

Pavages, de l'apériodicité à l'indécidabilité

N. Ollinger (LIF, Aix-Marseille Université, CNRS, France)

EJC IM 2008

Pavages, modèles géométriques et calcul (1/3)

Pavages, modèles géométriques et calculs

1. Pavages, de l'apériodicité à l'indécidabilité (2h)

2. Pavages et logique (1h)

Emmanuel Jeandel

3. Complexité de Kolmogorov et logique (1h)

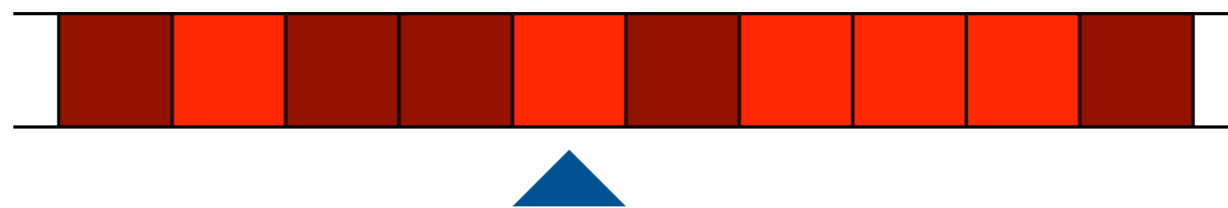
Grégory Lafitte

0. quelques éléments de calculabilité

Machines de Turing

Définition. Une *MT* est un uple $(Q, \Sigma, q_0, q_f, B, \delta)$ où :

- Q est l'ensemble fini des états ;
- Σ est l'alphabet fini du ruban ;
- $q_0 \in Q$ est l'état initial et $q_f \in Q$ l'état final ;
- B est le symbole blanc ;
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \Sigma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$ la fonction de transition.



Une *configuration* est une paire $(q, c) \in Q \times \Sigma^{\mathbb{Z}}$ constituée d'un état et d'un coloriage du ruban par les lettres de Σ .

Calcul

$$(q, c) \vdash (q', \sigma_d(\mu_a(c))) \text{ où } (q', a, d) = \delta(q, c(0))$$

Une MT calcule une fonction partielle $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ si partant d'une configuration $(q_0, {}^\omega B.uB^\omega)$ elle s'arrête sur une configuration (q_f, v) ssi $v = {}^\omega B.f(u)B^\omega$.

$$\text{halt} : \langle p, u \rangle \mapsto \begin{cases} \text{oui} & \text{si } \varphi_p(u) \text{ est défini} \\ \text{non} & \text{sinon} \end{cases}$$

Problème de l'arrêt.

Entrée : un programme p et un mot u

Question : est-ce que $\text{halt}(\langle p, u \rangle) = \text{oui}$?

Indécidabilité

Théorème (Turing 1936). Le problème de l'arrêt est indécidable (*i.e.*, halt n'est pas calculable).

halt

u
→

diag

	ϵ	a	b	aa	ab	ba	bb	...
ϵ	halt							diag
a		halt						diag
b			halt					diag
aa				halt				diag
ab					halt			diag
ba						halt		diag
bb							halt	diag
diag								halt

p

```
def diag(n):  
    if halt(n,n) then  
        loop  
    else  
        return
```

par diagonalisation

Réductions et indécidabilité

Réduction many-one. $A \leq_m B$ si $\exists \varphi$ récursive telle que $\forall u \in \Sigma^*, u \in A \leftrightarrow \varphi(u) \in B$.

Pour montrer qu'un problème P est indécidable, on montre souvent que $K \leq_m P$ où $K = \{u \in \Sigma^* \mid \text{halt}(n) = \text{oui}\}$.

C'est d'ailleurs ce qu'on va faire dans cet exposé...

Théorème de Rice

Théorème. Soit F un ensemble de fonctions.

L'appartenance à l'ensemble des programmes p tels que $\varphi_p \in F$ est décidable ssi l'ensemble est trivial.

Idée. Si F est non trivial alors il existe p_F tel que $\perp \in F \leftrightarrow p_F \notin F$. Supposons $p_F \in F$ et $\perp \notin F$. On réduit l'arrêt à D_F .

```
def rice<p,u>(v):  
  run p on input u  
  run pF on input v
```

$$n \in K \leftrightarrow \text{rice}_n \in D_F$$

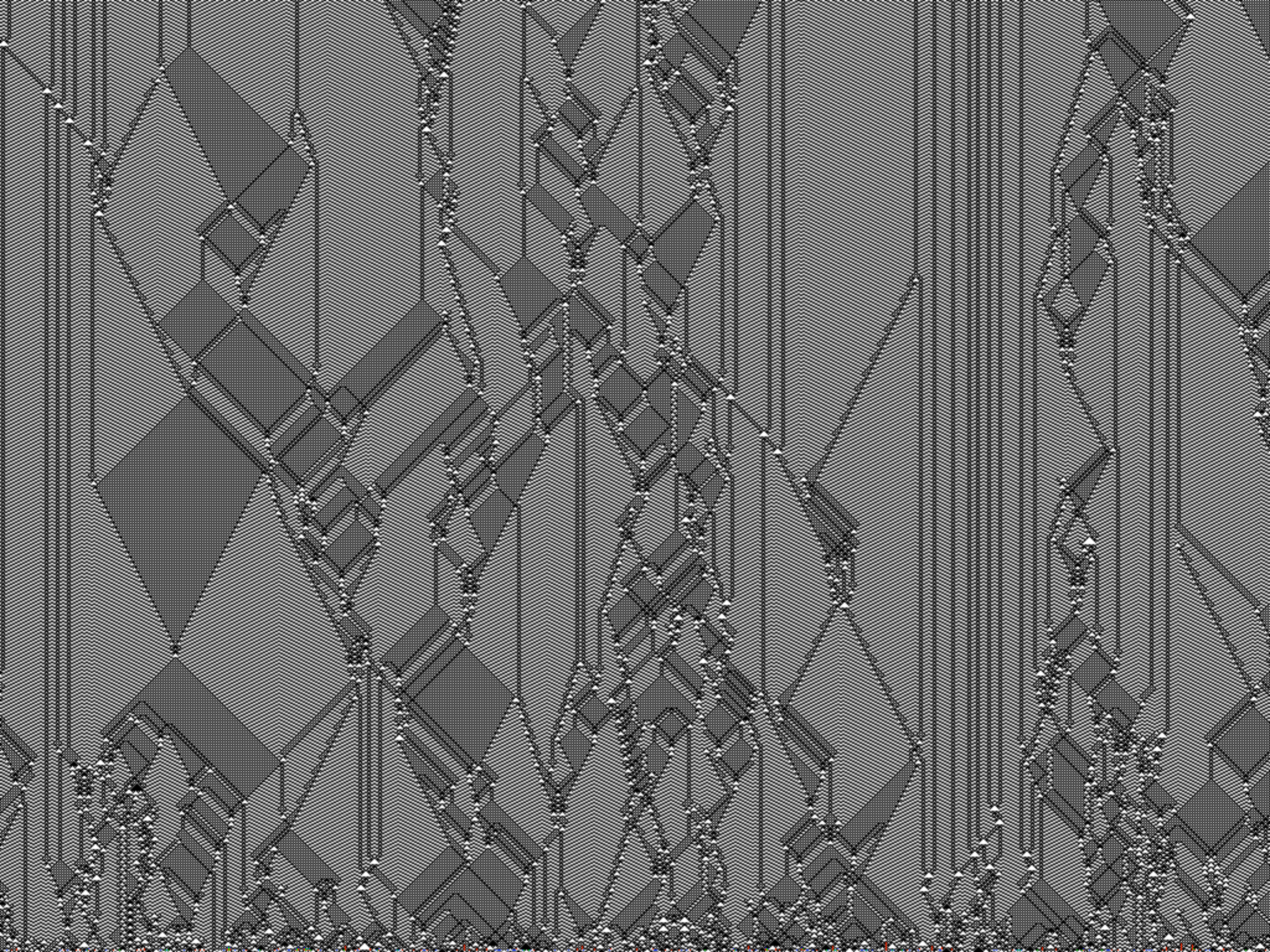
1. systèmes complexes et calcul

Systemes dynamiques et indécidabilité

Un système dynamique discret est une paire (X, f) où X est un espace topologique et f une fonction continue.

Ces objets calculent-ils ?

Des propriétés dynamiques peuvent-elles être indécidables ?



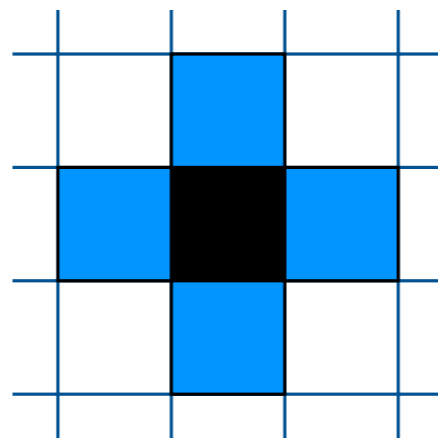
Automate cellulaire

Définition. Un *automate cellulaire* de dimension d est un triplet (Q, V, δ) où :

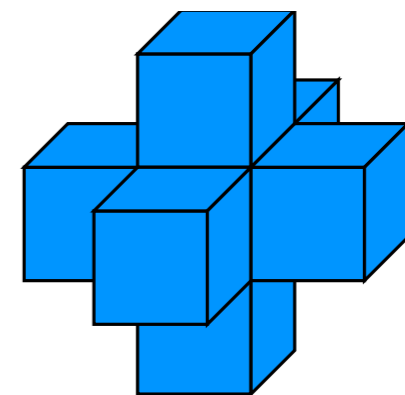
- Q est l'ensemble fini des états ;
- $V \subseteq_{\text{fini}} \mathbb{Z}^d$, est le voisinage ;
- $\delta : Q^V \rightarrow Q$ est la fonction locale de transition.



1D



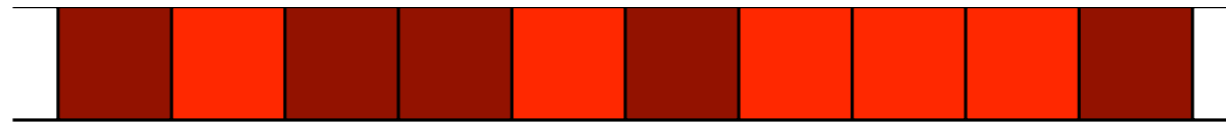
2D



3D

Configuration et fonction globale

Une *configuration* est une coloriage $c \in Q^{\mathbb{Z}^d}$ de l'espace.



La *fonction globale de transition* $G : Q^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow Q^{\mathbb{Z}^d}$ applique la règle locale uniformément, de manière synchrone :

$$\forall c \in Q^{\mathbb{Z}^d}, \forall p \in \mathbb{Z}^d, \quad G(c)_p = \delta(c_{p+v_1}, \dots, c_{p+v_{2d+1}}).$$

Diagramme espace-temps

La paire $(Q^{\mathbb{Z}^d}, G)$ définit un *systeme dynamique discret*.
L'*orbite* $\mathcal{O}(c)$ d'une configuration est la suite
 $\mathcal{O}(c)_t = G^t(c)$ où $G^0 = \text{Id}$ et $G^{t+1} = G \circ G^t$.

Un automate cellulaire est *périodique* si un de ses itérés est l'identité, *i.e.* $G^t = \text{Id}$.

Un *diagramme espace-temps* $\Delta \in Q^{\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d}$ est la représentation graphique d'une orbite $\mathcal{O}(c)$:

$$\forall t \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{Z}^d, \quad \Delta_t(p) = G^t(c)_p.$$

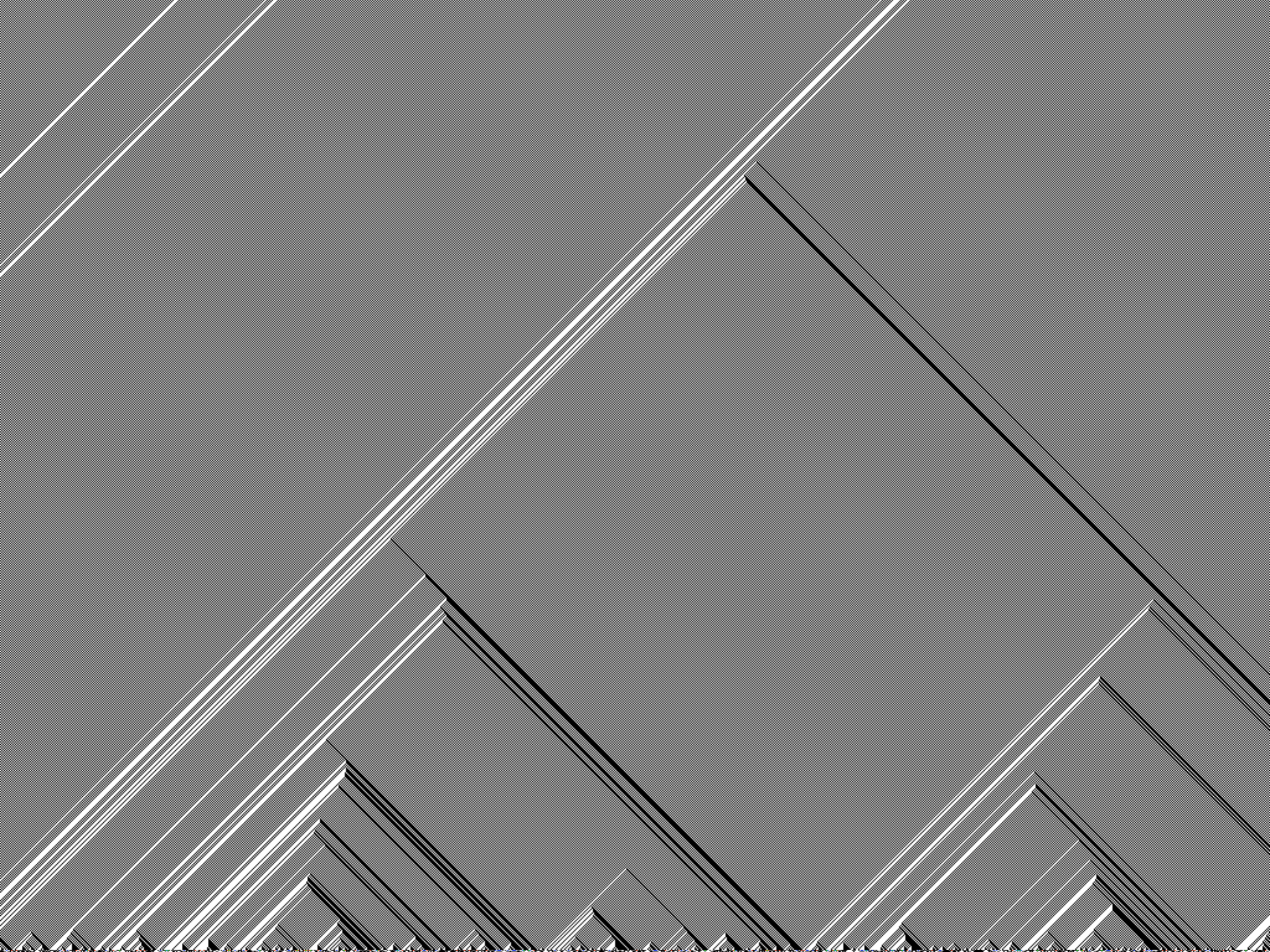
Exemples

$$\text{max} : (\{0, 1\}, \{-1, 0, 1\}, (x, y, z) \mapsto \text{max}(x, y, z))$$



$$\text{maj} : (\{0, 1\}, \{-1, 0, 1\}, (x, y, z) \mapsto \text{maj}(x, y, z))$$





Ensemble limite

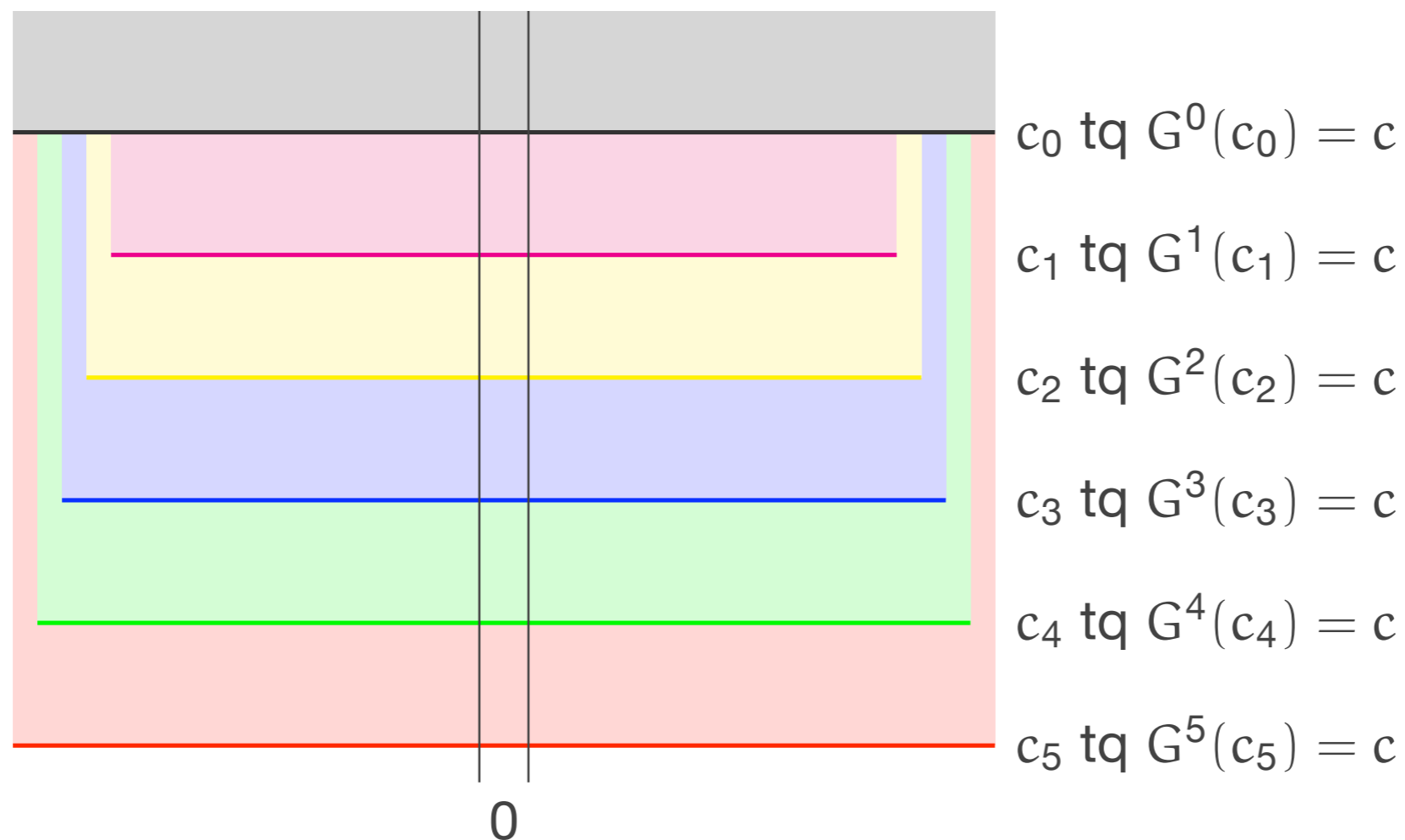
Définition. L'ensemble limite d'un AC est l'ensemble des configurations qui peuvent apparaître à tout temps de calcul :

$$\Lambda = \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \Lambda^{(t)} \quad \text{où} \quad \Lambda^{(t)} = G^t \left(Q^{\mathbb{Z}^d} \right)$$

- Par compacité, c'est un sous-shift (*compact*) non vide.
- Un AC est nilpotent si son ensemble limite est un singleton.
- Un AC est nilpotent avec état contaminant si l'état nilpotent q est contaminant, i.e. vérifie $\forall v \in Q^V, q \in v \rightarrow \delta(v) = q$.

