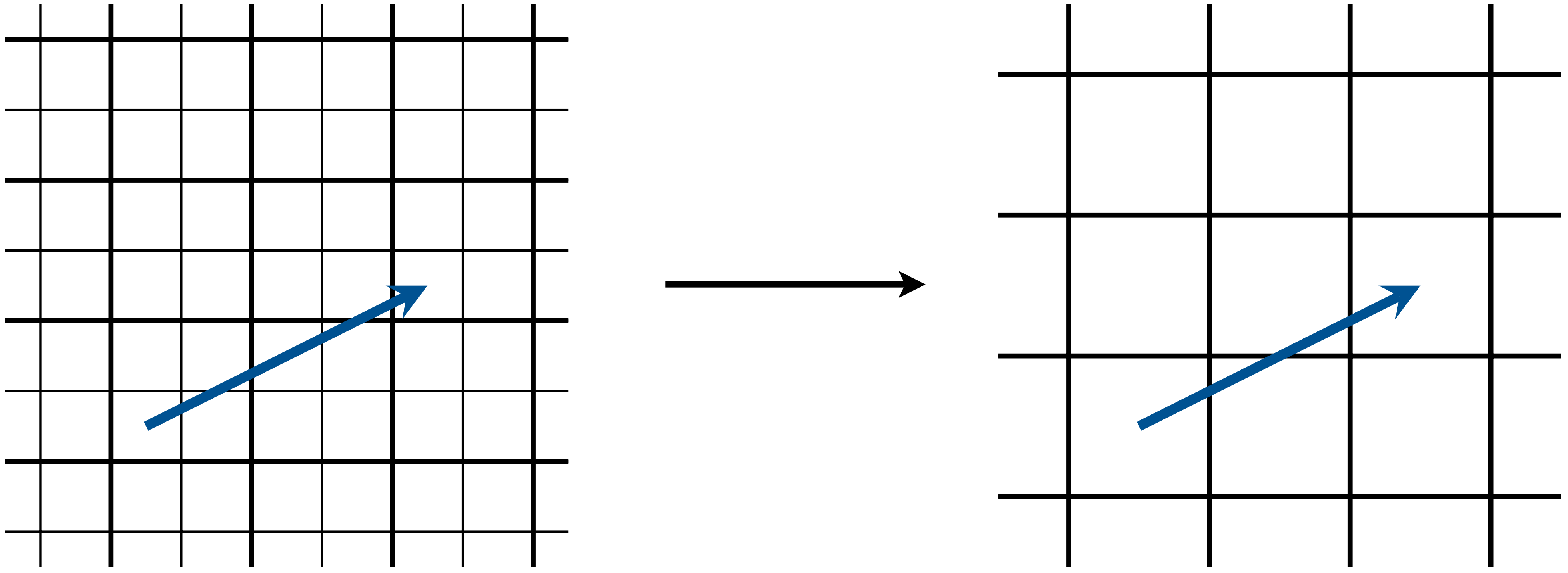
Lemme 2

Lemme 2
L'image réciproque par s d'un pavage par τ est un pavage.

couche 1 : codé dans la couche 2 initiale
couche 2 : sous-ensemble de la couche 2 initiale
couche 3 : sous-ensemble de la couche 3 initiale

Lemme 3

Lemme 3
Un pavage par τ de période u possède une préimage par s de période $\frac{1}{2}u$.