Nilpotence et extraction

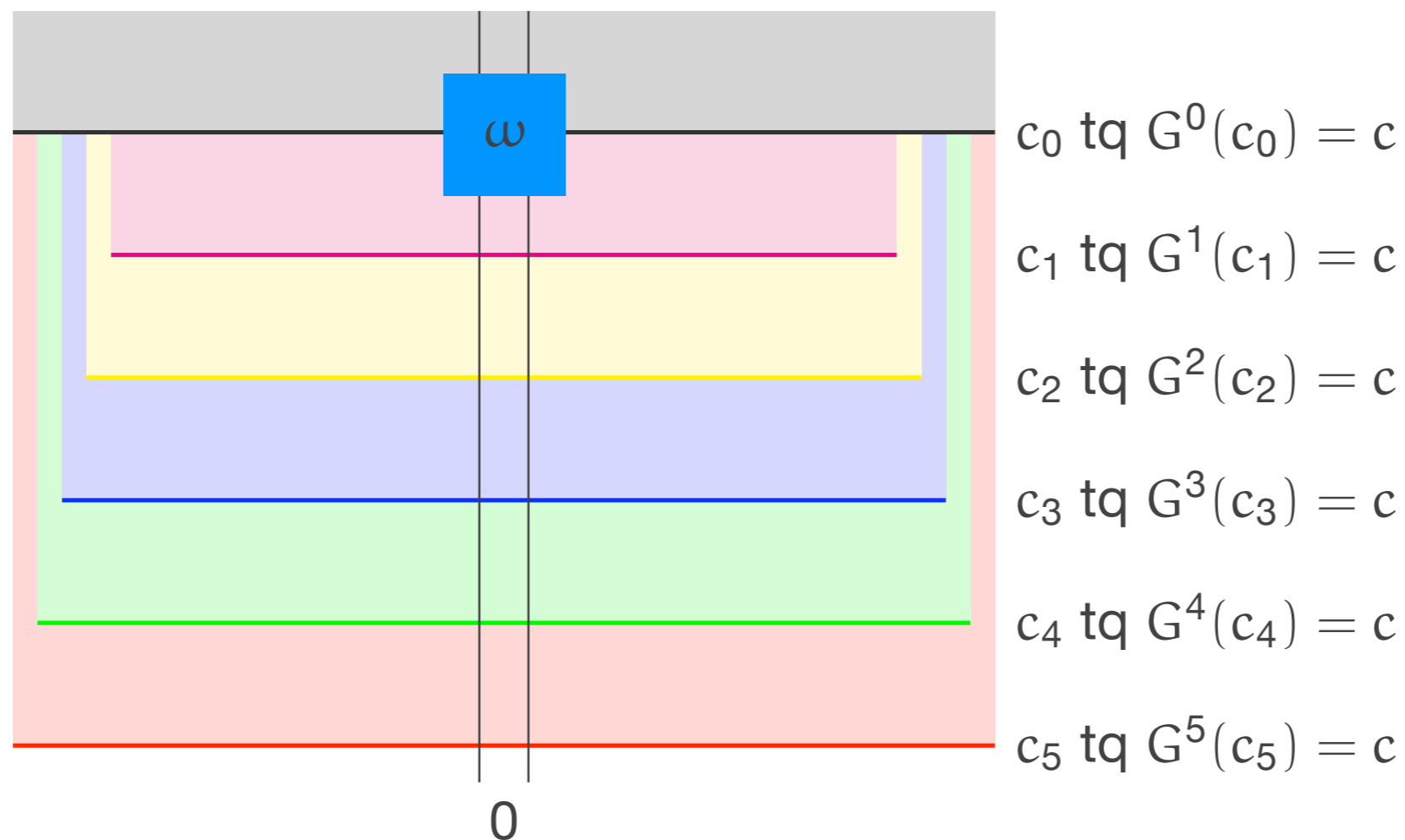
Les configurations de Λ sont exactement les configurations des diagrammes biinfinis $\Delta \in Q^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d}$.



par extraction (lemme de König ou compacité)

Nilpotence et extraction

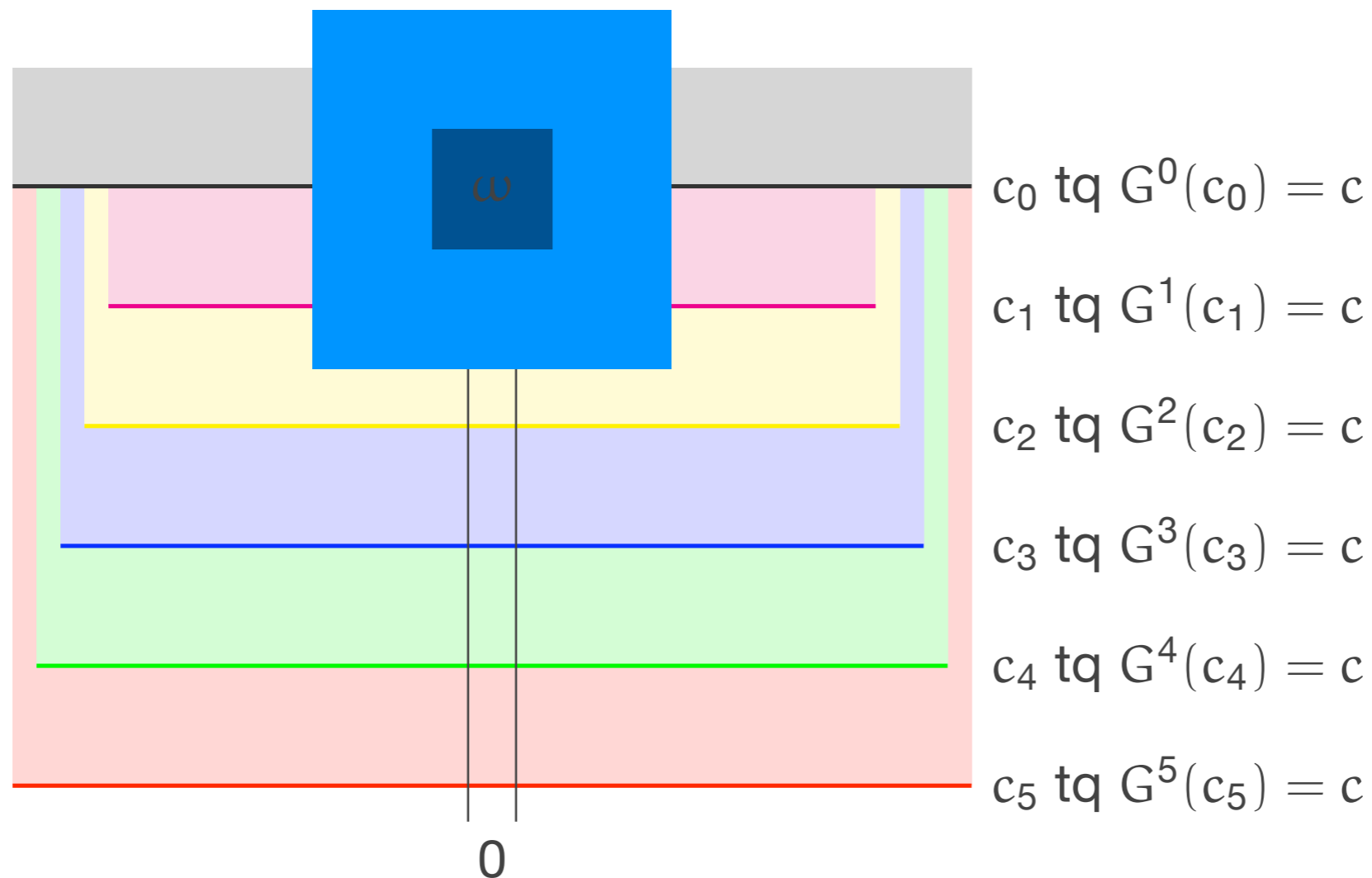
Les configurations de Λ sont exactement les configurations des diagrammes biinfinis $\Delta \in Q^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d}$.



par extraction (lemme de König ou compacité)

Nilpotence et extraction

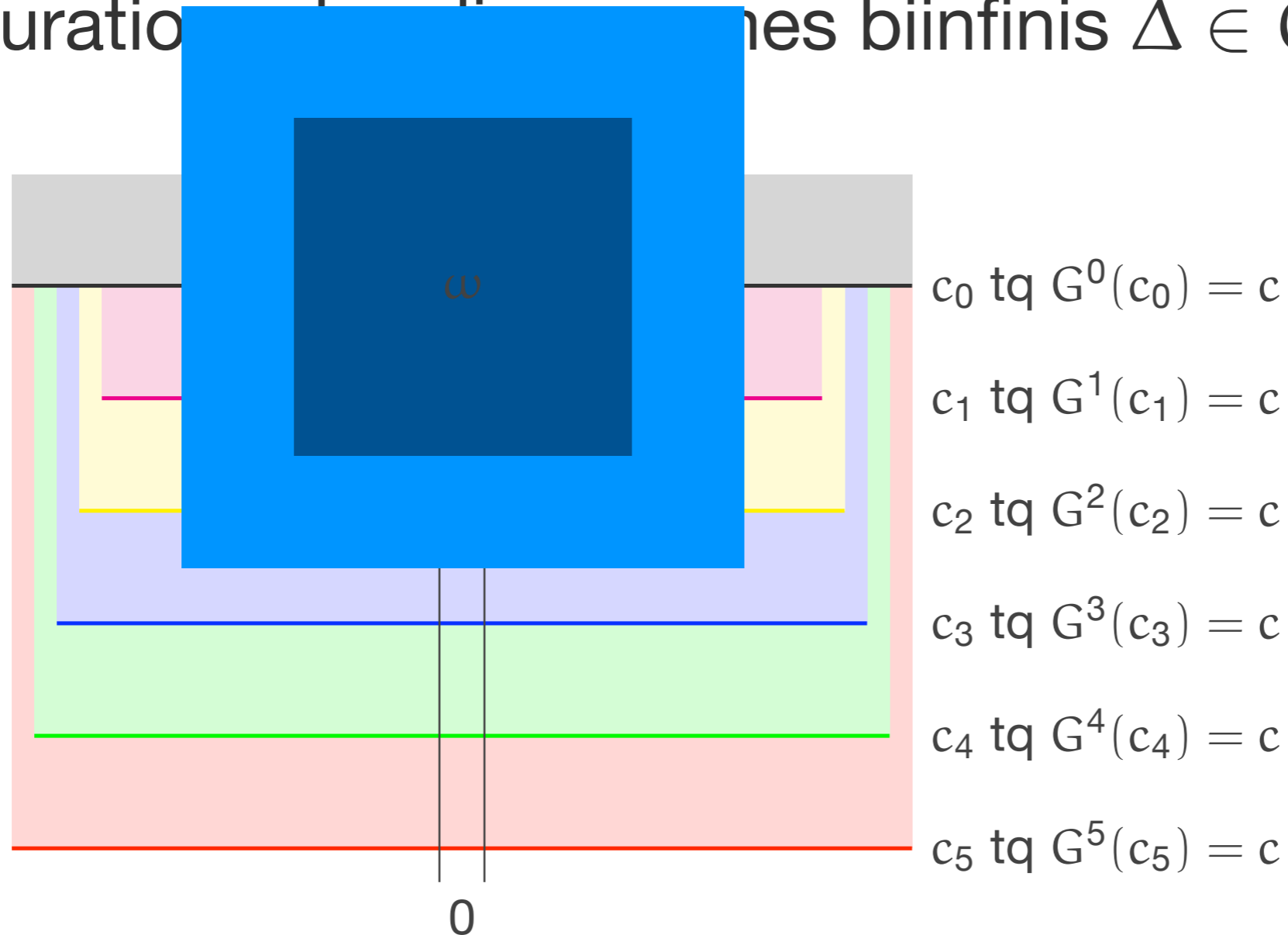
Les configurations de Λ sont exactement les configurations des diagrammes biinfinis $\Delta \in Q^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d}$.



par extraction (lemme de König ou compacité)

Nilpotence et extraction

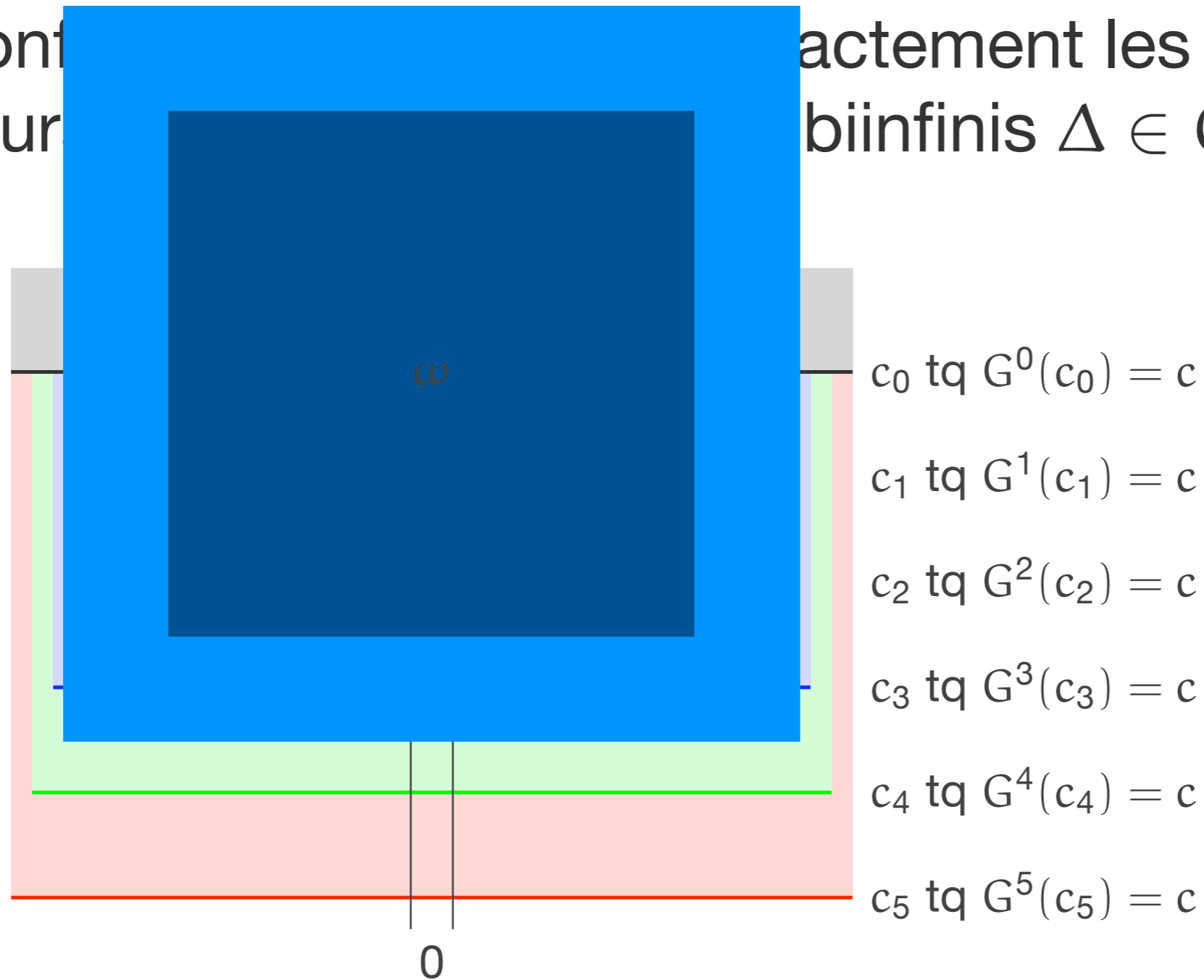
Les configurations de Λ sont exactement les configurations biinfinies $\Delta \in Q^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d}$.



par extraction (lemme de König ou compacité)

Nilpotence et extraction

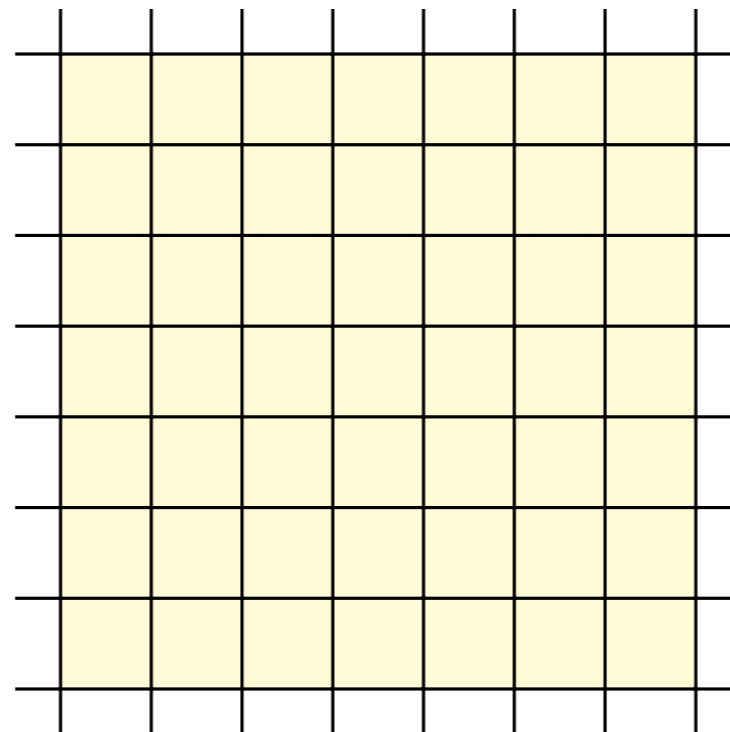
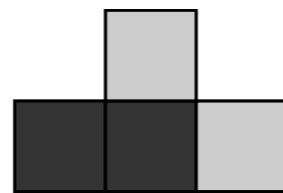
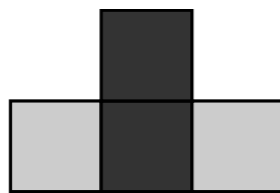
Les configurations $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ sont exactement les configurations biinfinies $\Delta \in Q^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d}$.



par extraction (lemme de König ou compacité)

Nilpotence et jeux de tuiles

Un AC avec état contaminant q est nilpotent ssi il n'existe pas de diagramme biinfini sans état q .



Bibliographie

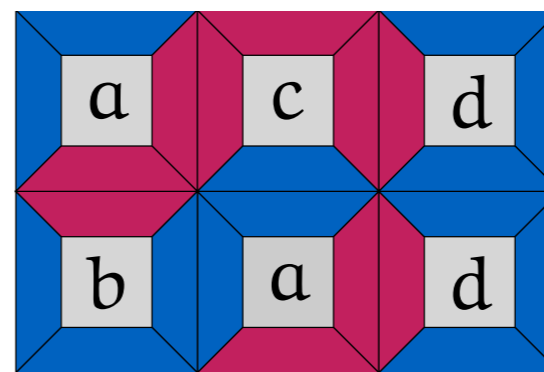
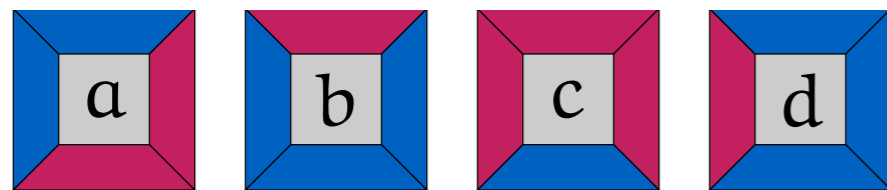
J. Kari, *Theory of cellular automata: A survey*, Theoretical Computer Science **334** (2005), 3–33.

K. Čulik II, J. K. Pachl, S. Yu, *On the Limit Sets of Cellular Automata*. SIAM J. Comput. **18** (1989) no. 4, 831–842.

2. pavages et tuiles de Wang

Domino Problem

“Assume we are **given a finite set of square plates** of the same size with **edges colored**, each in a different manner. Suppose further there are infinitely many copies of each plate (plate type). We are **not permitted to rotate or reflect a plate**. The question is to find an effective procedure by which we can **decide**, for each given finite set of plates, **whether we can cover up the whole plane** (or, equivalently, an infinite quadrant thereof) **with copies of the plates** subject to the restriction that **adjoining edges must have the same color**.”



(Wang, 1961)

Historique: la classe de formules AEA

1961. Wang et Büchi étudient le *classical decision problem* restreint aux formules du premier ordre AEA. Wang introduit **DP**. Büchi introduit l'**Immortality Problem**.

1961. L'*entscheidungsproblem* restreint à AEA est montré indécidable par Kahr-Moore-Wang à partir d'un problème plus simple sur les dominos.

1964. Berger, un étudiant de Wang, prouve l'indécidabilité de **DP** obtenant ainsi une nouvelle preuve de l'indécidabilité d'AEA.

1965. Hooper, un étudiant de Wang, prouve l'indécidabilité de **IP** obtenant ainsi une nouvelle preuve de l'indécidabilité d'AEA.

Motif

Un *motif* \mathcal{P} est une partie de \mathbb{Z}^2

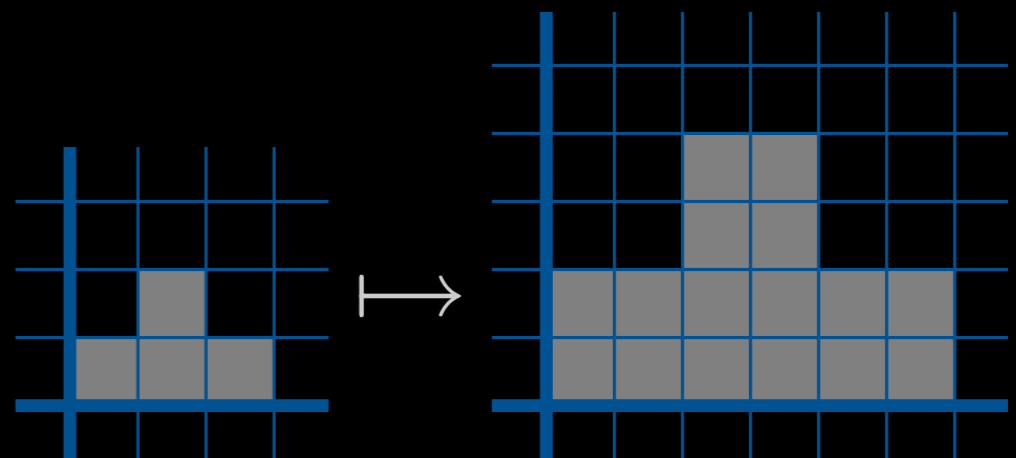
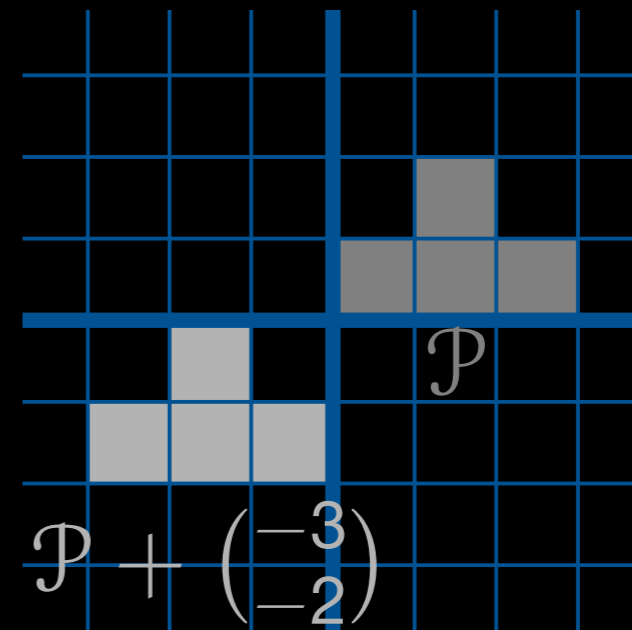
$$\mathcal{P} + \mathbf{u} = \{z + \mathbf{u} \mid z \in \mathcal{P}\}$$

Motifs puissance de deux \boxplus^i

$$\boxplus^i = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x < 2^i\}^2$$

Étirement deux-deux $\square(\mathcal{P})$

$$\square(\mathcal{P}) = \{2z + \mathbf{c} \mid z \in \mathcal{P}, \mathbf{c} \in \boxplus\}$$



Coloriage

Un *coloriage* $\mathcal{C} : \mathcal{P} \rightarrow \Sigma$ couvre un motif \mathcal{P} avec les lettres d'un alphabet fini Σ .

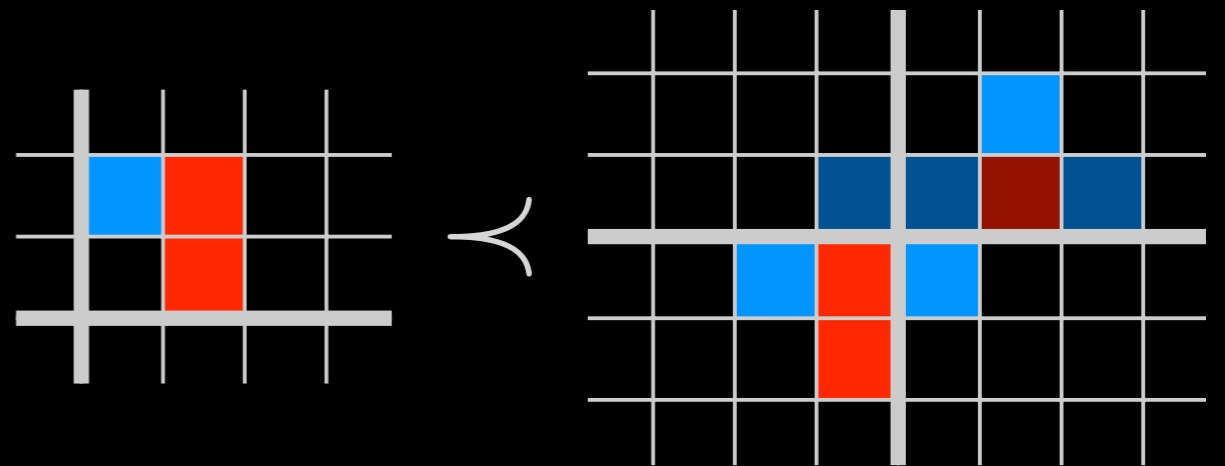
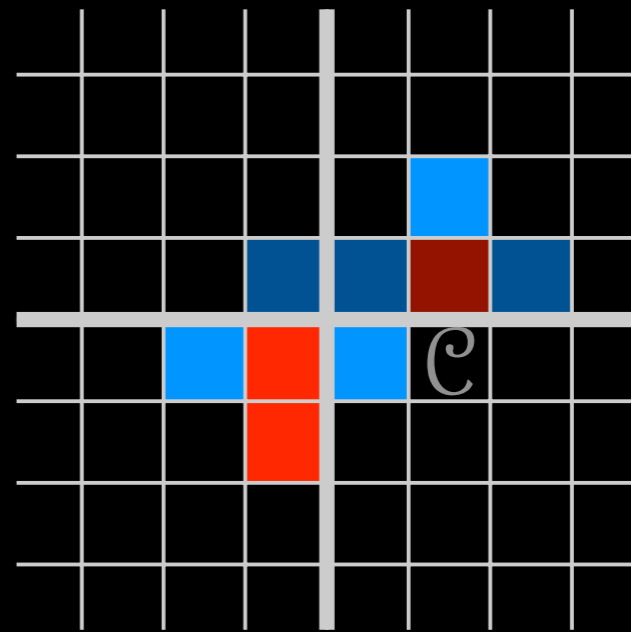
$u \cdot \mathcal{C}$ est le *translaté* de \mathcal{C} , par un vecteur $u \in \mathbb{Z}^2$, vérifiant:

$$\forall z \in \mathcal{P}, \quad u \cdot \mathcal{C}(z + u) = \mathcal{C}(z)$$

\mathcal{C} *apparaît* dans \mathcal{C}' ,

noté $\mathcal{C} \prec \mathcal{C}'$ si

$$\exists u \in \mathbb{Z}^2, \quad \mathcal{C} = (u \cdot \mathcal{C}')|_{\text{Sup}(\mathcal{C})}$$

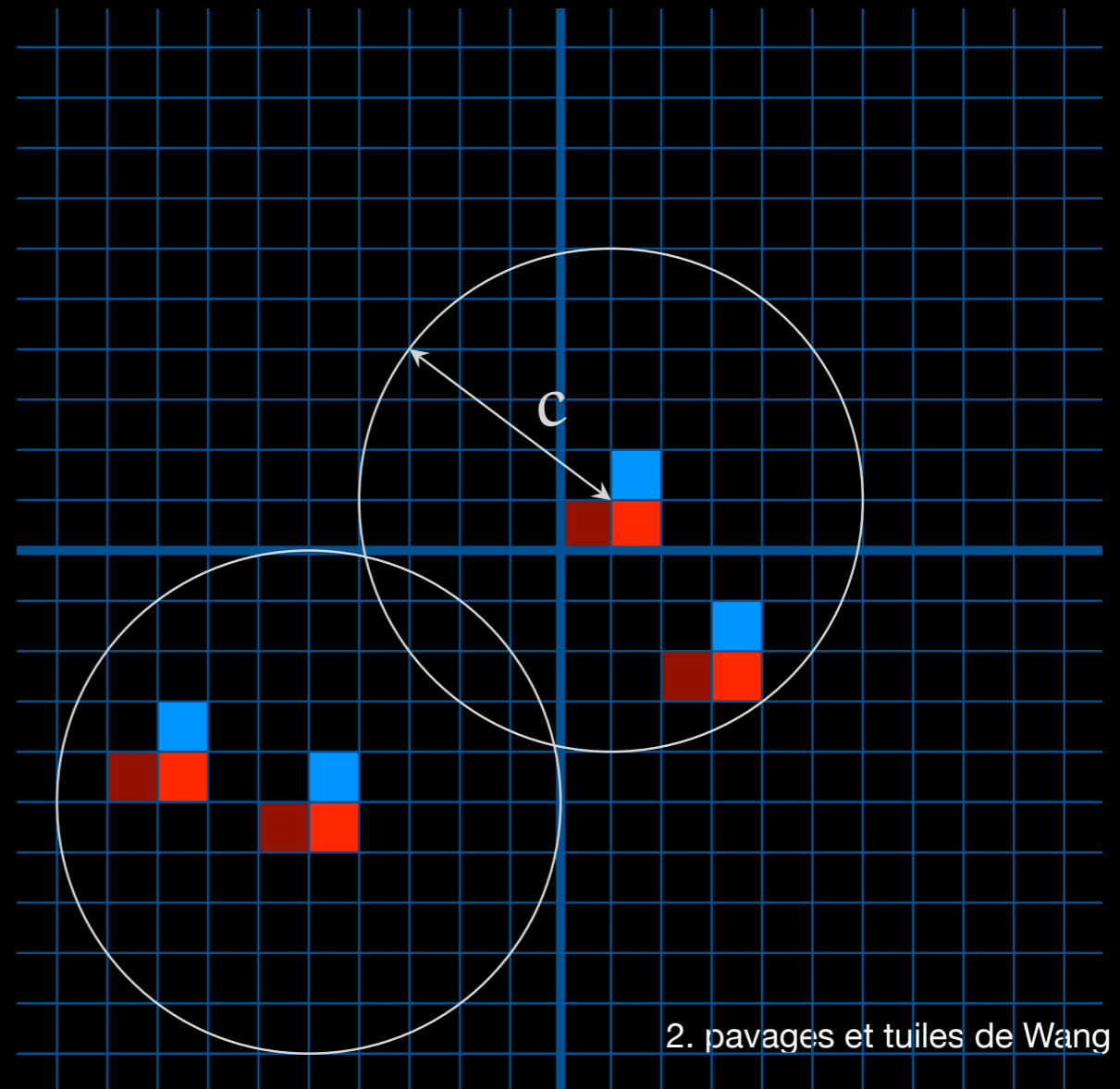
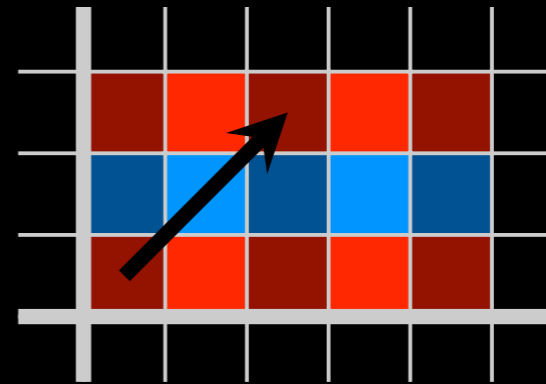


(Quasi-)Périodicité

\mathcal{C} est *périodique* de période u
si $\mathcal{C}|_{\mathcal{P}} = (u \cdot \mathcal{C})|_{\mathcal{P}}$
où $\mathcal{P} = \text{Sup}(\mathcal{C}) \cap \text{Sup}(u \cdot \mathcal{C})$.

Un ensemble de coloriages
est *apériodique* si 0 est leur
seul vecteur de périodicité.

\mathcal{C} est *quasi-périodique* si
 $\forall \mathcal{P} \subseteq_{\text{fini}} \text{Sup}(\mathcal{C}) \exists c \forall u$
 $(u \cdot \mathcal{C})|_{\mathcal{P}} = \mathcal{C}|_{\mathcal{P}} \rightarrow \exists v \leq c$
 $v \neq 0 \wedge (v \cdot u \cdot \mathcal{C})|_{\mathcal{P}} = \mathcal{C}|_{\mathcal{P}}$



Sous-shifts

Soit X l'ensemble des coloriage de support \mathbb{Z}^2 . Munissons X de la topologie produit de la topologie discrète sur Σ .

Cette topologie est compatible avec la métrique d définie pour tous coloriage $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \in X$ par $d(\mathcal{C}, \mathcal{C}') = 2^{-\min\{|z|, \mathcal{C}(z) \neq \mathcal{C}'(z)\}}$.

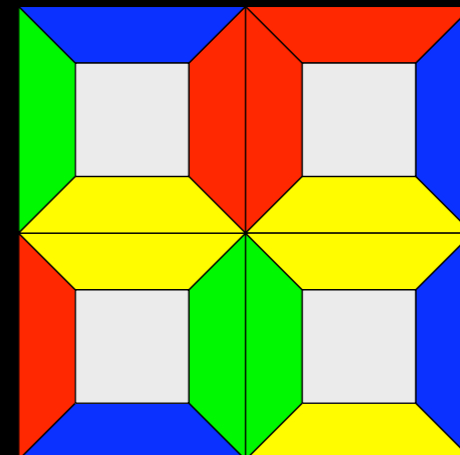
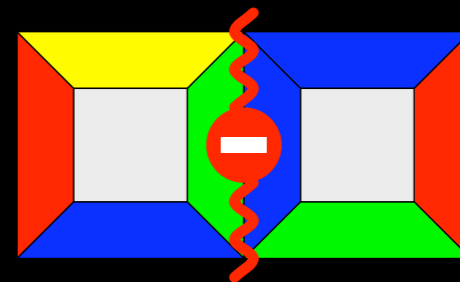
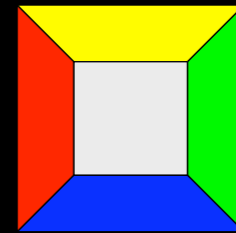
Cette topologie est compacte et parfaite. Une partie de X topologiquement close et close par translation est un *sous-shift* de la symbolique dynamique.

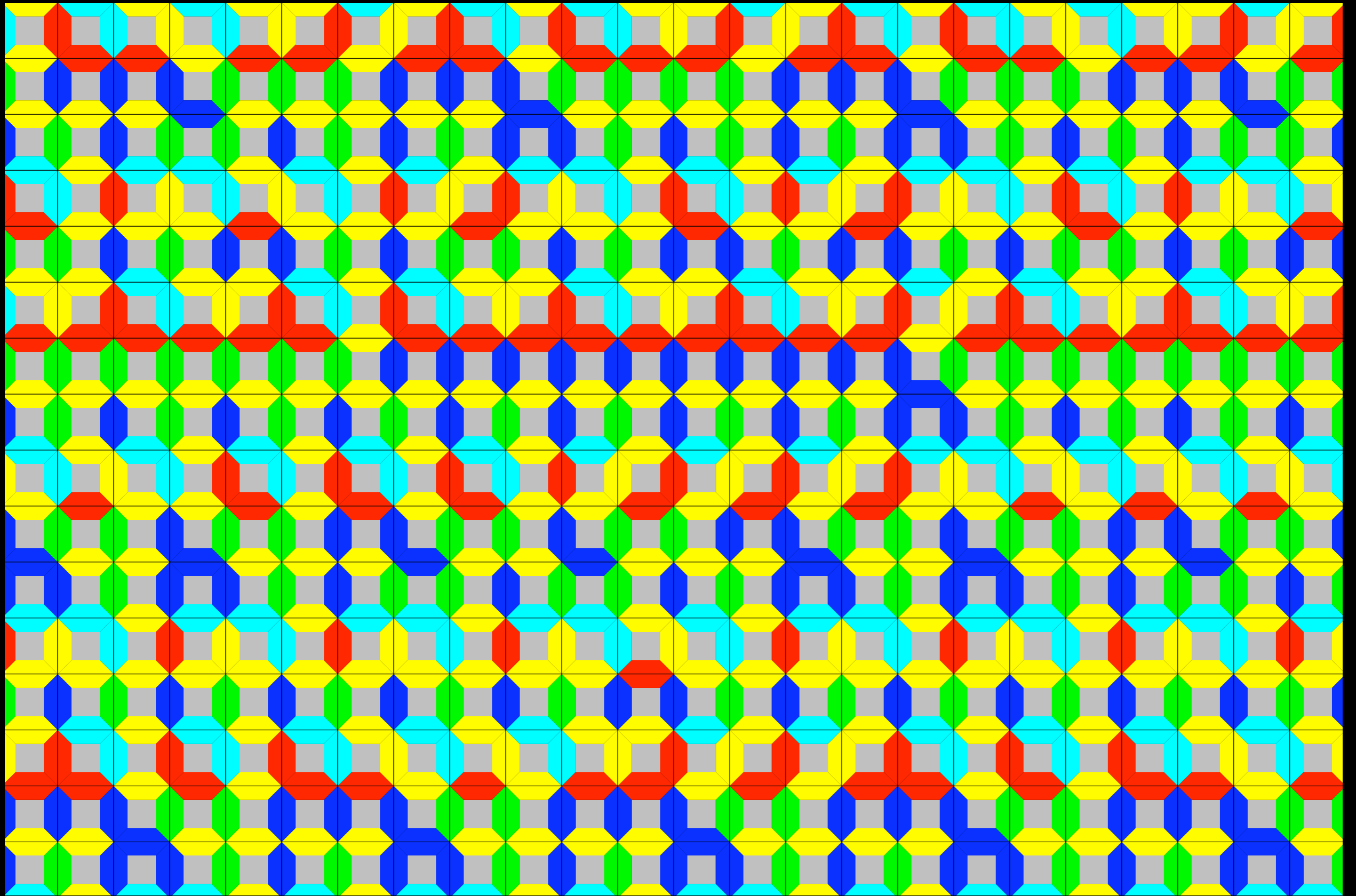
Les pavages sont les *sous-shifts de type fini*: les sous-shifts définis par un ensemble fini de mots interdits.

Tuiles de Wang

- Une tuile de Wang est un carré unité aux arêtes colorées.
- Un jeu de tuiles est un ensemble fini de tuiles de Wang.
- On pave uniquement par translations de tuiles (pas de rotation), en respectant les contraintes de couleur le long des arêtes.

$$\tau \subseteq \mathbb{C}^4$$





Pavage du plan avec des tuiles de Wang

Jeux de tuiles ne pavant pas le plan

Si un jeu de tuile ne pave pas le plan, il existe une taille de carré qu'il ne pave pas.

par extraction (lemme de König ou compacité)

Jeux de tuiles ne pavant pas le plan

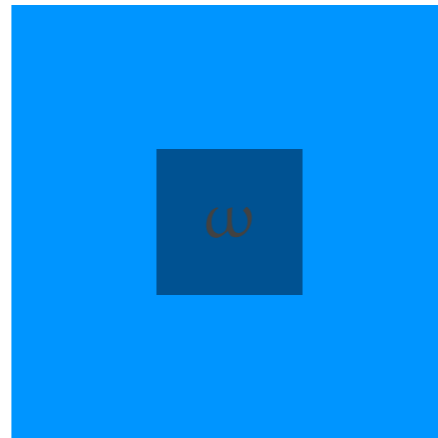
Si un jeu de tuile ne pave pas le plan, il existe une taille de carré qu'il ne pave pas.



par extraction (lemme de König ou compacité)

Jeux de tuiles ne pavant pas le plan

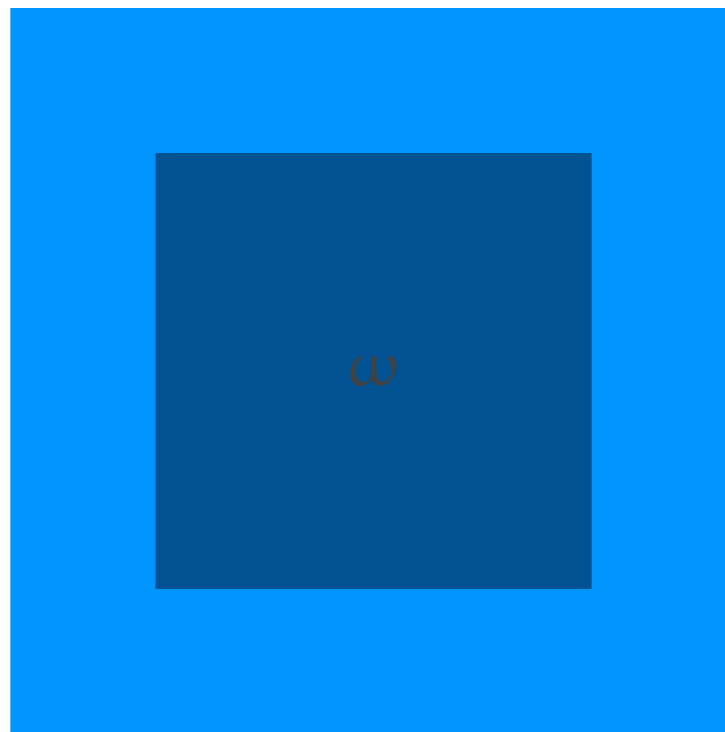
Si un jeu de tuile ne pave pas le plan, il existe une taille de carré qu'il ne pave pas.



par extraction (lemme de König ou compacité)

Jeux de tuiles ne pavant pas le plan

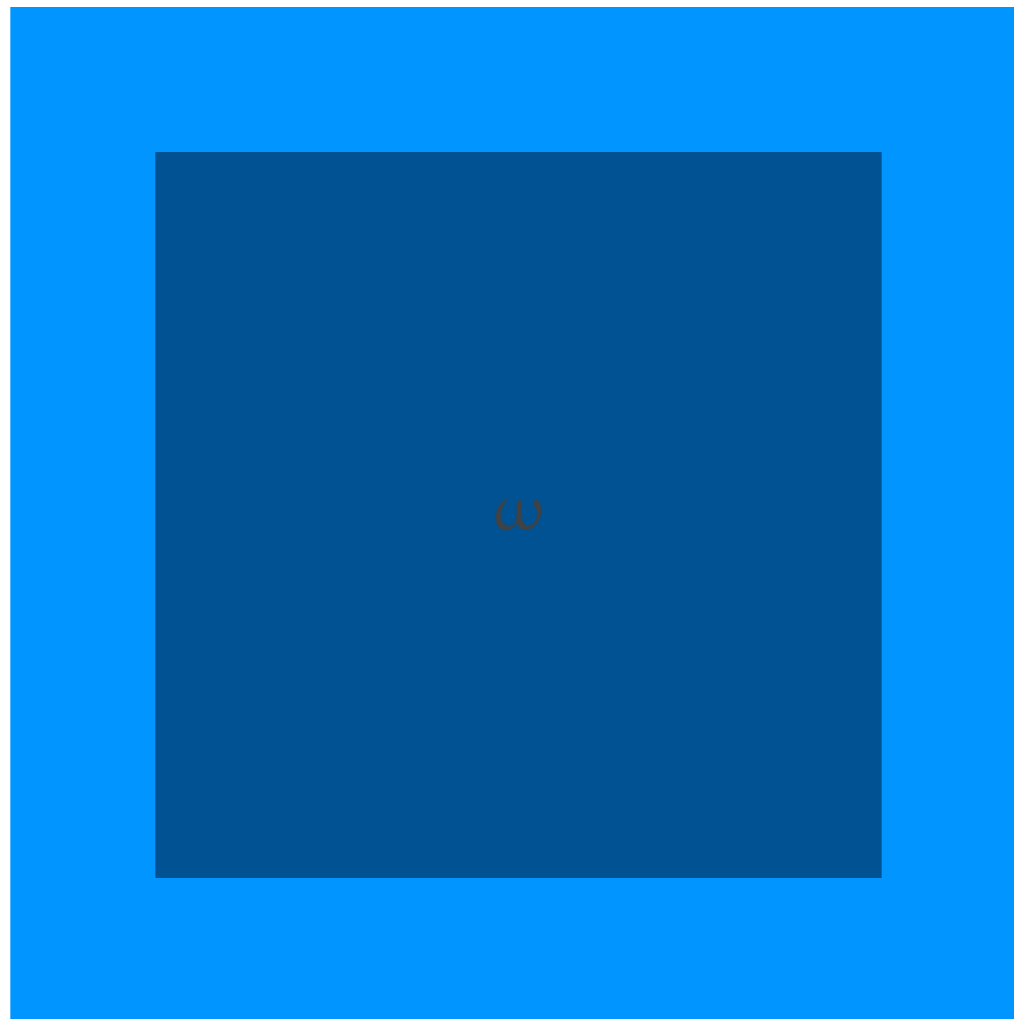
Si un jeu de tuile ne pave pas le plan, il existe une taille de carré qu'il ne pave pas.



par extraction (lemme de König ou compacité)

Jeux de tuiles ne pavant pas le plan

Si un jeu de tuile ne pave pas le plan, il existe une taille de carré qu'il ne pave pas.



par extraction (lemme de König ou compacité)

Relation Domino

Relation domino $\mathcal{R} \subseteq Y \times Y$:

$\forall a, b, c, d \in Y^4$

$a\mathcal{R}c \wedge a\mathcal{R}d \wedge b\mathcal{R}d \rightarrow b\mathcal{R}c$

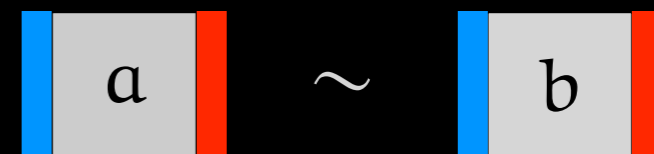
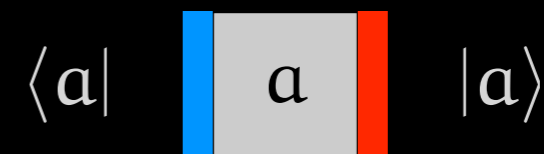
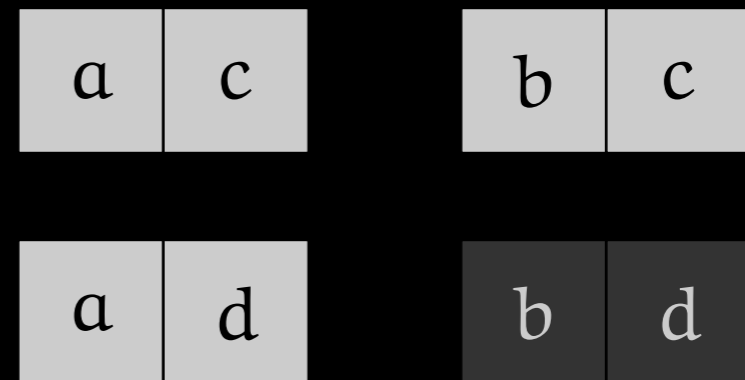
Couleur droite : $(a, b) \sim_{\mathcal{R}} |a\rangle$