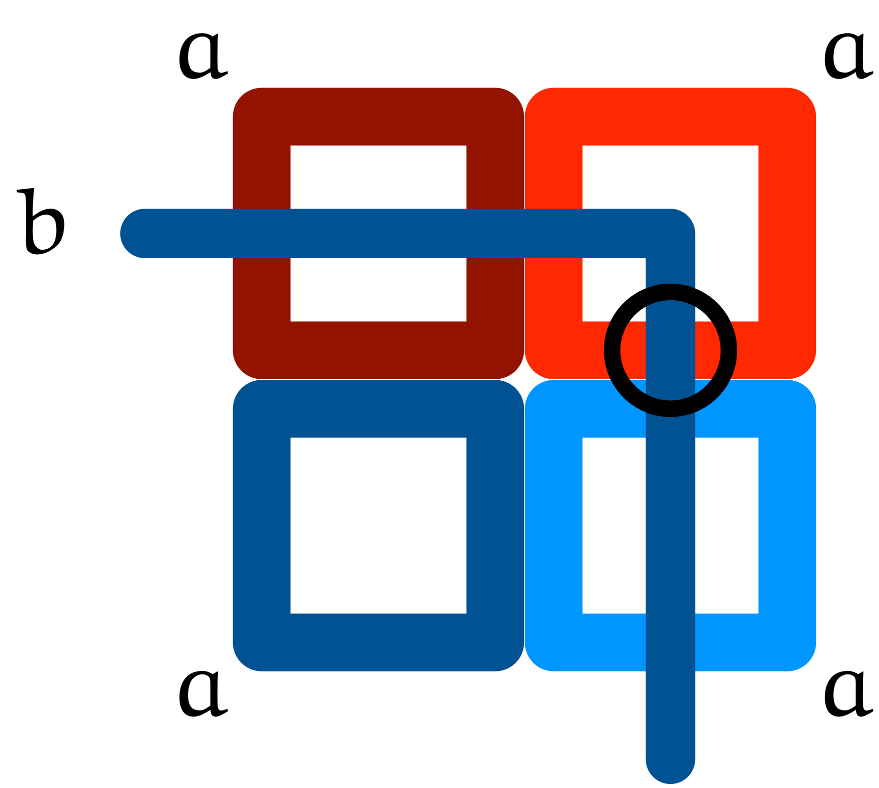


QED

Théorème
Le jeu de tuile τ est apériodique.

Et la pavabilité ?