Couleur gauche : $(a, b) \sim_{\mathcal{R}} \langle b|$

Paire dégénérée :

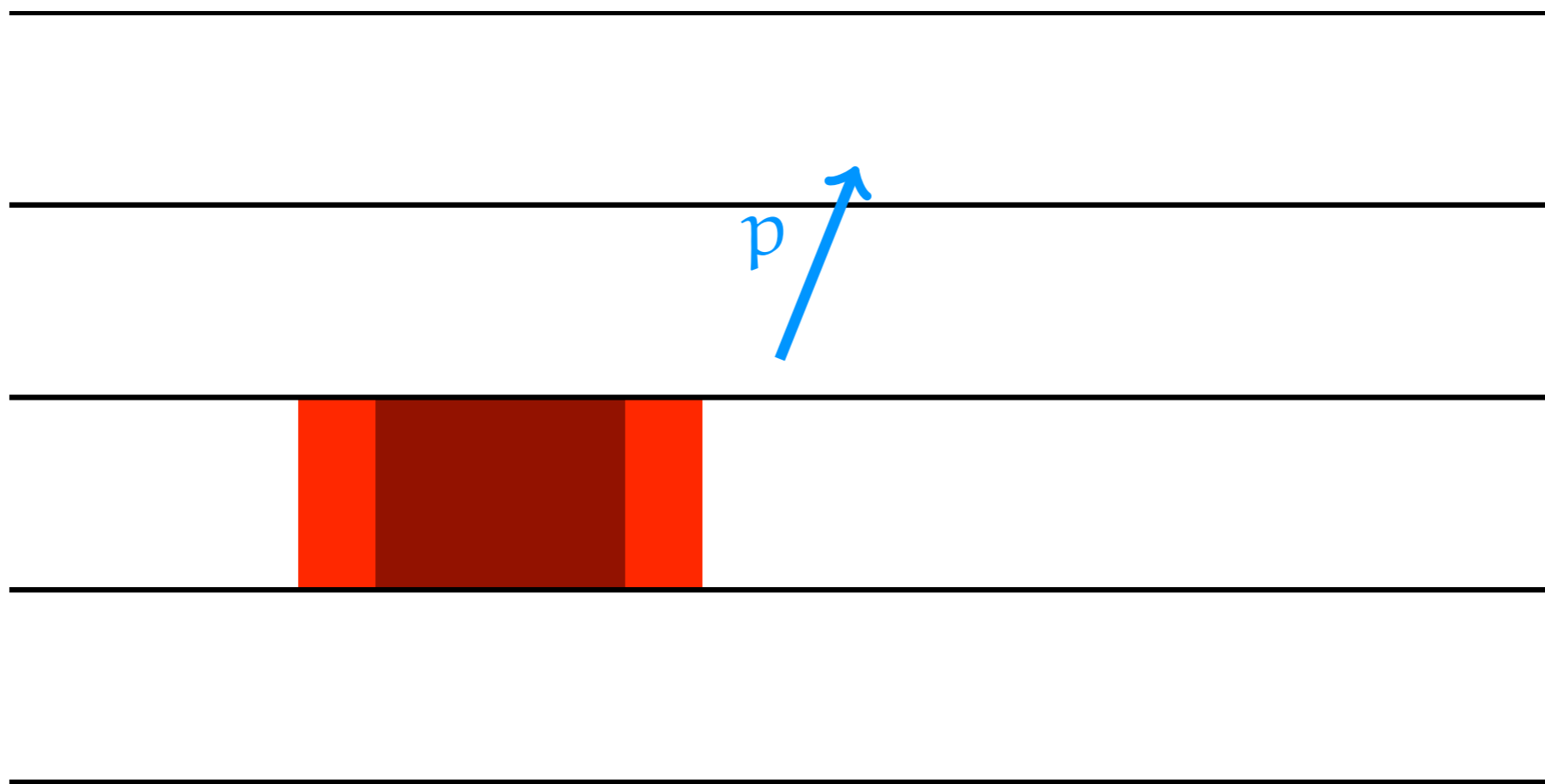
$\langle a| = \langle b| \wedge |a\rangle = |b\rangle$

Un *jeu de tuiles* τ est un triplet
 $(T, \mathcal{H}, \mathcal{V})$



Périodicité et bipériodicité

Un jeu de tuile qui admet un pavage périodique admet un pavage bipériodique.



Bibliographie

H. Wang, *Proving theorems by pattern recognition II*, Bell System Tech. Journal **40** (1961), 1–41.

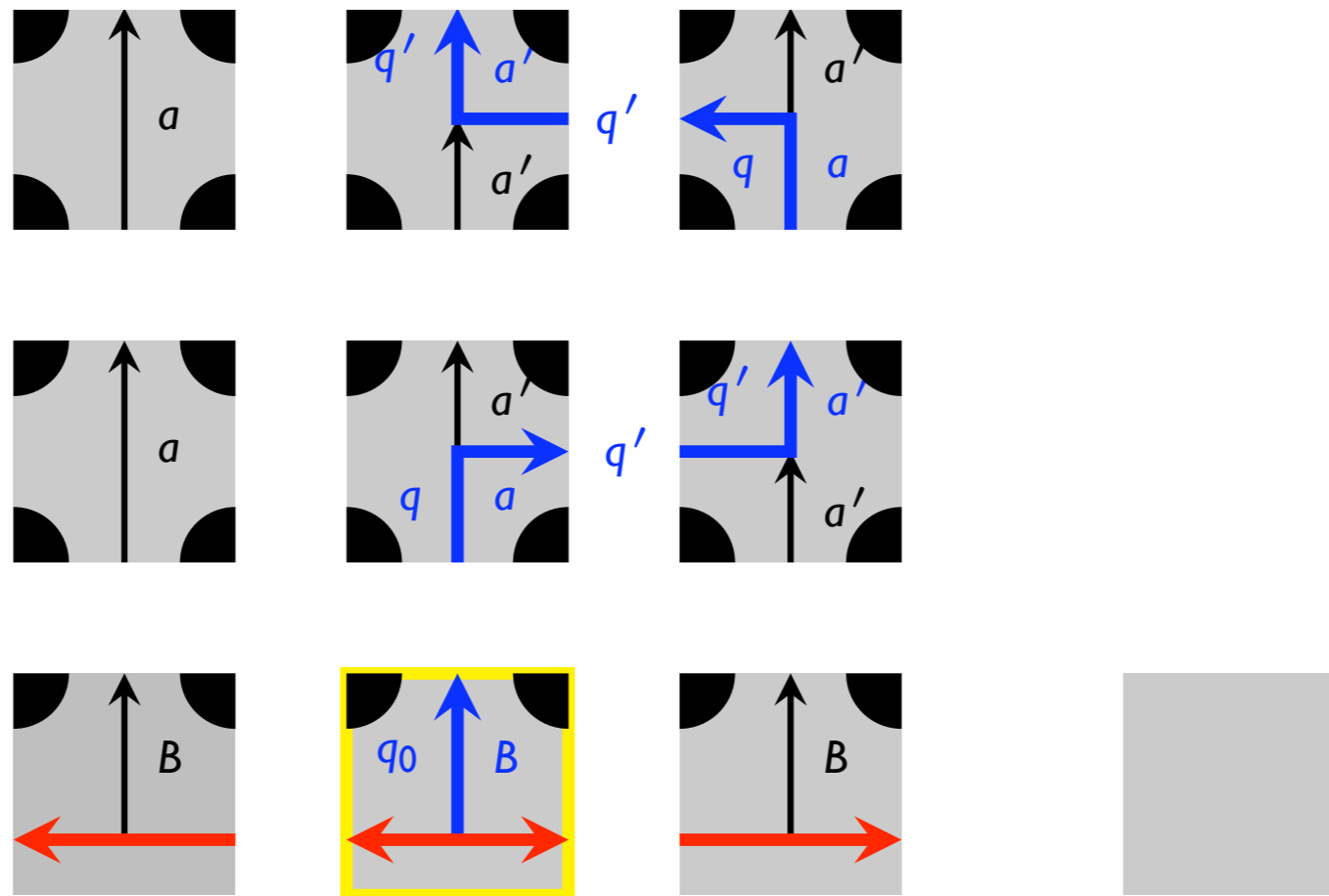
B. Grünbaum and G. C. Shephard, *Tilings and patterns*, A Series of Books in the Mathematical Sciences, W. H. Freeman and Company, 1989.

C. Radin, *Miles of tiles*, volume 1 of Student Mathematical Library, AMS, 1999.

A. Ballier, B. Durand, E. Jeandel, *Structural aspects of tilings*, STACS 2008, [oai:hal.archives-ouvertes.fr:hal-00145800_v2](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00145800_v2).

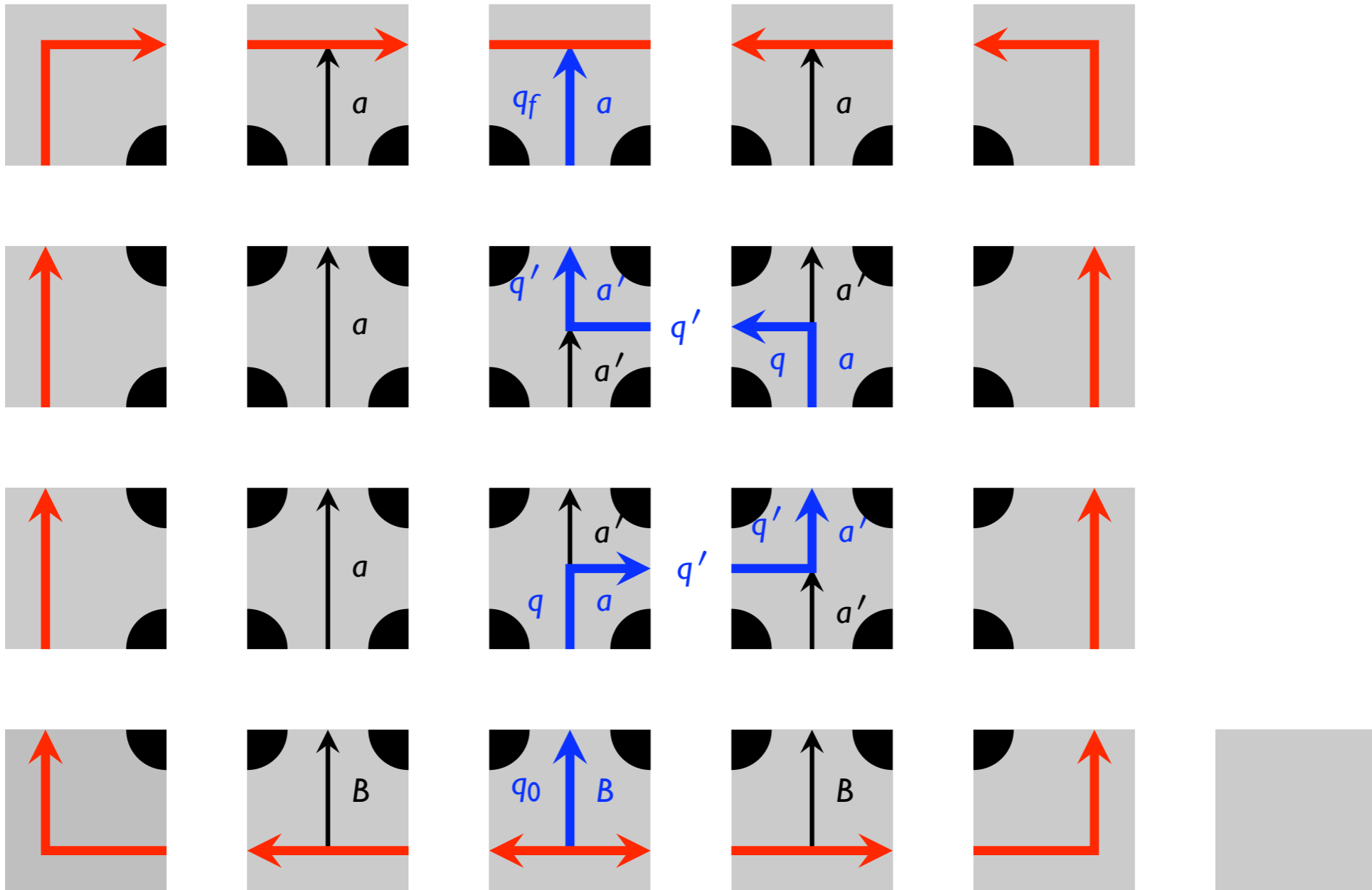
3. pavabilité à symétrie brisée

Pavabilité avec une tuile fixée

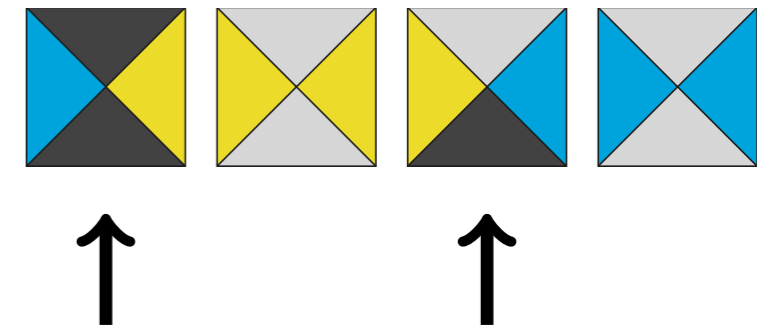
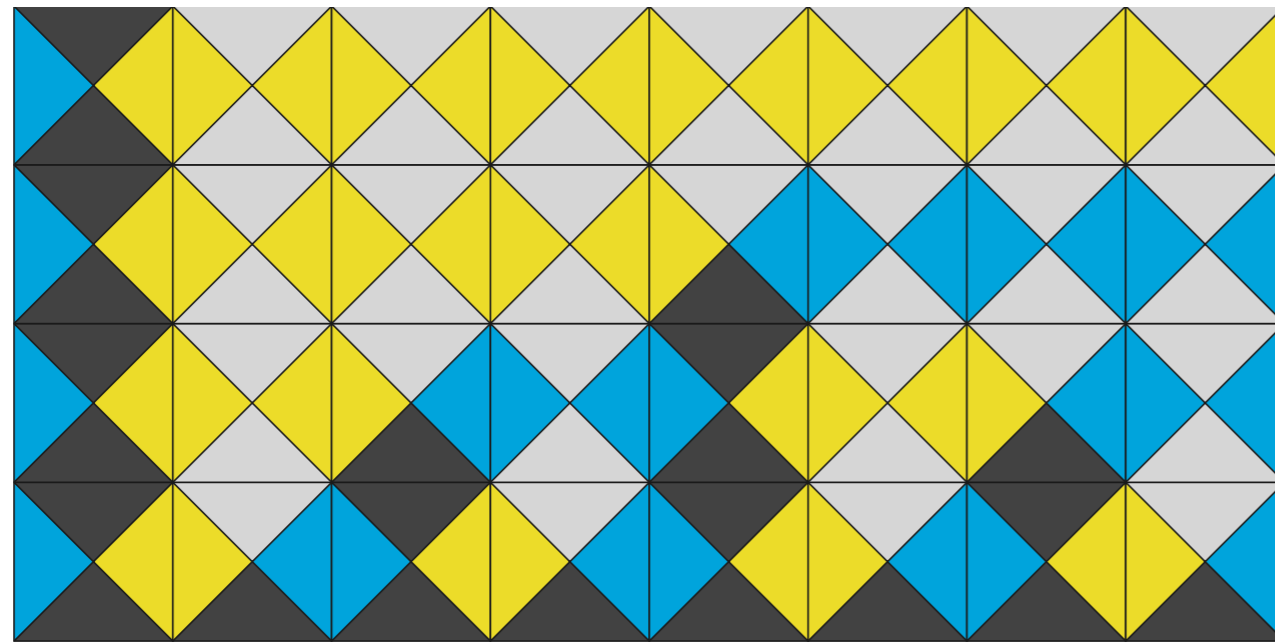


pas de tuile d'arrêt

Pavabilité finie



Pavabilité avec un contrainte diagonale



demi-plan à ligne contrainte

+ calcul Turing dans les zones monochromes

+ rotation astucieuse pour passer à la diagonale

Bibliographie

A. S. Kahr, E. F. Moore, and H. Wang, *Entscheidungsproblem reduced to the $\forall\exists\forall$ case*, Proc. Natl. Acad. Science, **48** (1962), no. 3, 365–377.

B. Durand, *The Surjectivity Problem for 2D Cellular Automata*, J. Comput. Syst. Sci. **49** (1994) no. 3, 718–725.

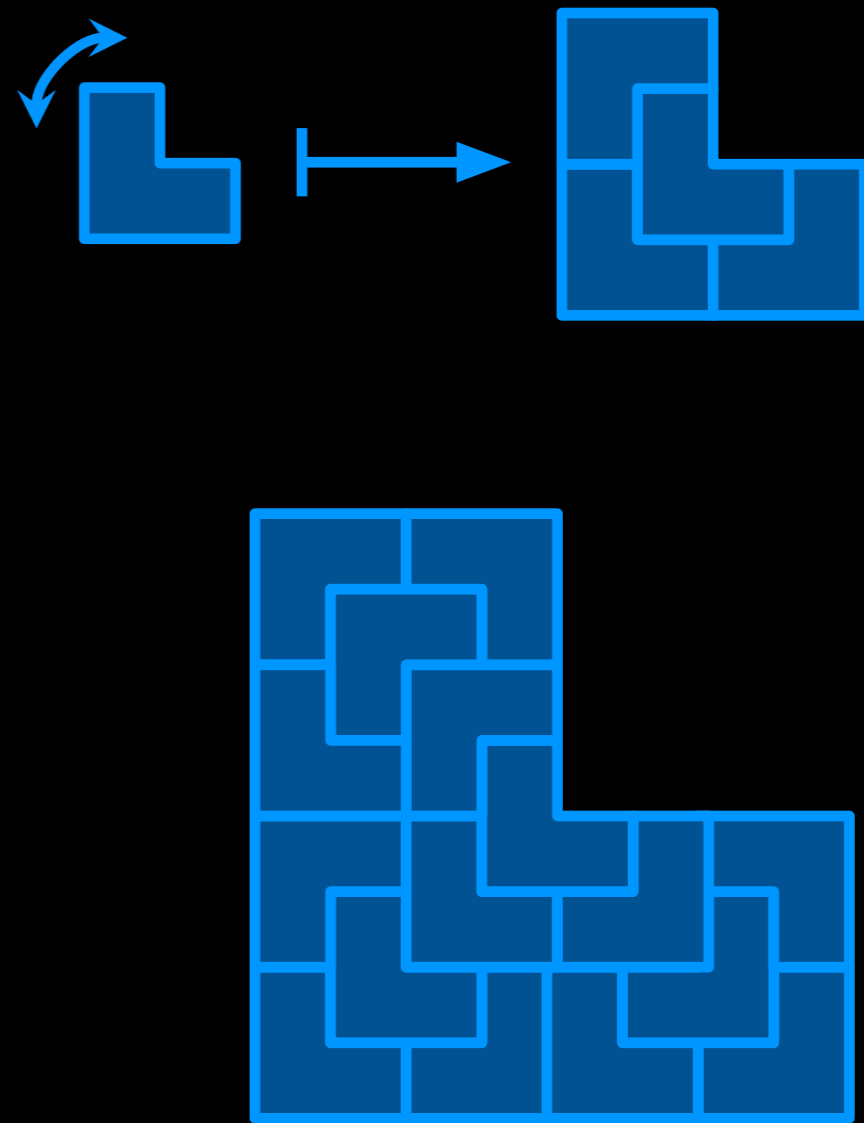
4. pavabilité et apériodicité

Apériodicité et **DP**

- Si un jeu de tuiles admet un pavage périodique alors il admet un pavage bipériodique.
- Les pavages bipériodiques sont récursivement énumérables.
- Si un jeu de tuiles ne pave pas le plan, il existe une borne sur la taille maximale d'un carré pavable.
- Tout jeu de tuiles admet un pavage quasi-périodique.
- Construisons un jeu de tuiles apériodique qui ne produit que des pavages quasi-périodiques !
- Apériodicité rime avec substitution...

Substitutions

- Les substitutions géométriques permettent de définir facilement des coloriage du plan récurrents apériodiques.
- Cependant, des arguments subtils sont nécessaires: dissection, inflation, facteur d'étirement, etc.
- La substitution classique du L (ou chaise).



2x2 Substitutions

- Une substitution 2x2 associe à un alphabet fini des carrés 2x2 de lettres du même alphabet.

$$s : \Sigma \rightarrow \Sigma^{\boxplus}$$

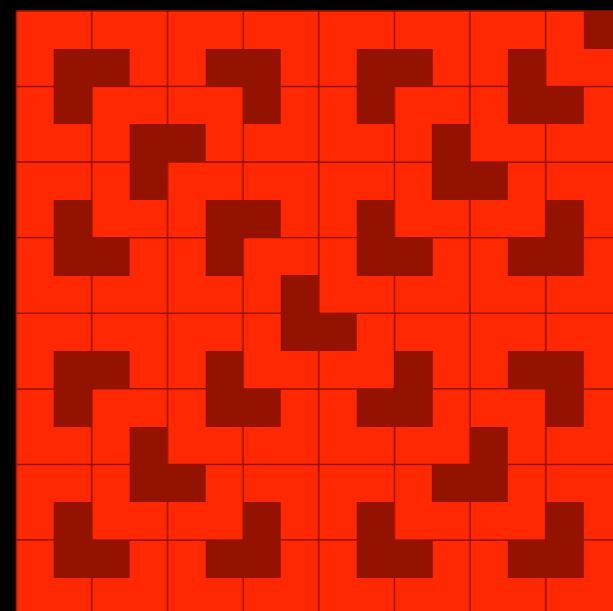
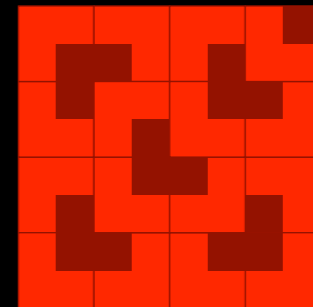
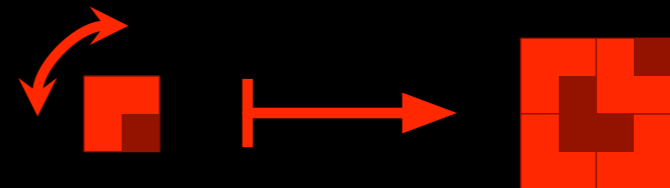
- En l'itérant on obtient des carrés plus grands.