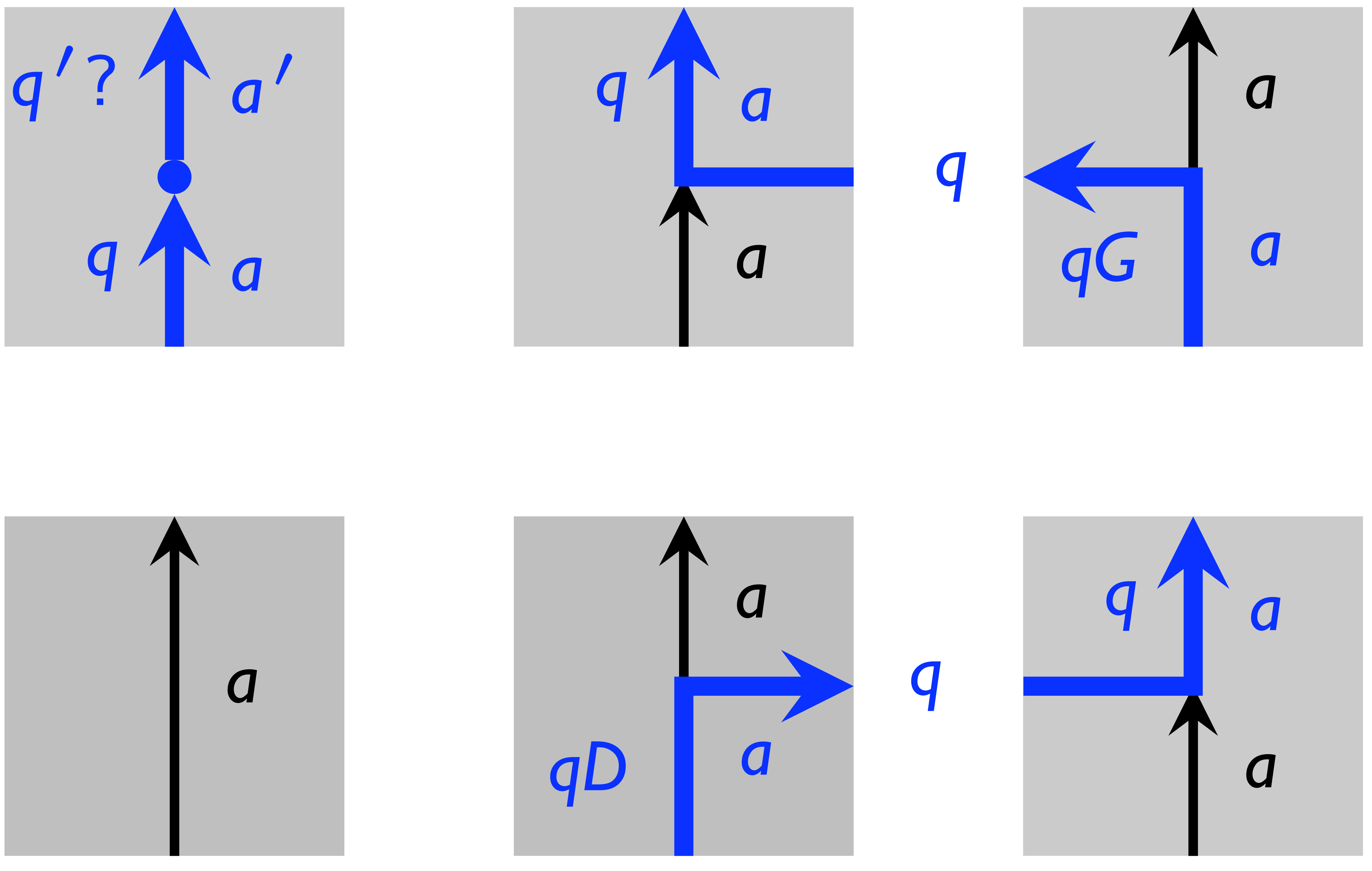
Coder une substitution



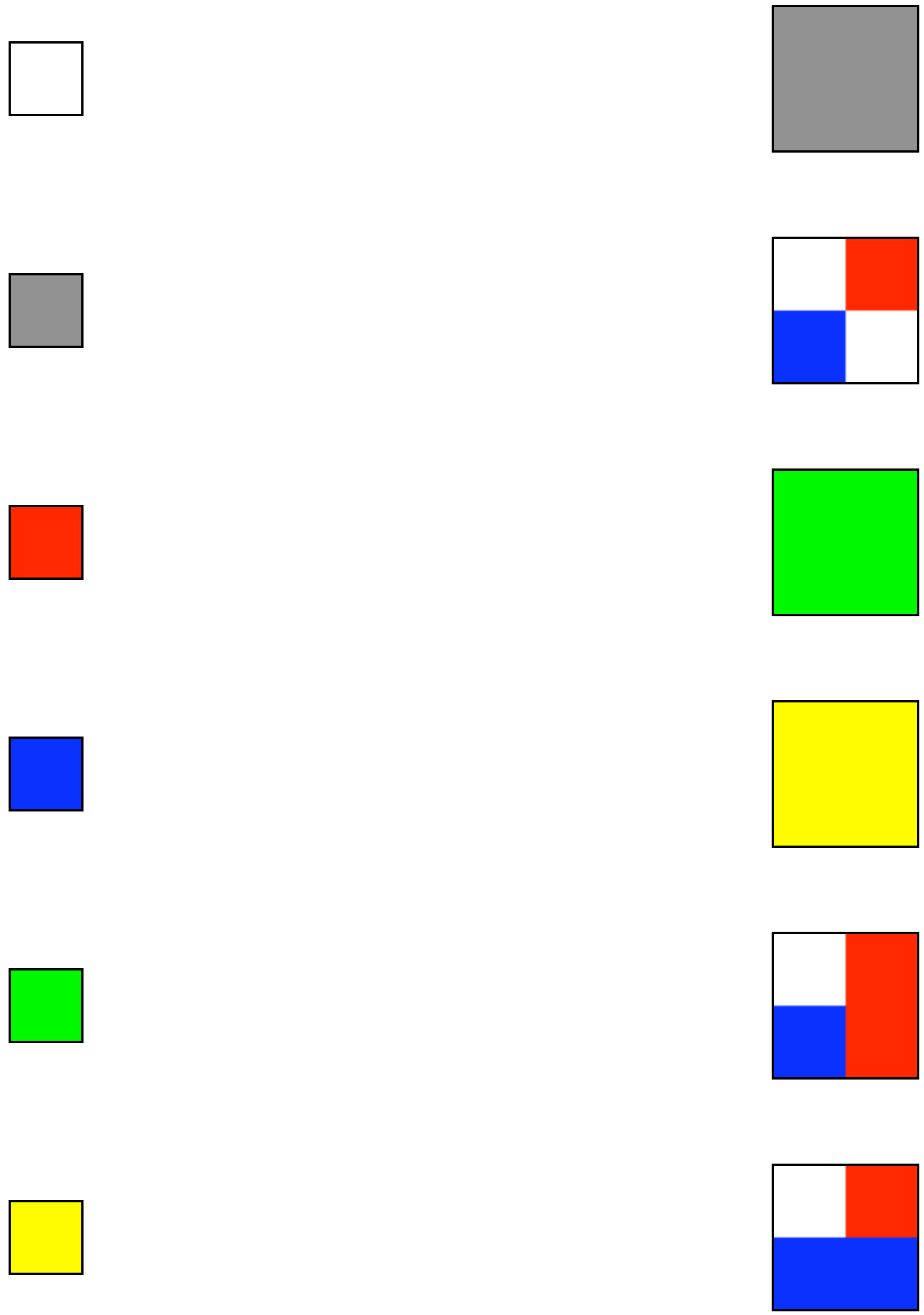
$$s(b)_\alpha = a$$

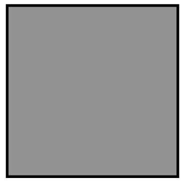
Idée : ajouter une lettre sur chaque tuile et sur chaque fil, la même lettre pour chaque carré, cohérence sur croix.