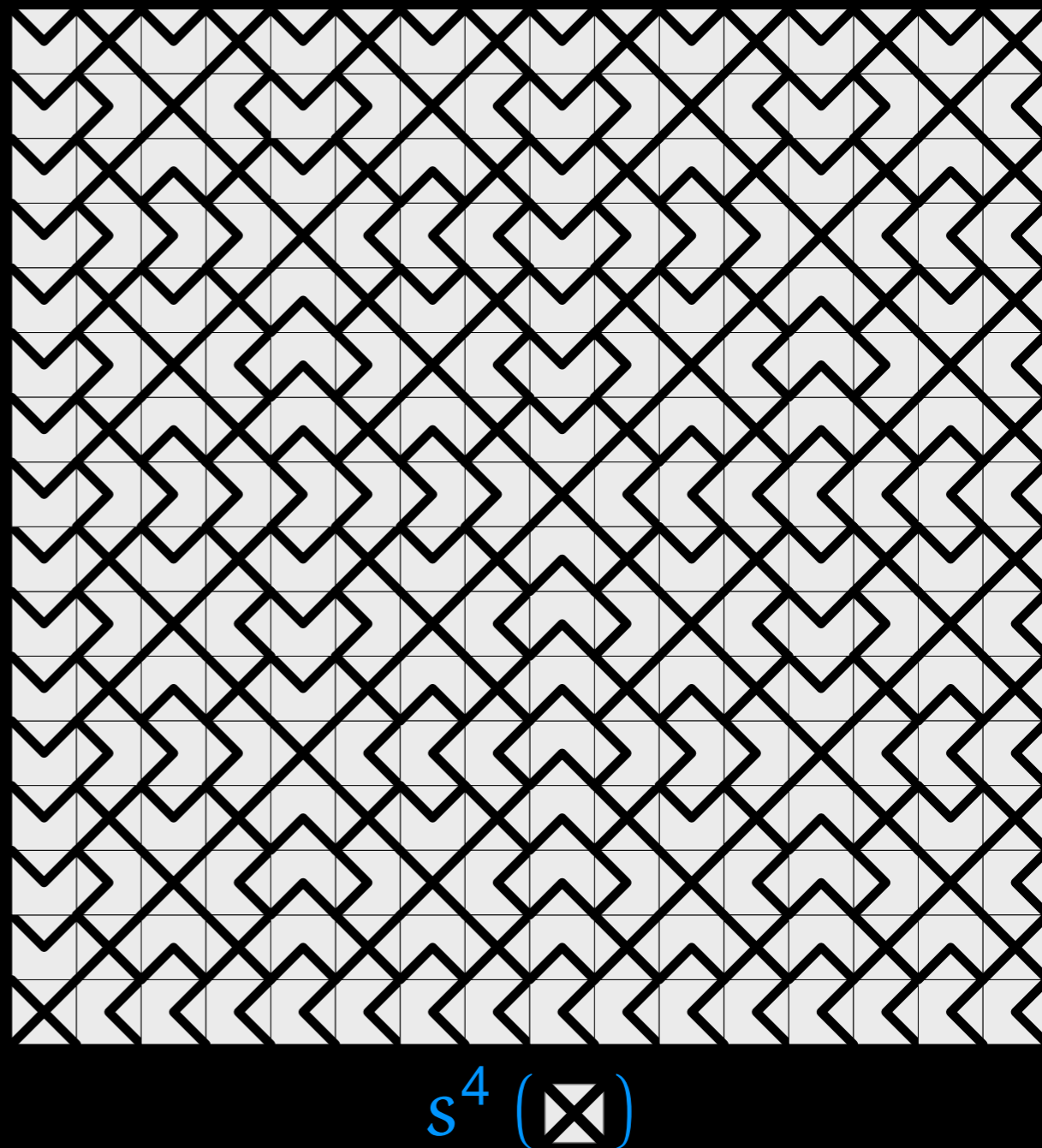
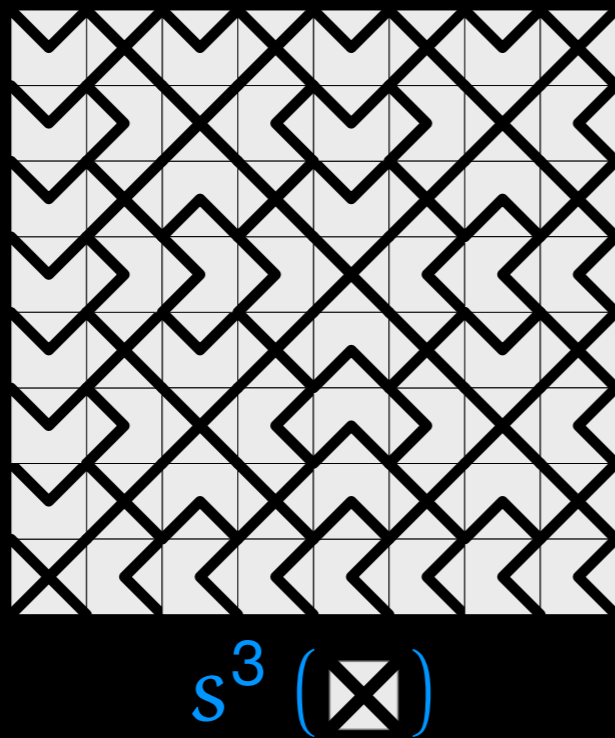
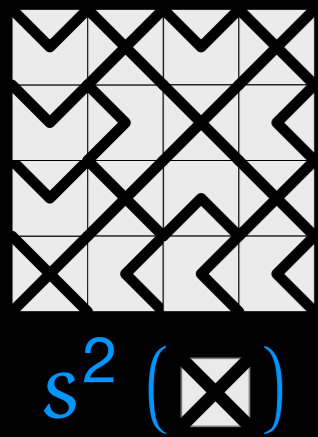
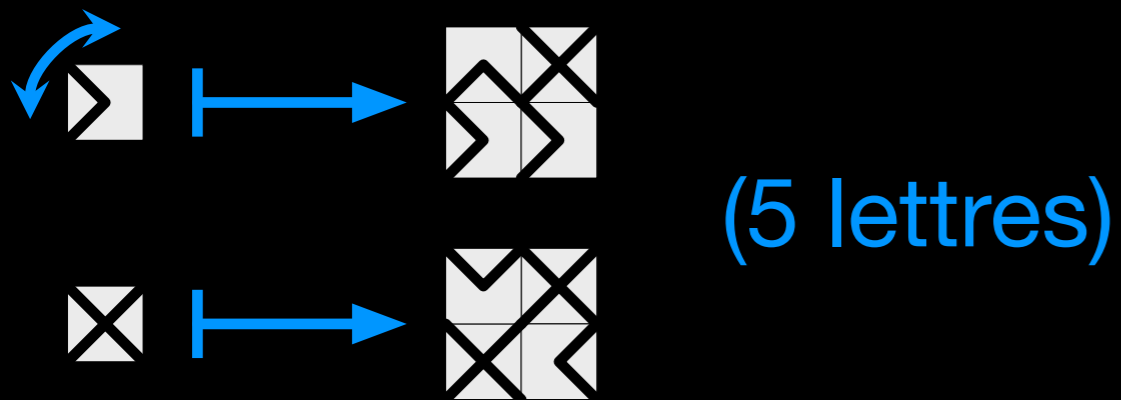
$$S : \Sigma^{\mathcal{P}} \rightarrow \Sigma^{\square(\mathcal{P})}$$

$$\forall z \in \mathcal{P}, \forall c \in \boxplus,$$

$$S(\mathcal{C})(2z + c) = s(\mathcal{C}(z))(c)$$

$$S(u \cdot \mathcal{C}) = 2u \cdot S(\mathcal{C})$$





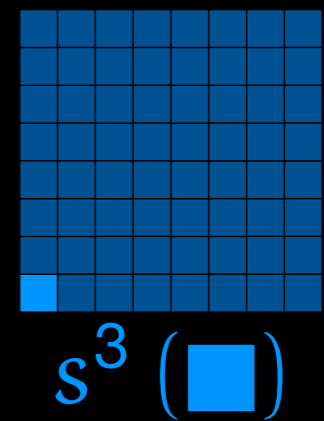
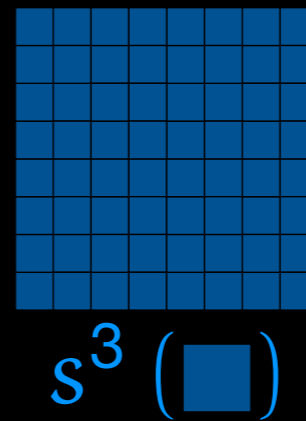
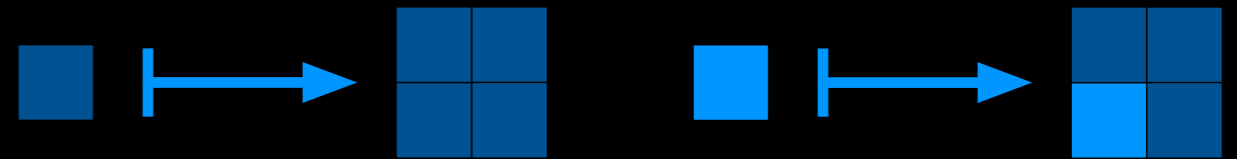
Une autre substitution en L

Clôture de coloriage ?

- Qu'est-ce qu'un coloriage du plan généré par une substitution ?
- Faut-il y voir la *clôture* des coloriage générés par itération, à translation près.
- Comment vérifier localement la propriété !?

$\mathcal{C} \in X_s$ si

$\forall \mathcal{C}' \prec_{\text{fini}} \mathcal{C} \exists a, i \mathcal{C}' \prec S^i(a)$



$$X_s = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array} \right\}$$

Ensemble limite !

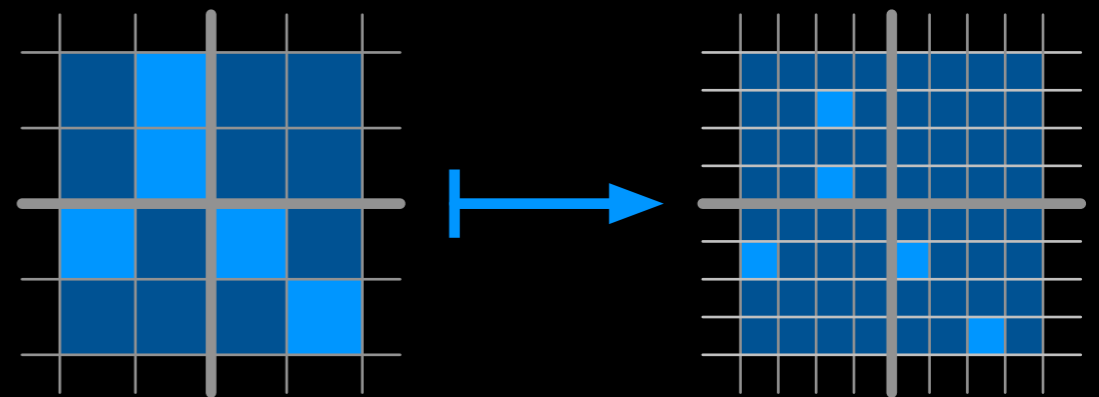
- La fonction globale de substitution est continue.

$$X = \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$$

- On peut définir un ensemble limite comme pour les AC.
- On obtient strictement plus de coloriage que par clôture.

$$\Lambda_S = \bigcap_n \Lambda_S^n \text{ où } \Lambda_S^0 = \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$$

$$\Lambda_S^{n+1} = \{u \cdot S(\mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \in \Lambda_S^n, u \in \boxplus\}$$



$$\Lambda_S = X_S \cup \left\{ \begin{array}{c} y \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{dark blue} & \text{light blue} & \text{dark blue} \\ \hline \text{light blue} & \text{dark blue} & \text{light blue} \\ \hline \end{array} \\ x \end{array} \right\}_{x,y \in \mathbb{Z}^2}$$

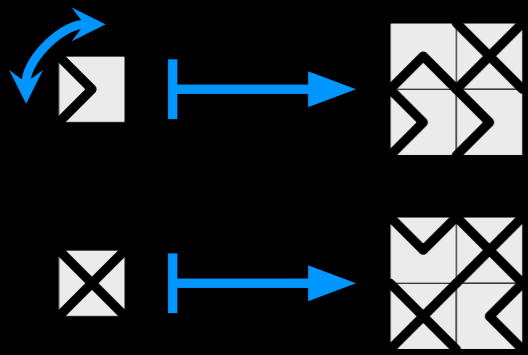
Histoire

Une *Histoire* d'un coloriage $\mathcal{C} \in X$ est une suite $(\mathcal{C}_i, u_i) \in (X \times \boxplus)^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_i = u_i \cdot S(\mathcal{C}_{i+1})$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

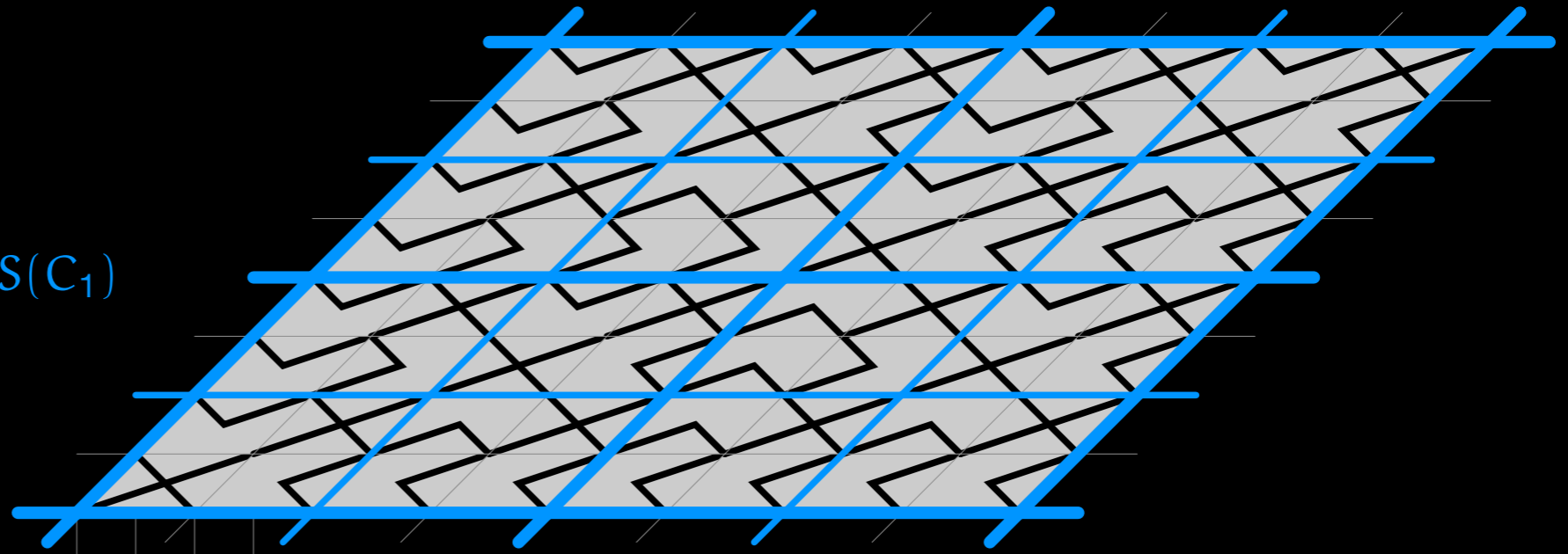
Proposition 1. Λ_S est exactement l'ensemble des coloriage possédant une Histoire.

$$\supseteq \mathcal{C}_0 \in \Lambda_S$$

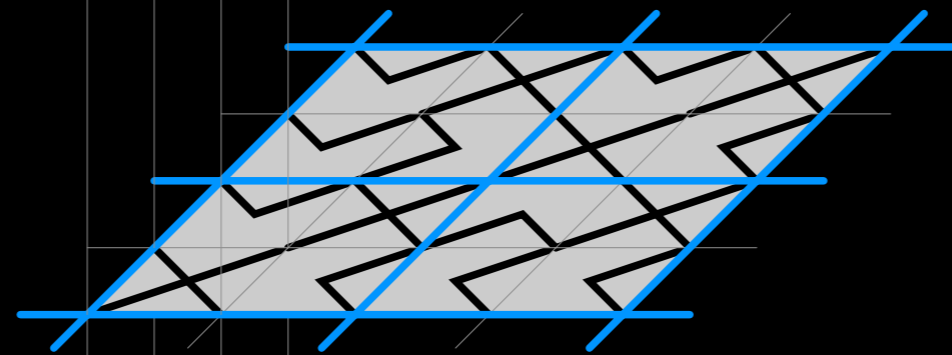
$$\subseteq \text{Par compacité}$$



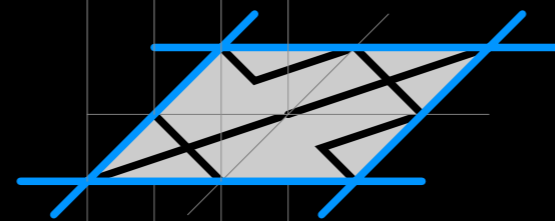
$$C_0 = \sigma_0 \circ S(C_1)$$



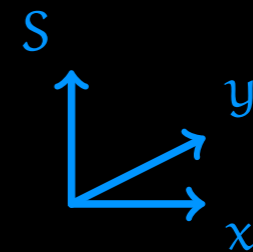
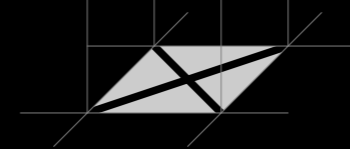
$$C_1 = \sigma_1 \circ S(C_2)$$



$$C_2 = \sigma_2 \circ S(C_3)$$



$$C_3 = \sigma_3 \circ S(C_4)$$



Histoire d'un coloriage de l'ensemble limite

histoires

L'*histoire* en $z \in \mathbb{Z}^2$ pour une Histoire $(\mathcal{C}_i, u_i) \in (X \times \boxplus)^{\mathbb{N}}$ est la suite $(a_i, v_i) \in (\Sigma \times \boxplus)^{\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $a_i = s(a_{i+1})(v_i)$ et $a_i = \mathcal{C}_i(z_i)$ où $z_i \in \mathbb{Z}^2$ est la seule position telle que z est un élément du motif $\mathcal{P}_i = \boxplus^i - \sum_{j=0}^{i-1} 2^j u_j - 2^i z_i$.

On construit l'histoire d'un voisin à partir d'une histoire comme on incrémente un odomètre.

Proposition 2. Toute Histoire peut être reconstruite à partir de 1, 2 ou 4 de ses histoires.

Non ambiguïté et apériodicité

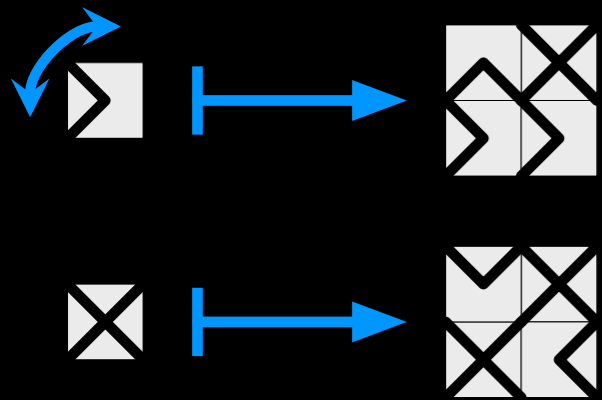
Une substitution est *apériodique* si son ensemble limite Λ_S est apériodique.

Une substitution est *non ambiguë* si, pour tout coloriage \mathcal{C} de son ensemble limite Λ_S , il existe un unique coloriage \mathcal{C}' et un unique vecteur $u \in \mathbb{A}$ vérifiant $\mathcal{C} = u \cdot S(\mathcal{C}')$.

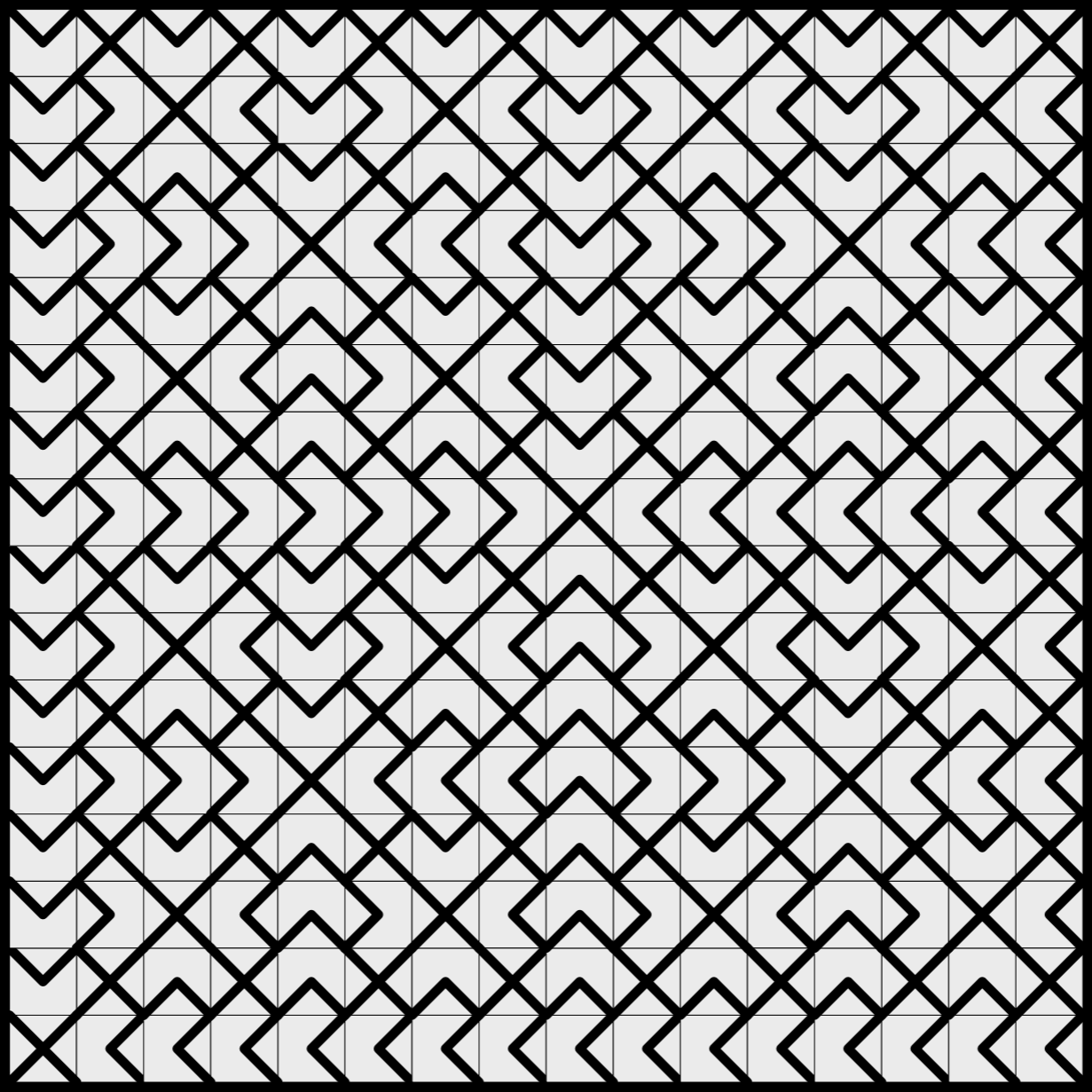
Tout coloriage de l'ensemble limite d'une substitution non ambiguë admet une unique Histoire.