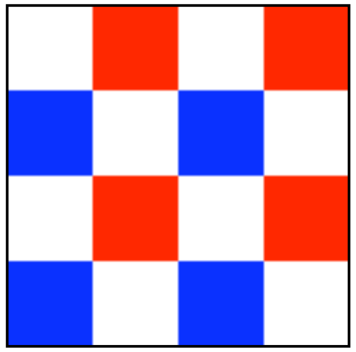
Calcul Turing

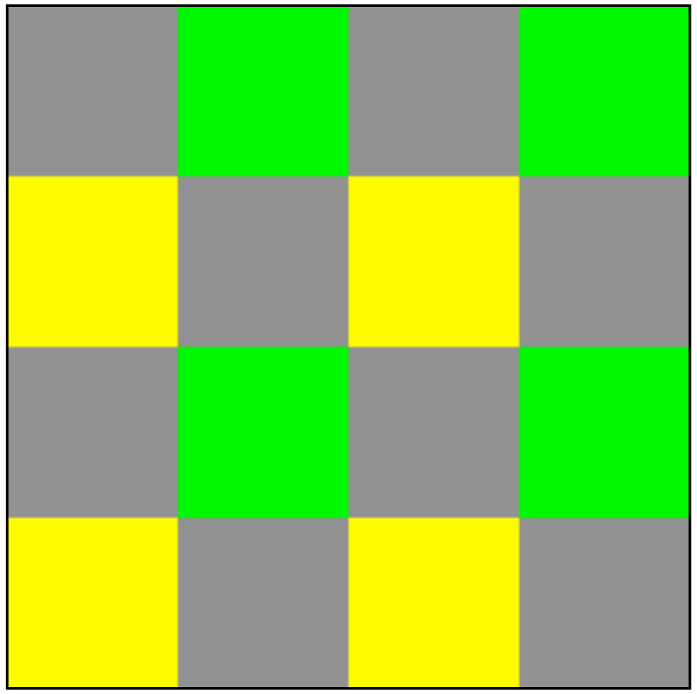


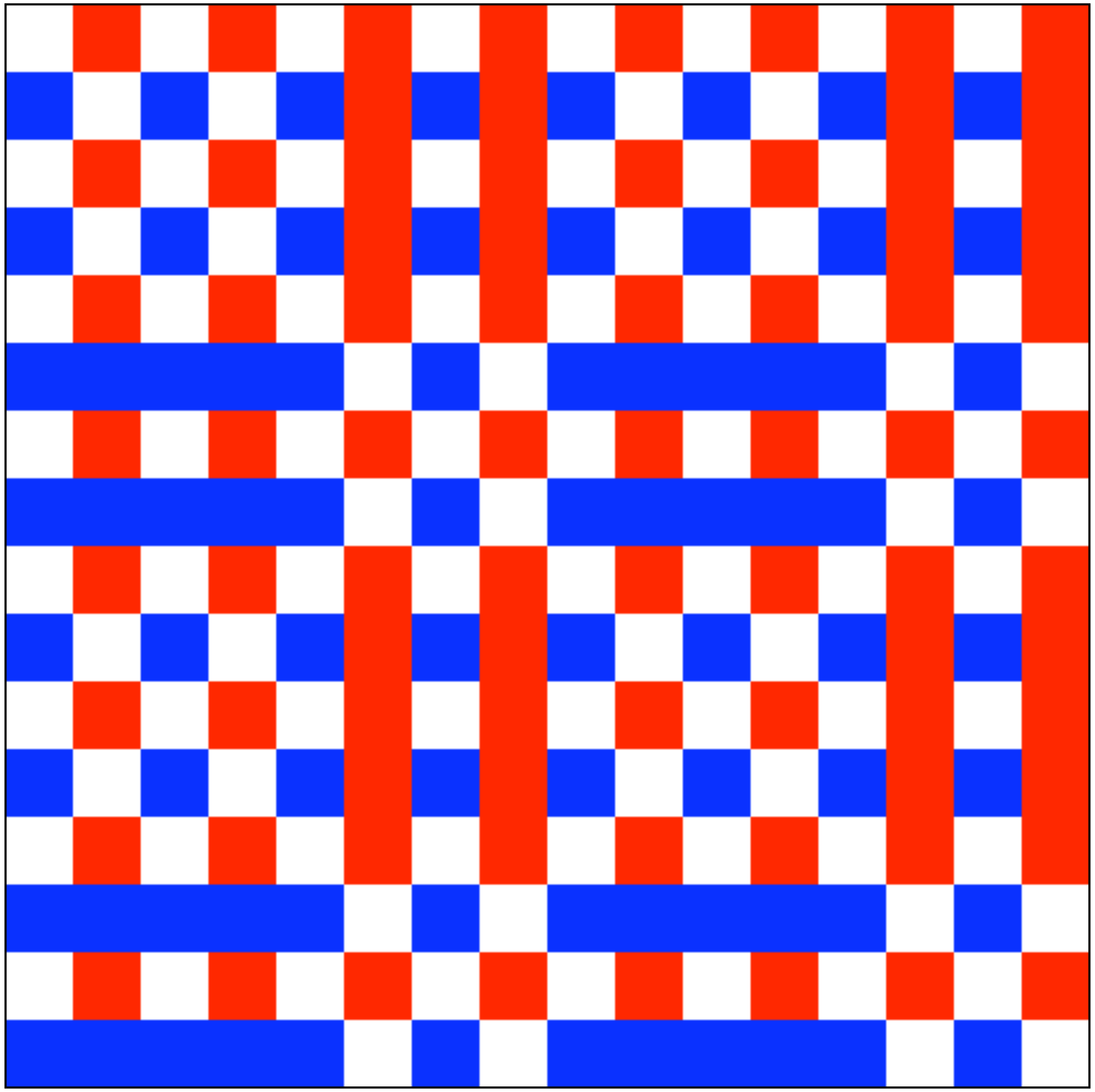
O_2

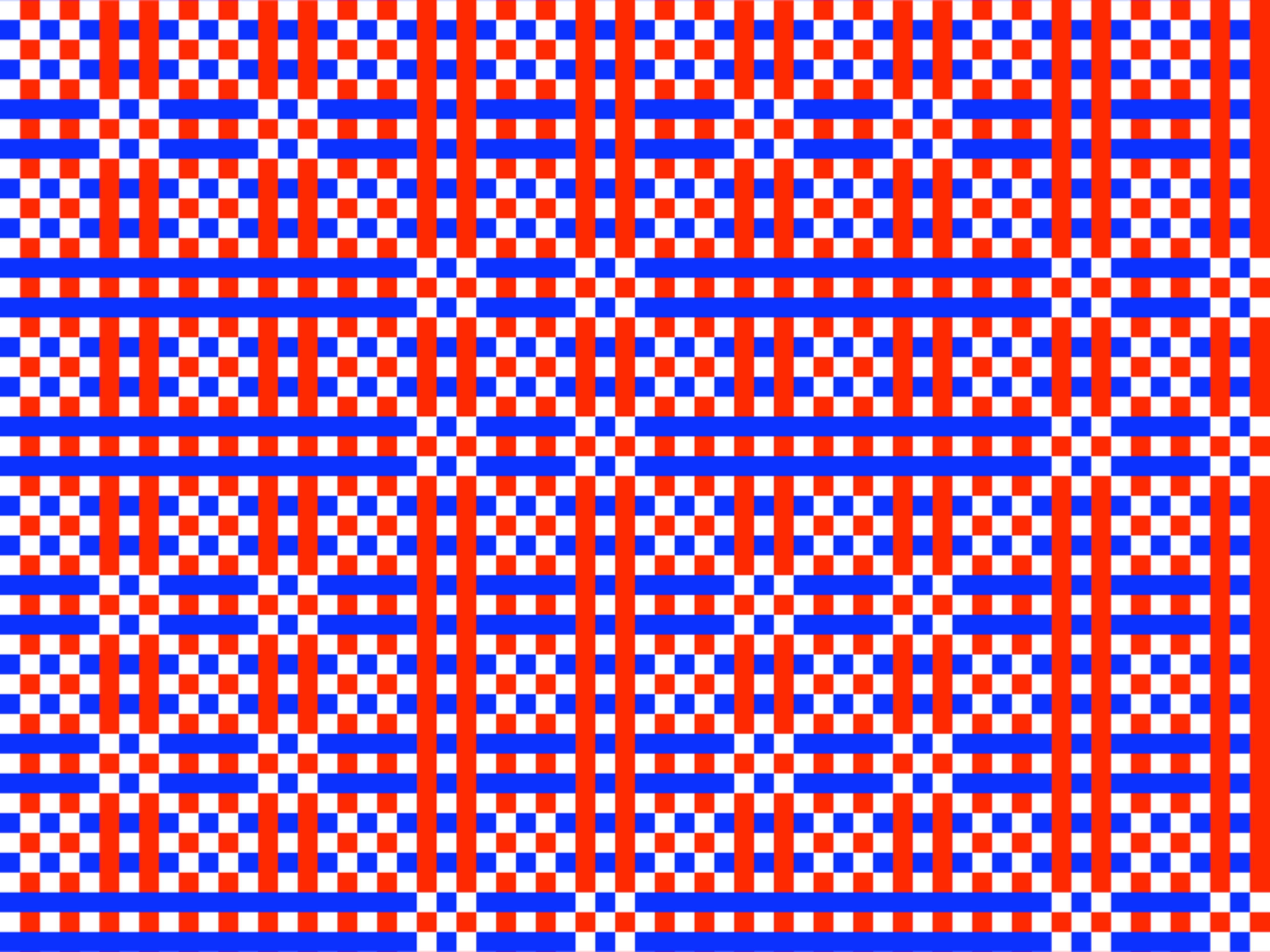


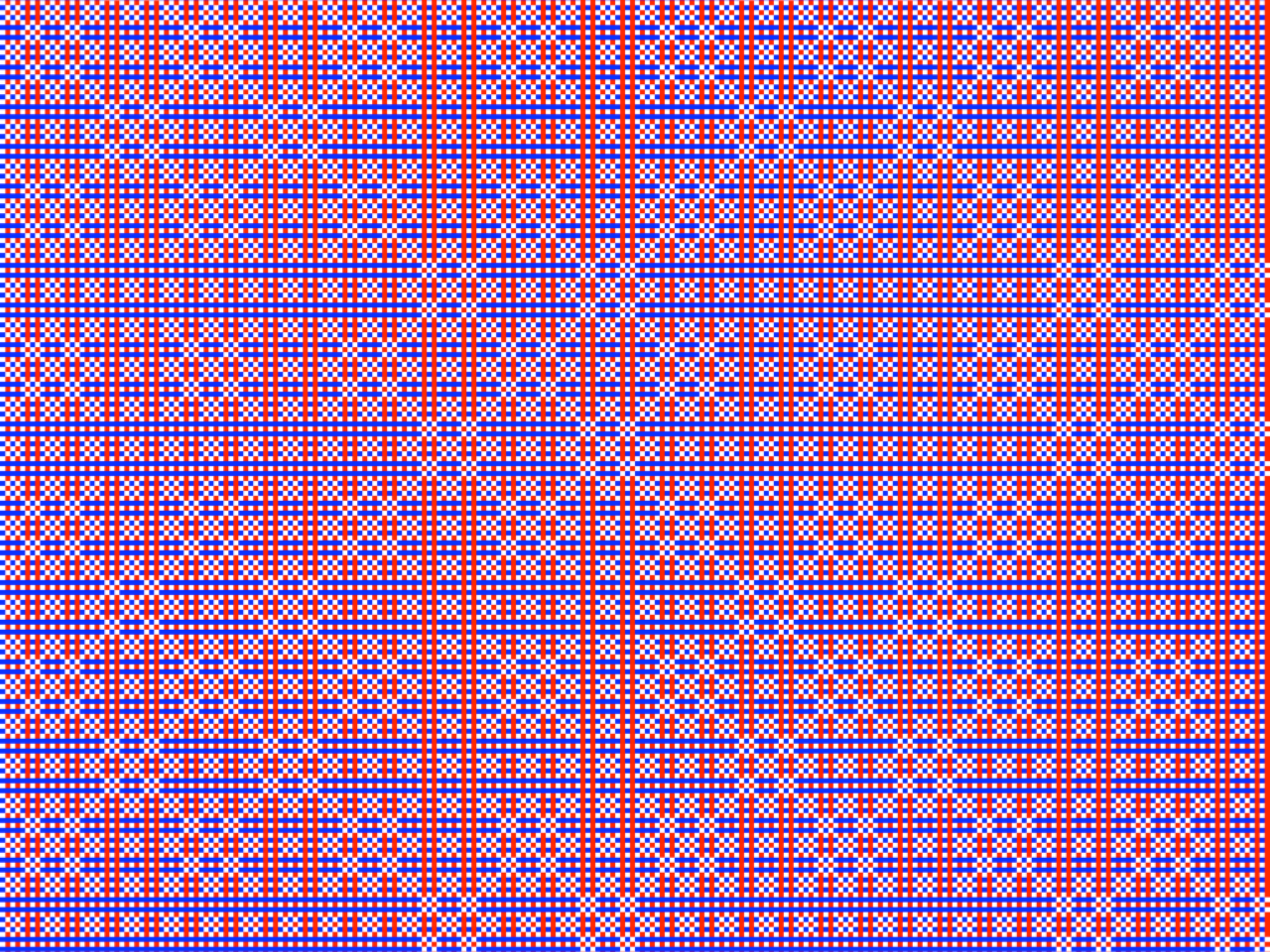




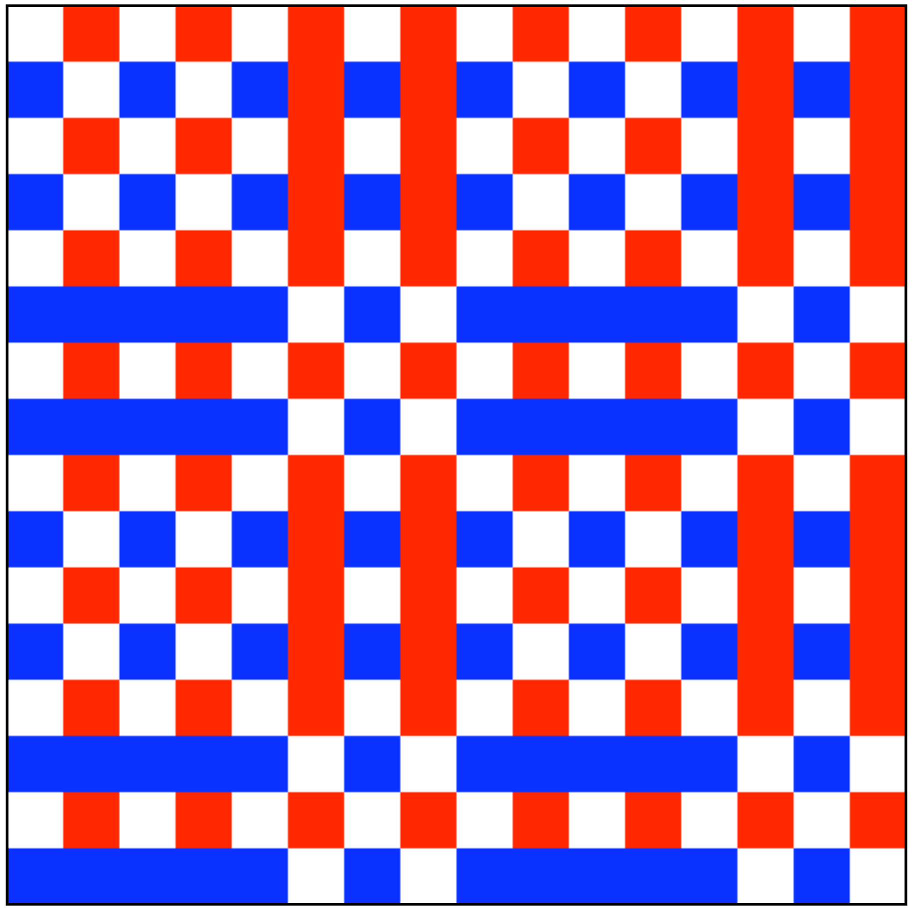








TM dans O2



Principe : calcul Turing dans les cases blanches, propagation horizontale dans bleu, verticale dans rouge.

DP est indécidable