Proposition 3. Non ambiguïté implique apériodicité.

Idée. À partir d'un coloriage de période minimale p , construire un coloriage de période $p/2$.



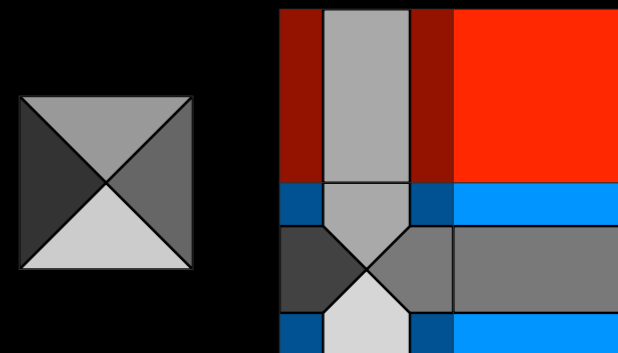
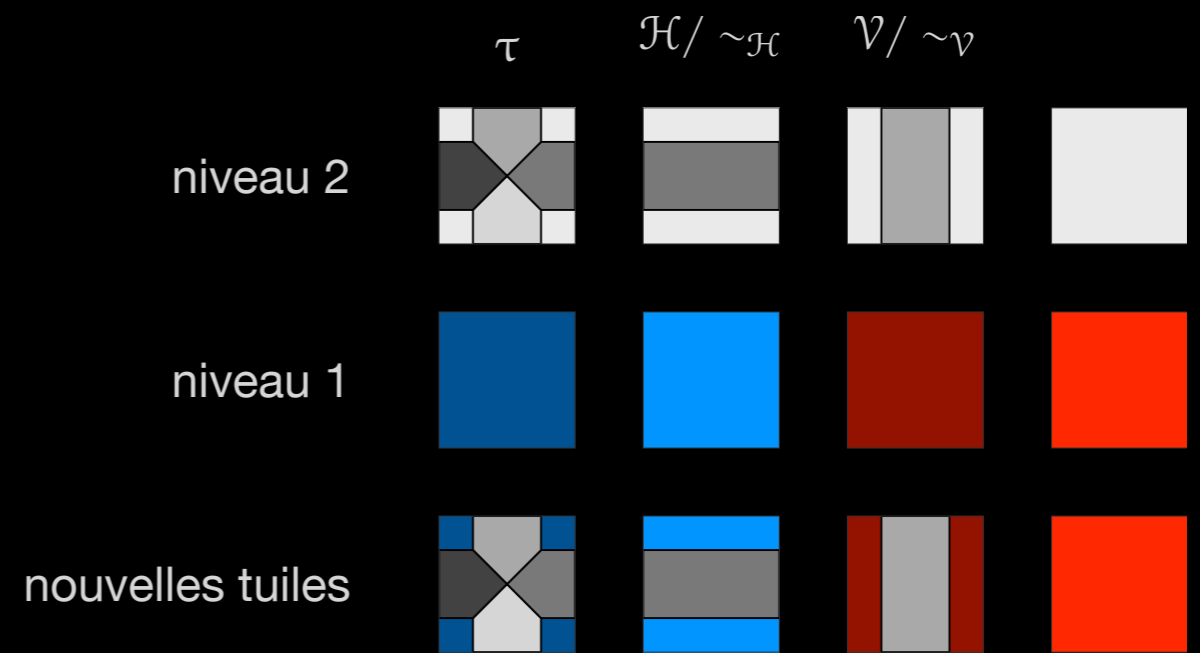
est non ambiguë



Codage de pavages

Un jeu de tuiles $(T', \mathcal{H}', \mathcal{V}')$ code un jeu de tuiles $(T, \mathcal{H}, \mathcal{V})$, selon un *codage* $t : T \rightarrow T'^{\boxplus}$ si t est injectif et

$$X_{\tau'} = \{u \cdot t(\mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \in X_{\tau}, u \in \boxplus\}.$$



Apériodicité

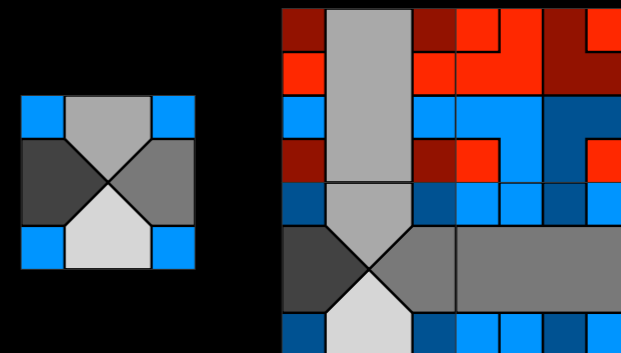
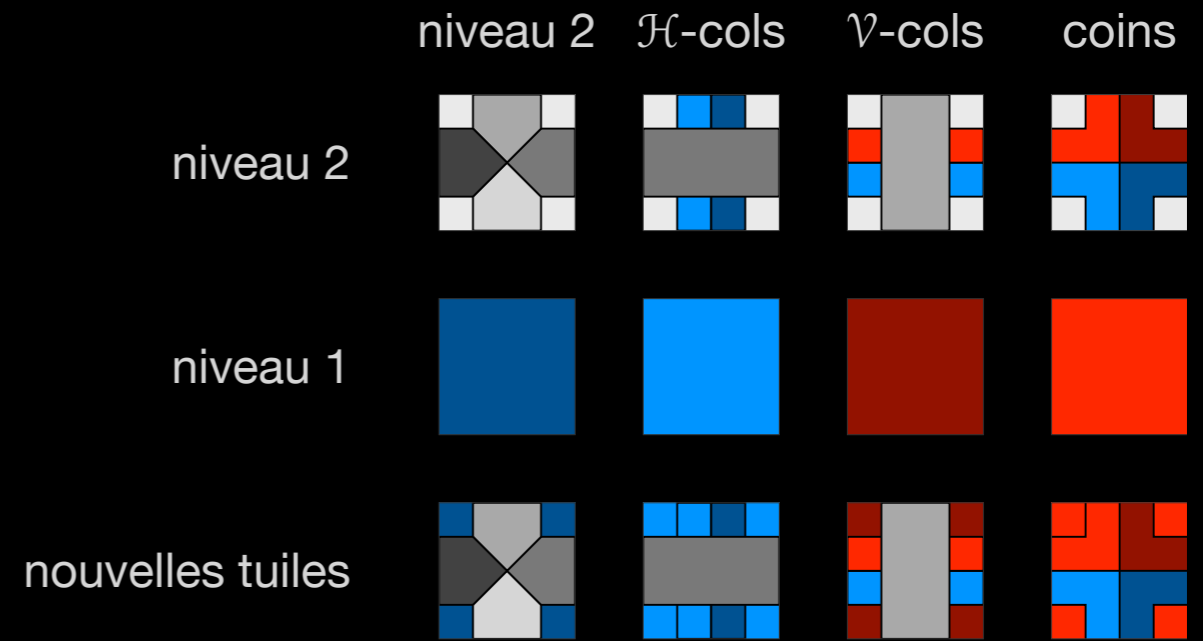
Un jeu de tuiles $(T, \mathcal{H}, \mathcal{V})$ code une substitution $s : T \rightarrow T^{\boxplus}$ s'il s'auto-code selon le codage s .

Proposition 4. Un jeu de tuiles qui possède un pavage et code une substitution non ambiguë est apériodique.

Idée. $X_\tau \subseteq \Lambda_S$ et $X_\tau \neq \emptyset$.

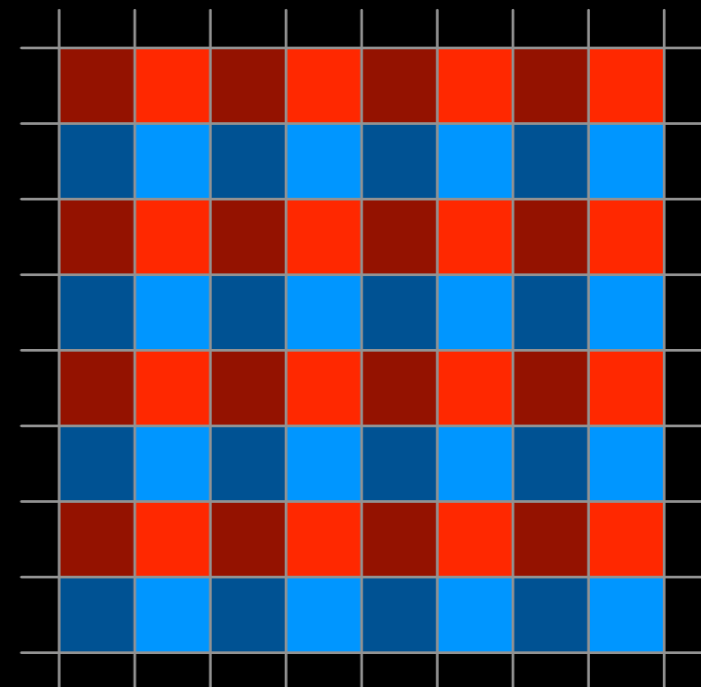
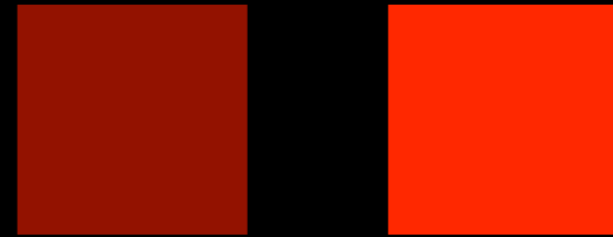
Schéma de codage

- Un meilleur codage: le nombre de tuiles ne croît pas nécessairement.
- **Problème.** tout jeu de tuiles à 2 niveaux n'est pas codable, les contraintes entre les niveaux ne peuvent être quelconques.
- **Solution.** ajouter un troisième niveau avec un bit par arête.



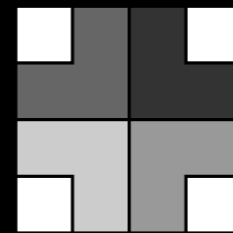
Niveau 1. initialisation

- 4 tuiles en paquets 2×2 .
- Alternance bleu/rouge verticale.
- Alternance clair/foncé horizontale.
- Règle de collage simple et très contrainte.



Niveau 2. grilles

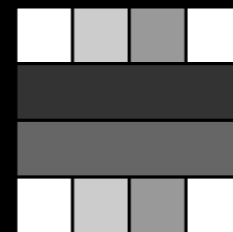
- Les tuiles portent des fils, deux par arête.
- 3 types de tuiles : X, H, V.
- Les paires de couleurs de fils doivent être compatibles.
- Règle de collage : les couleurs des fils doivent correspondre.
- Restriction du niveau 1 par type.



4



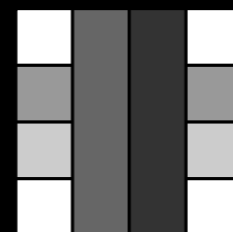
8



16



32



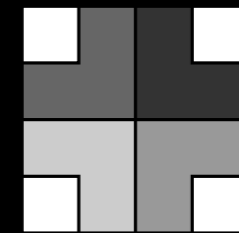
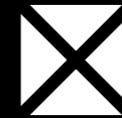
16



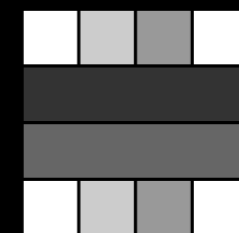
32

Niveau 3. coins

- 1 bit d'information par arête pour positionner les coins.
- 5 types de tuiles à flèches.
- Règle de collage: flèches cohérente à travers les arêtes.
- Restriction du niveau 2 par type.
- **Important** : contrainte à la traversée de fils rouges.

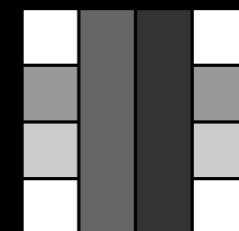


8



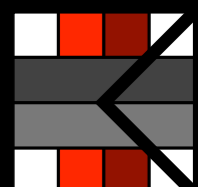
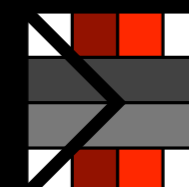
~~64~~

48



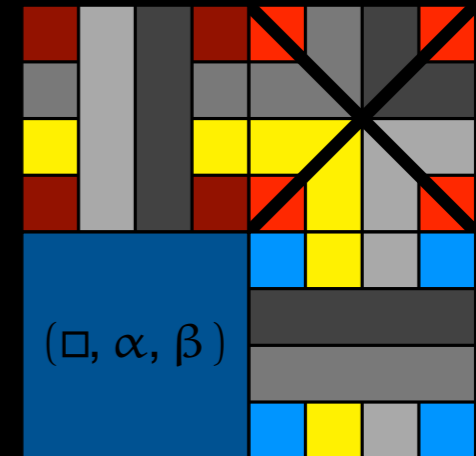
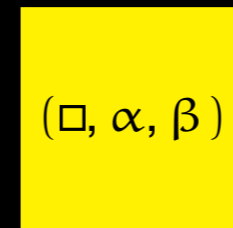
~~64~~

48

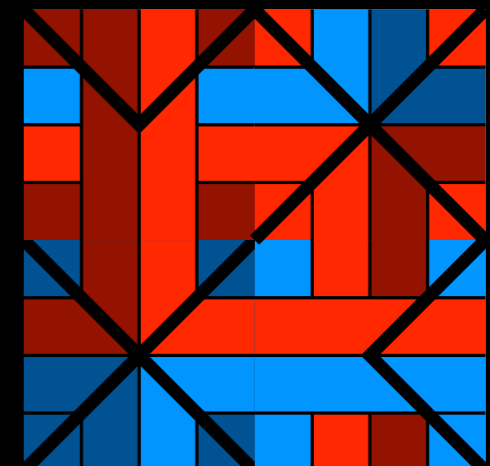
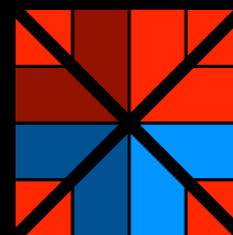


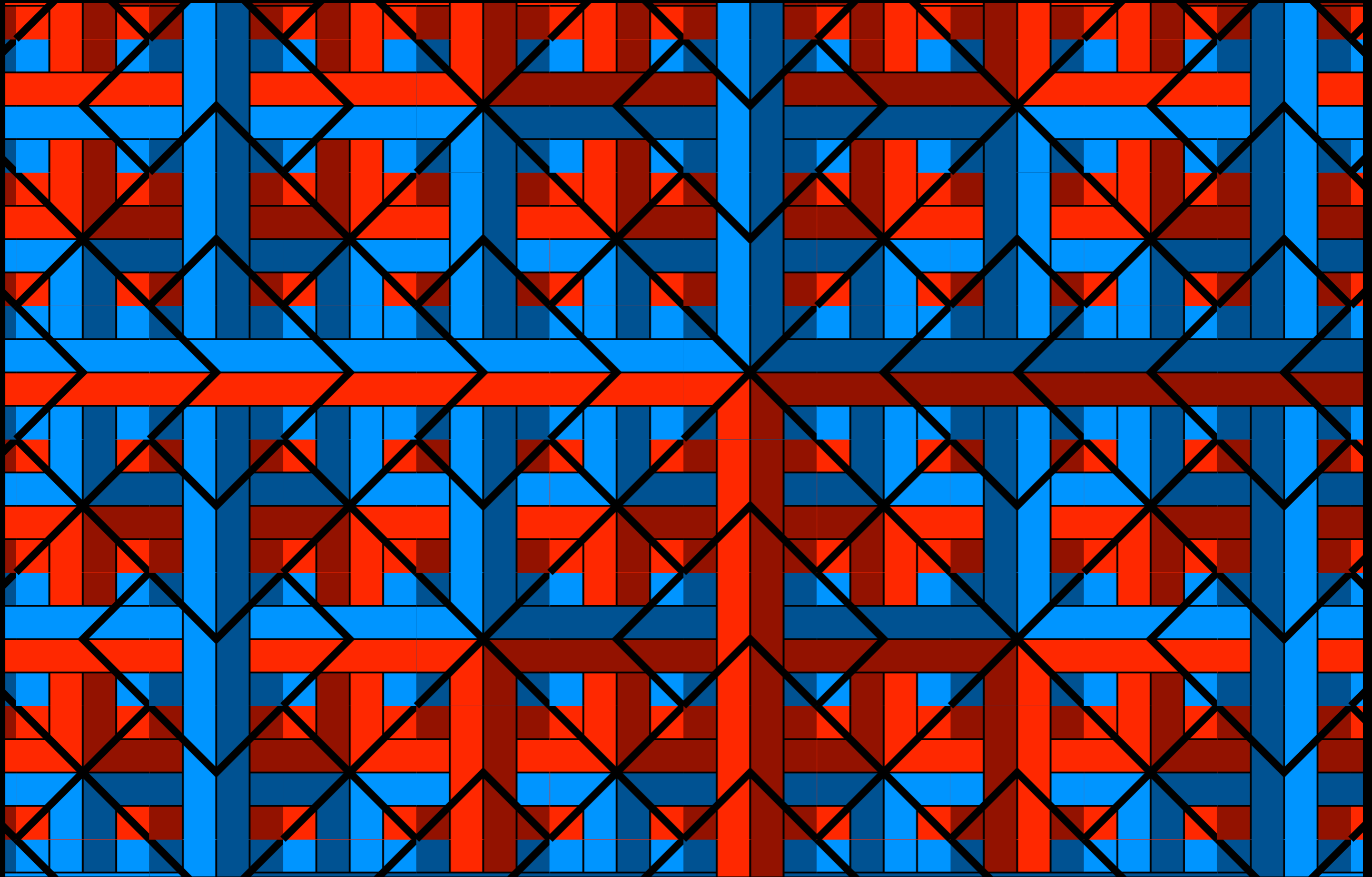
Substitution canonique

- Copier la tuile en SW en oubliant son niveau 1.
- Mettre en NE la seule tuile X qui a le niveau 1 originel sur son fil SW.
- Propager les couleurs de fils.
- Les tuiles H et V tile propagent les flèches de niveau 3.
- La substitution est injective.

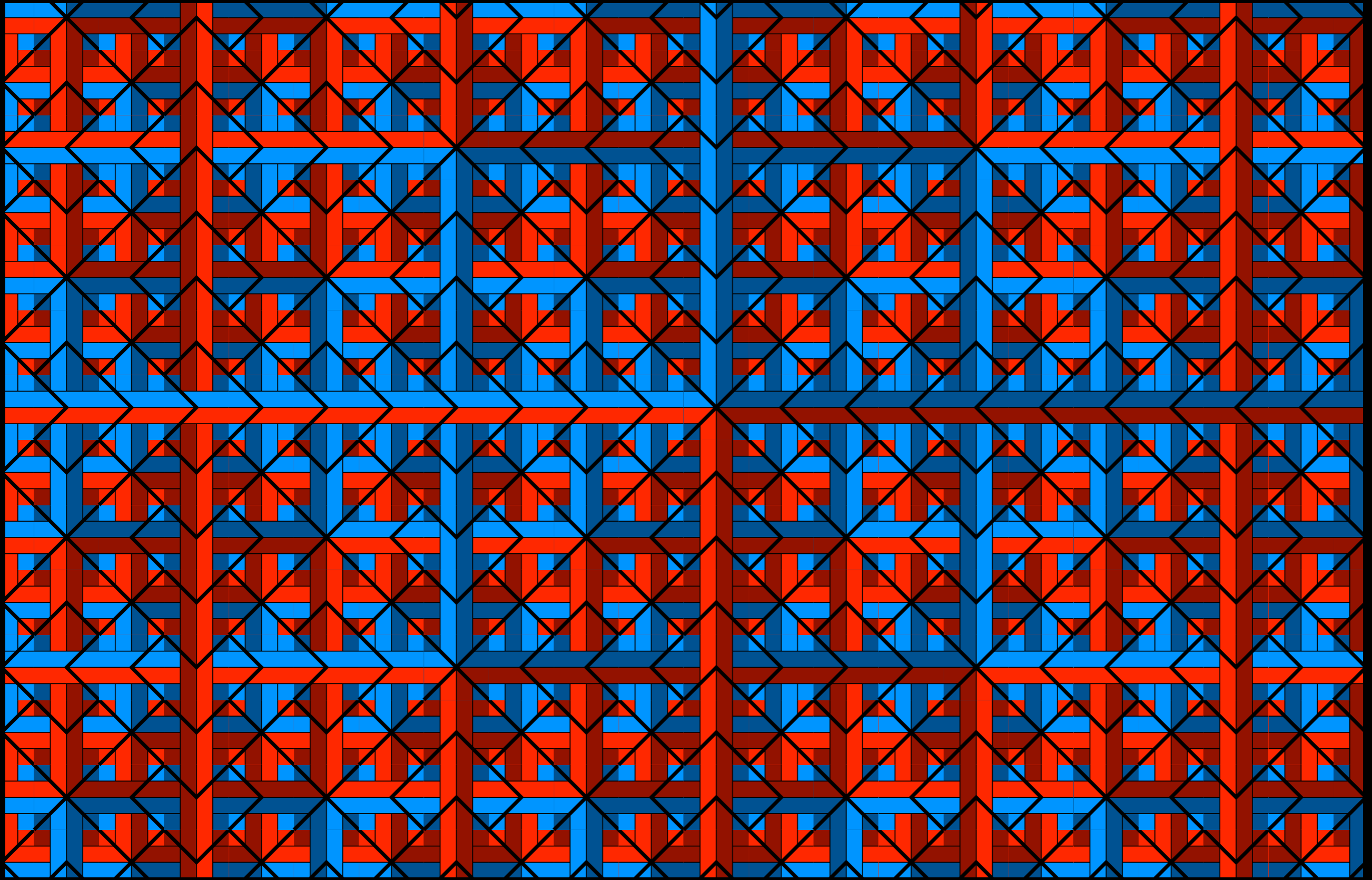


exemple:





Le jeu de tuile peut paver le plan entier...

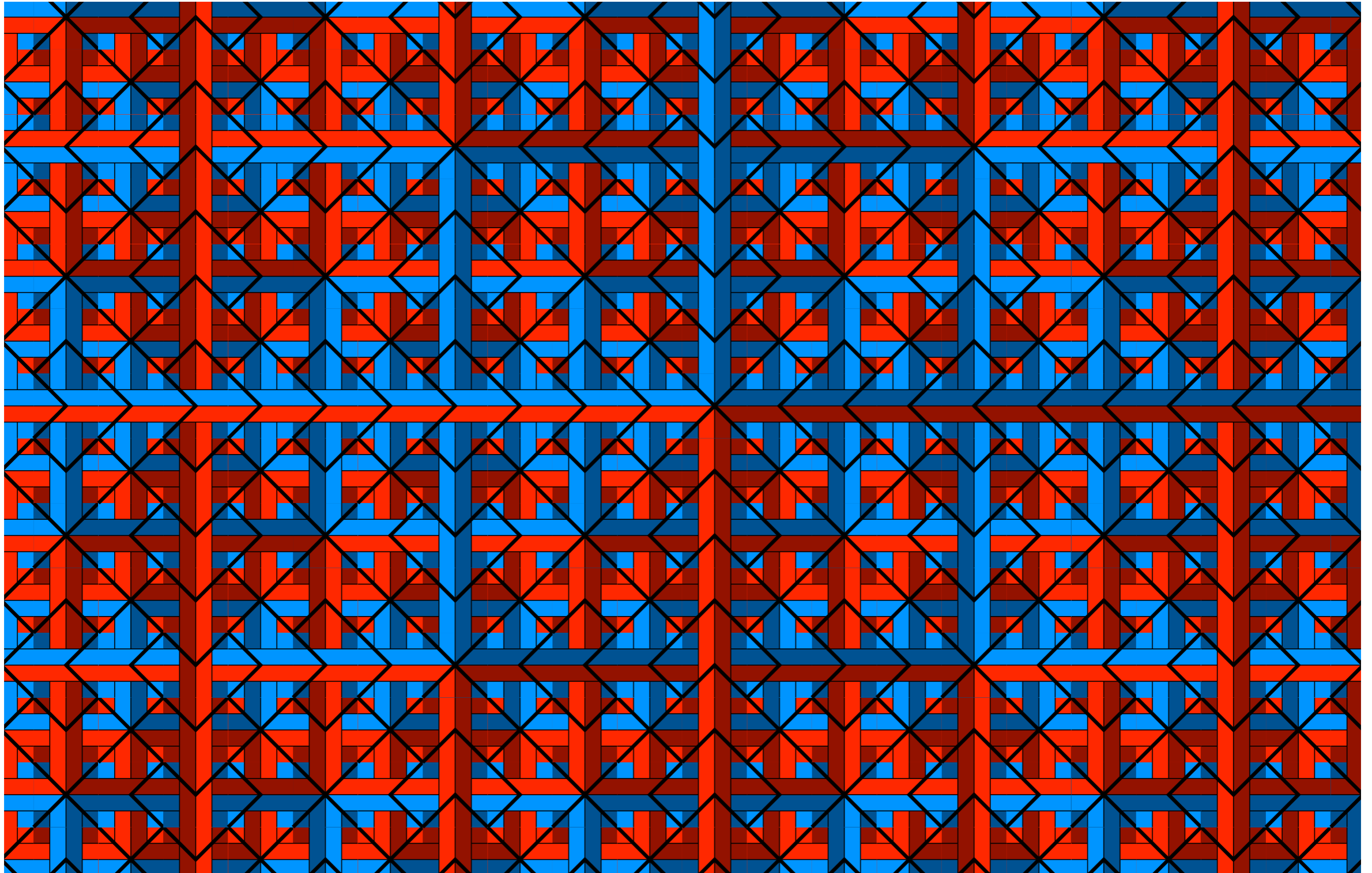


...continuer *ad lib* !

Plan de la démonstration

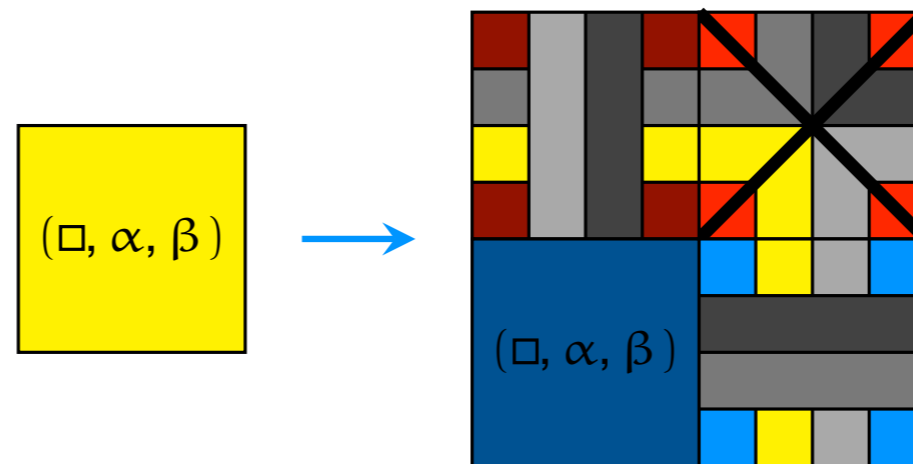
1. Le jeu de tuiles possède un pavage ;
2. La substitution est non ambiguë ;
3. Le jeu de tuiles code la substitution.
4. Appliquer la proposition 4 pour conclure.

Le jeu de tuiles possède un pavage

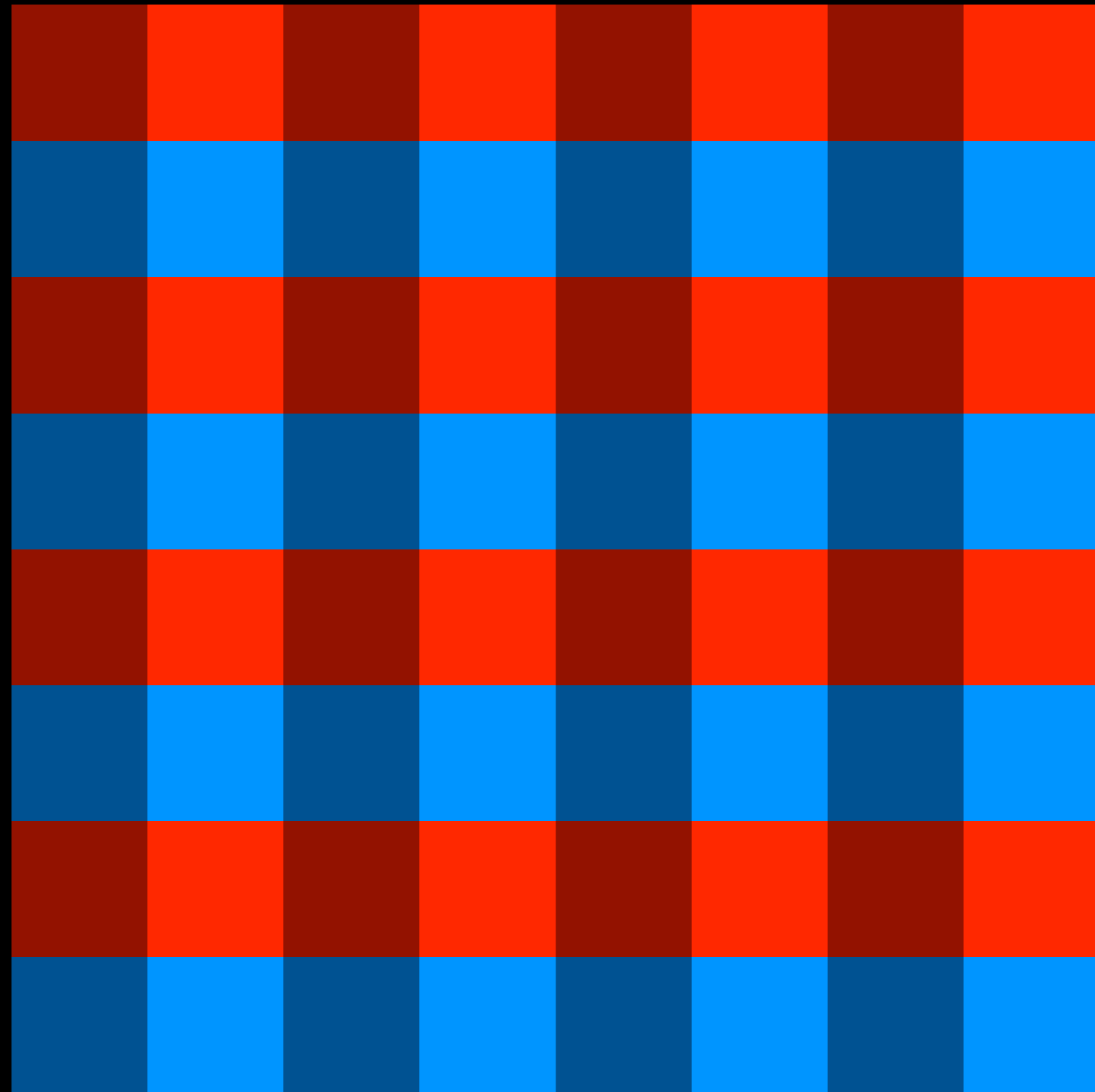


La substitution est non ambiguë

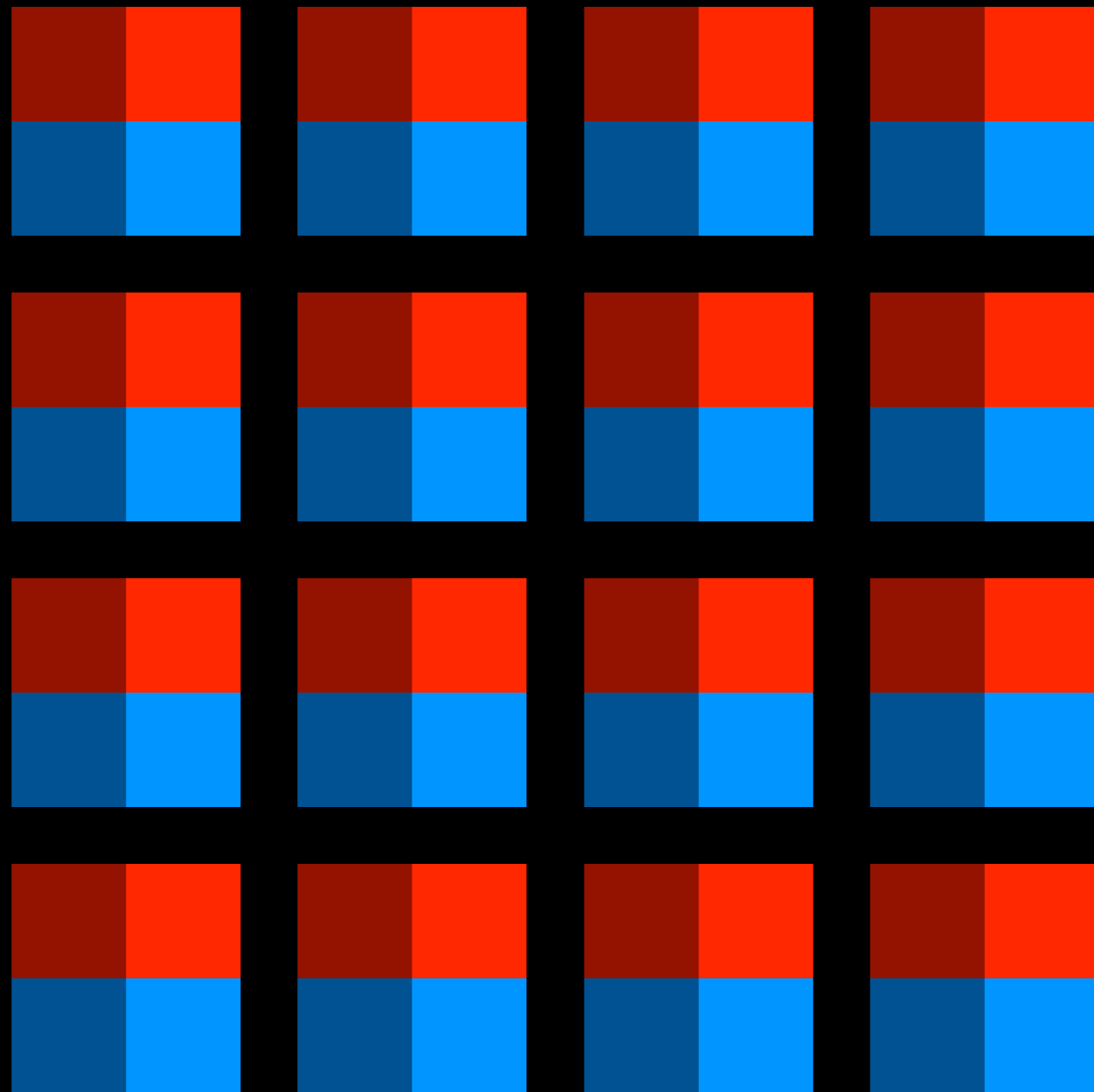
- Elle est injective et les projecteurs ont des images disjointes.



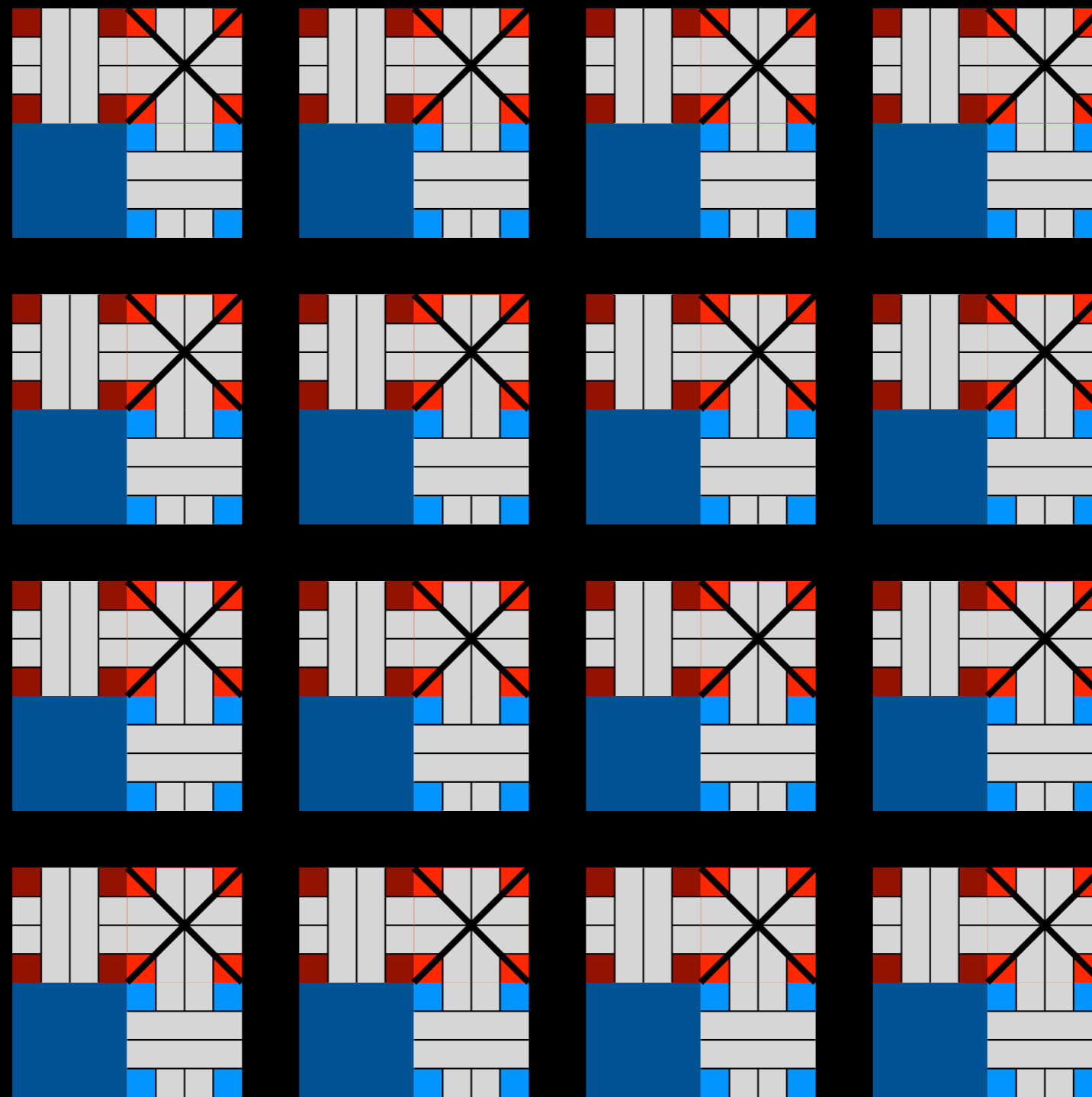
tout pavage par ce jeu de tuiles est l'image d'un coloriage par la substitution canonique.



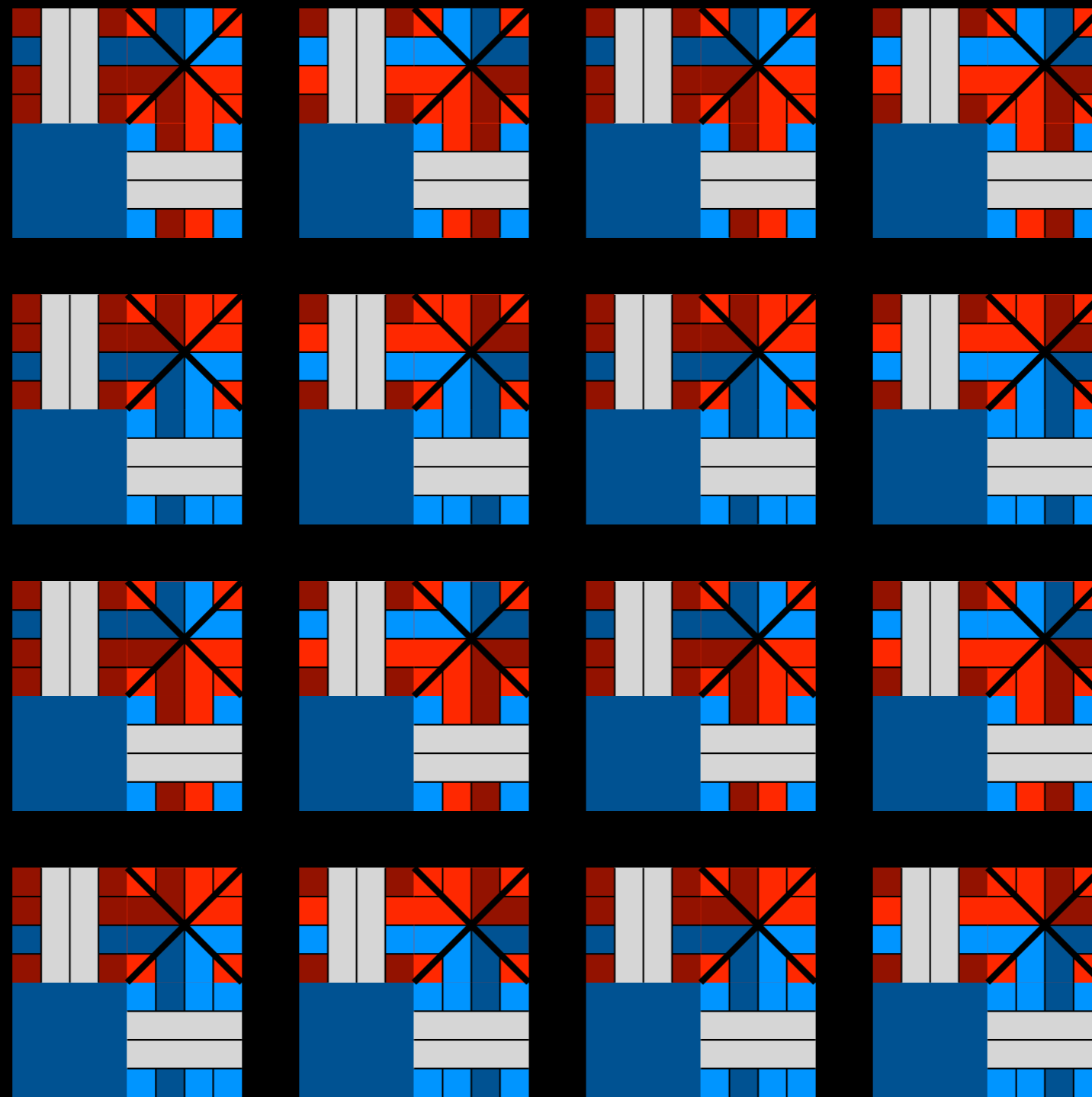
tout pavage par ce jeu de tuiles est l'image d'un coloriage par la substitution canonique.



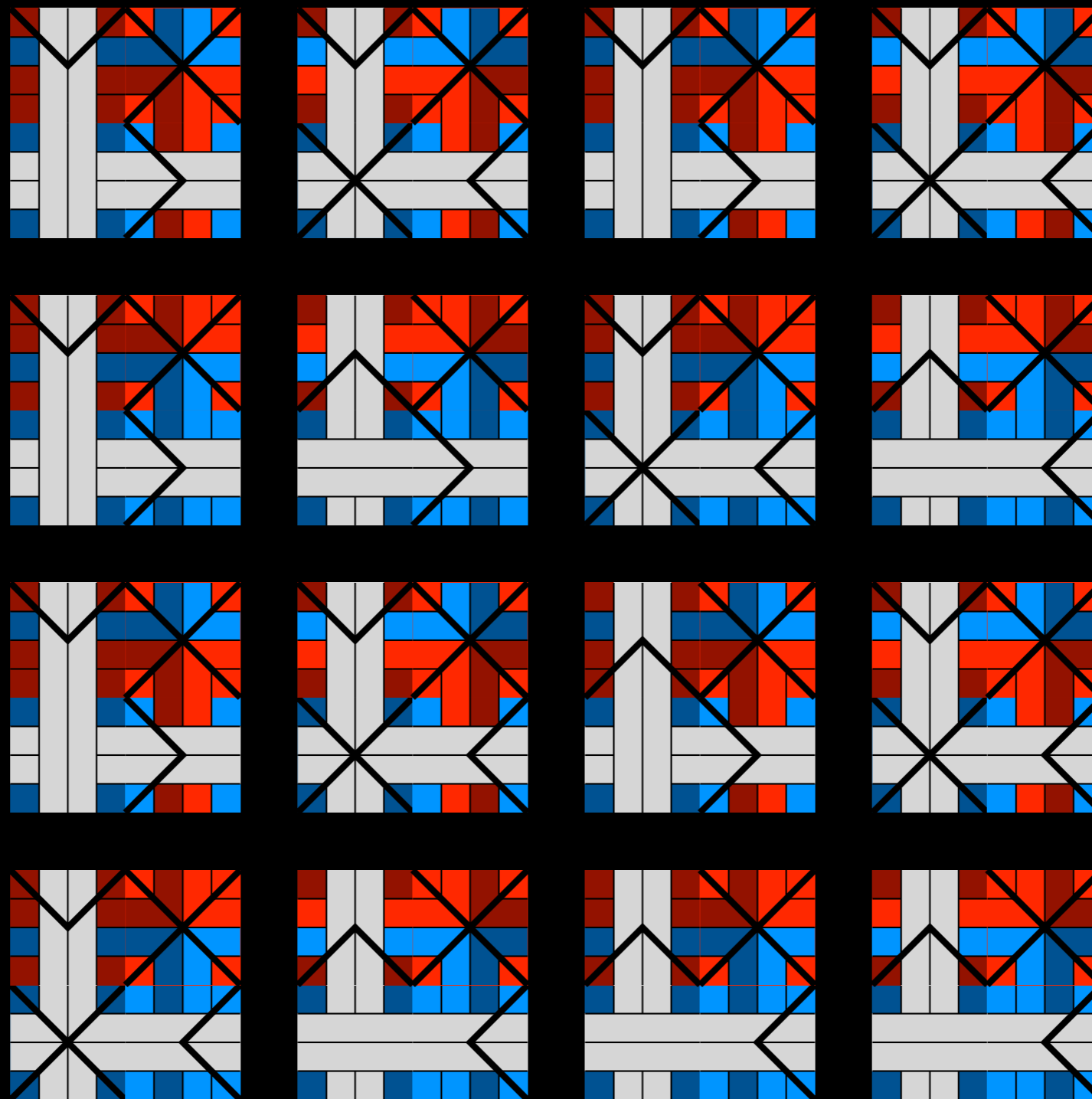
tout pavage par ce jeu de tuiles est l'image d'un coloriage par la substitution canonique.



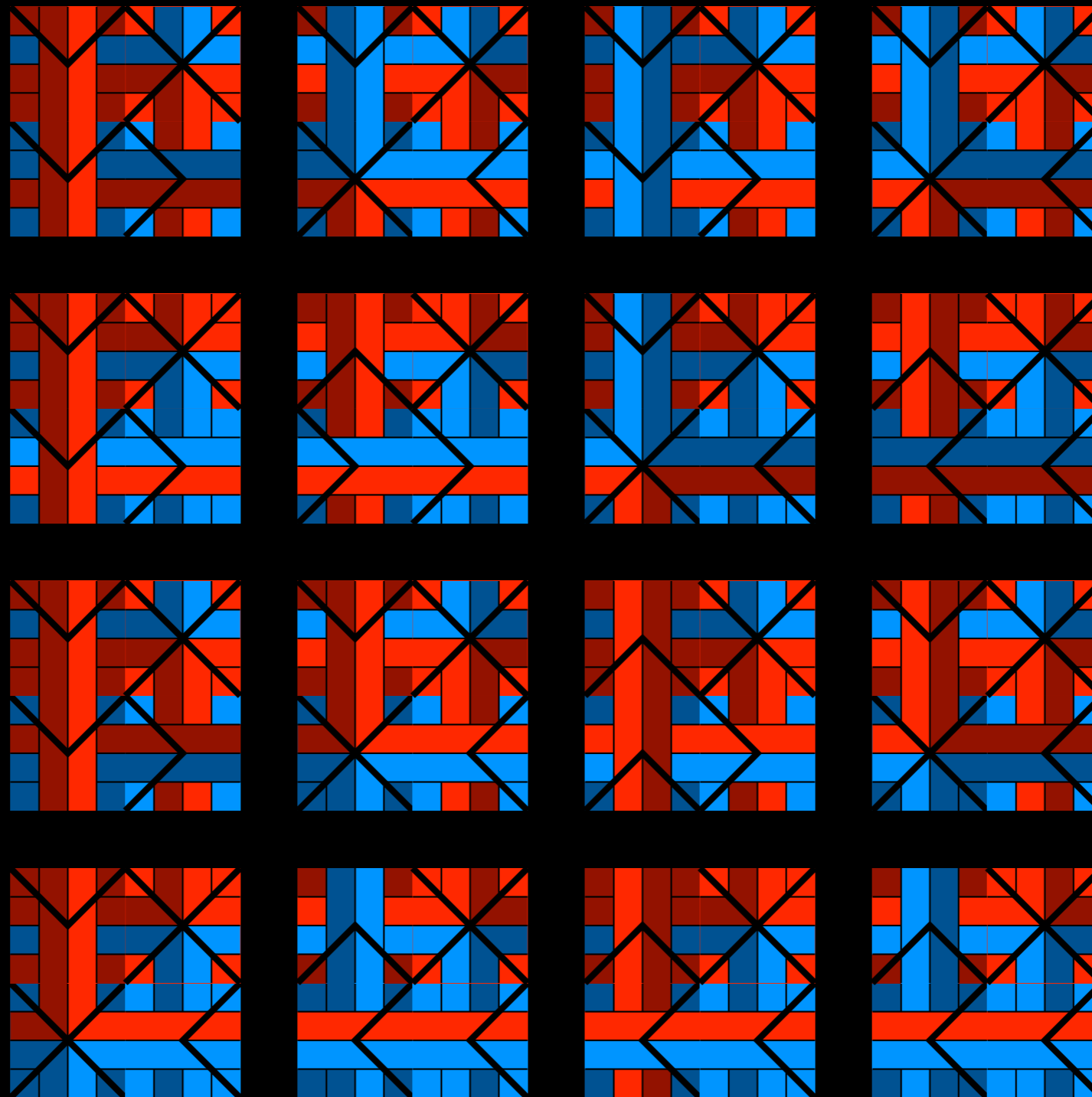
tout pavage par ce jeu de tuiles est l'image d'un coloriage par la substitution canonique.



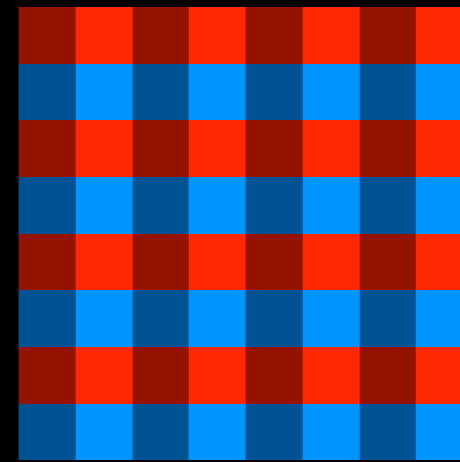
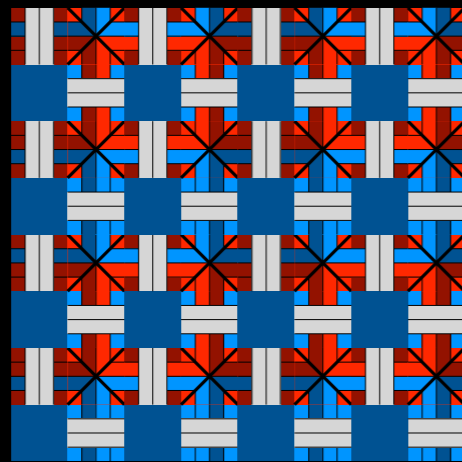
tout pavage par ce jeu de tuiles est l'image d'un coloriage par la substitution canonique.



tout pavage par ce jeu de tuiles est l'image d'un coloriage par la substitution canonique.

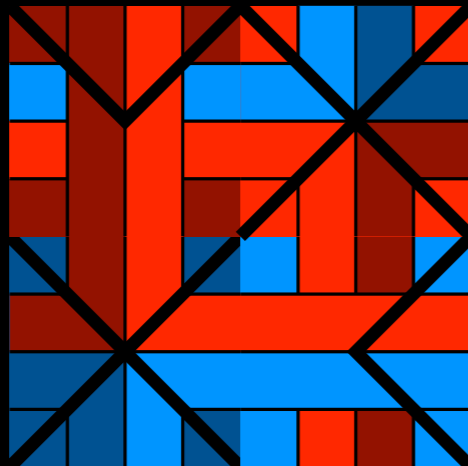


tout pavage par ce jeu de tuiles est l'image d'un coloriage par la substitution canonique.



Niveau 1

on supprime juste des fils et des flèches qui sont propagés

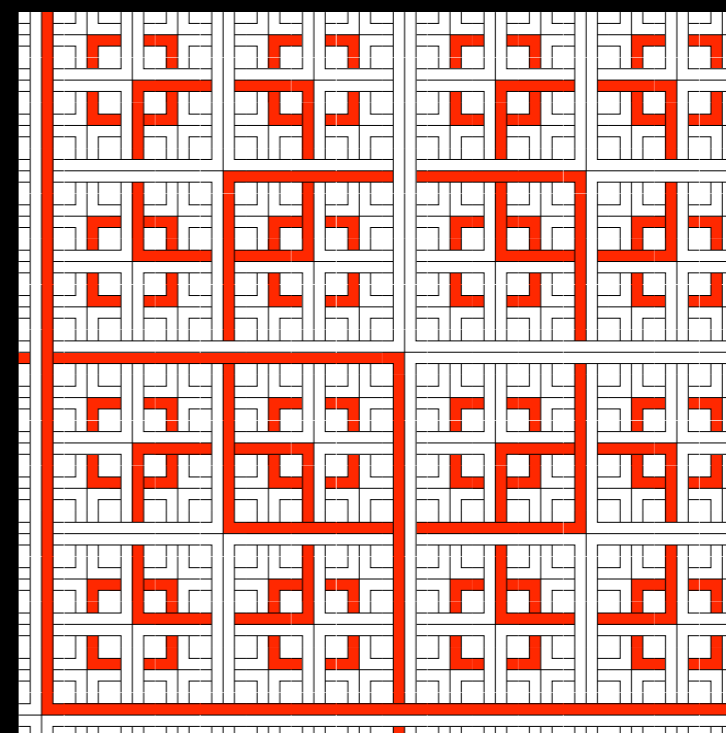


Niveaux 2 & 3

la préimage par la substitution de tout pavage est un pavage.

Câbler des substitutions

- Considérons les fils rouges : les carrés imbriqués définissent un arbre.
- Ajouter une lettre sur chaque carré (niveau 1 + fils).
- Vérifier la règle de substitution entre deux niveaux de carrés.
- À projection près, les pavages du jeu de tuiles forment l'ensemble limite de la substitution.



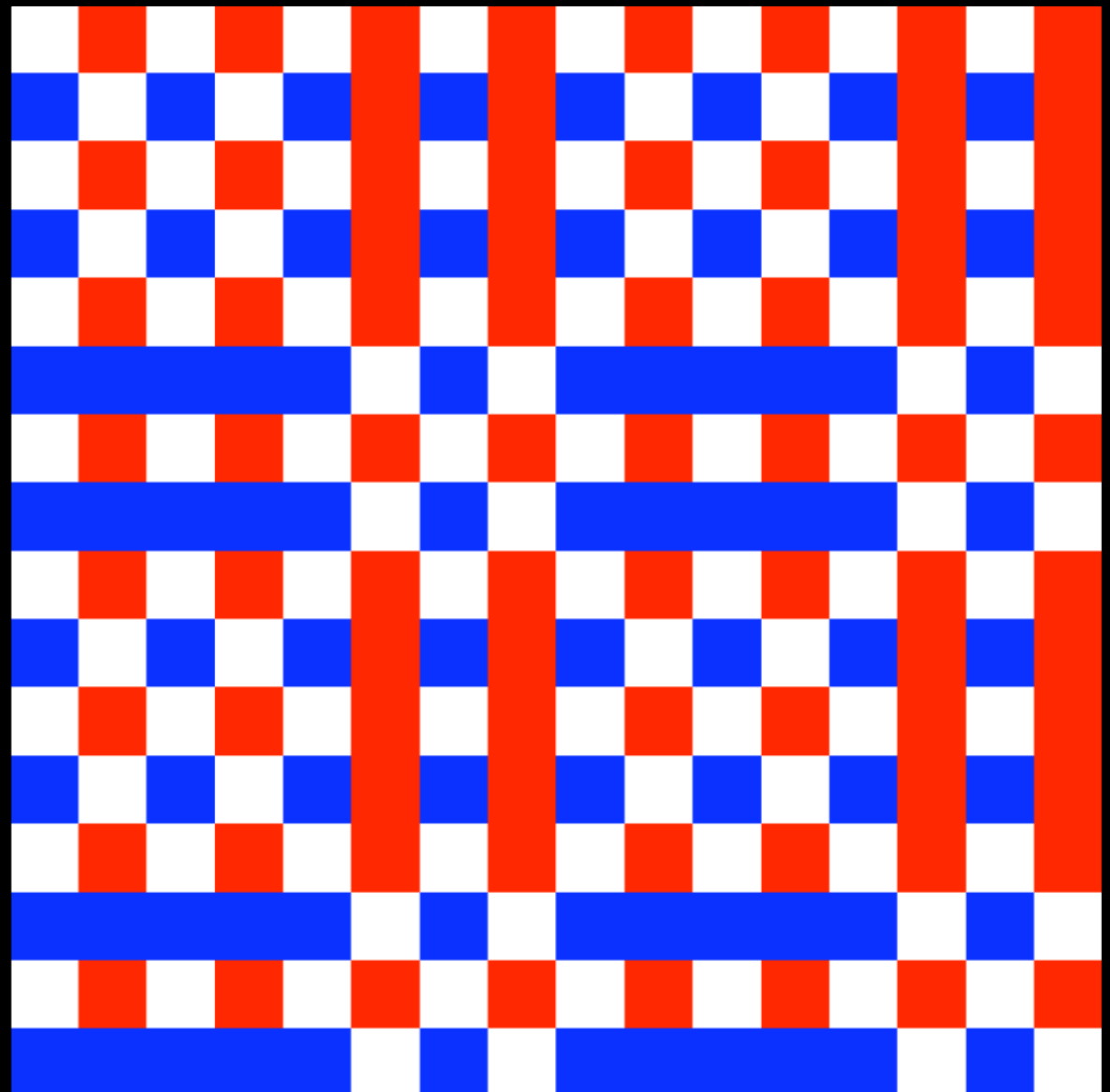
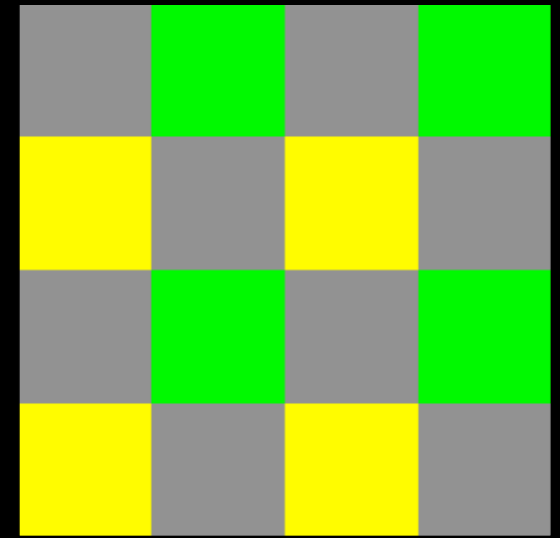
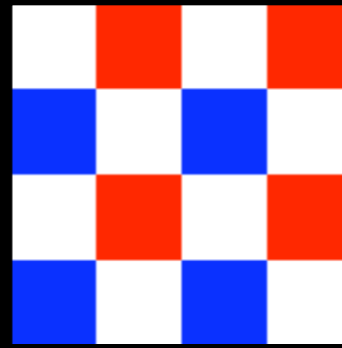
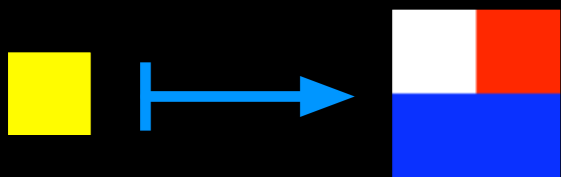
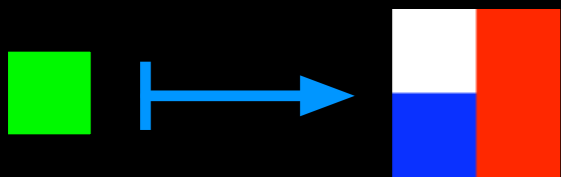
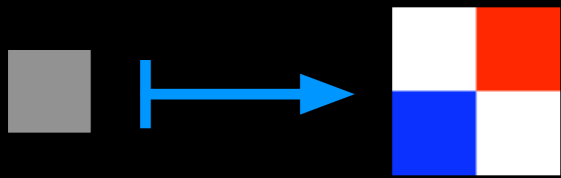
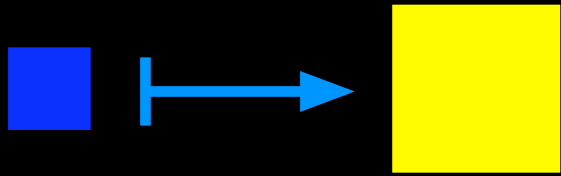
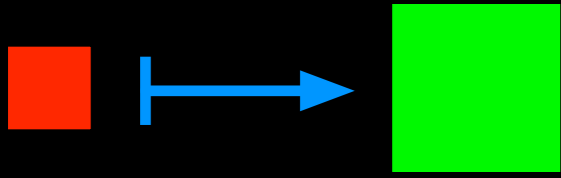
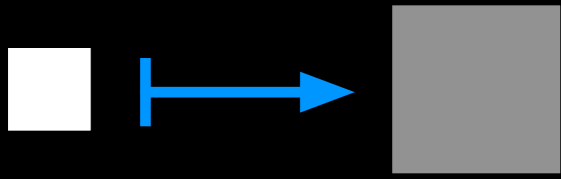
$$b = s(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Câblage de substitutions

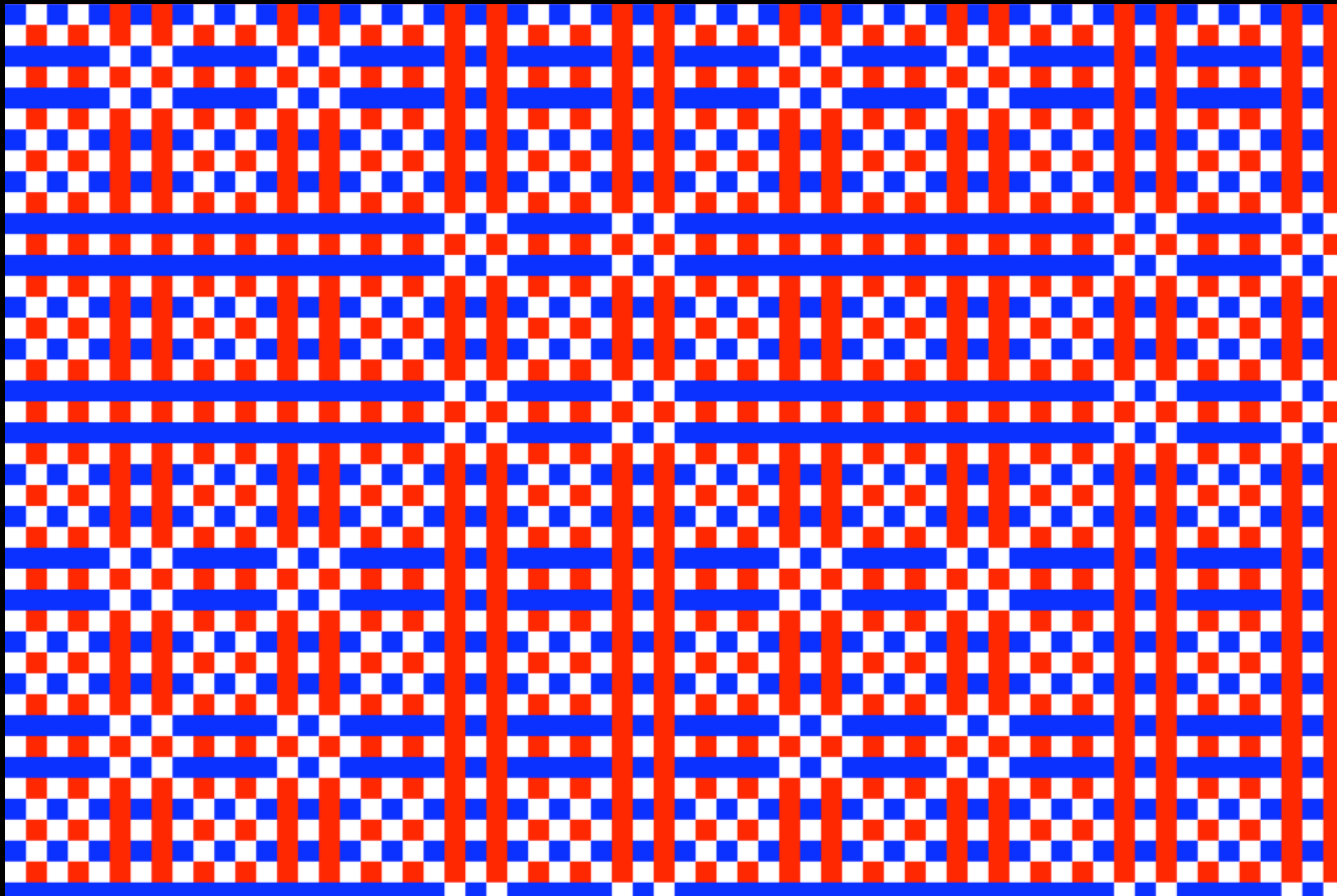
Soit π qui à toute tuile de $\tau(s')$ associe $s'(a)(u)$ où a et u sont la lettre et la position dans \boxplus du niveau 1.

Théorème 2. Soit s' une substitution. Le jeu de tuiles $\tau(s')$ câble $s' : \pi(X_{\tau(s')}) = \Lambda_{S'}$.

Idée. Tout pavage de $\tau(s')$ contient une Histoire de S' et toute Histoire de S' est contenue dans un pavage de $\tau(s')$.



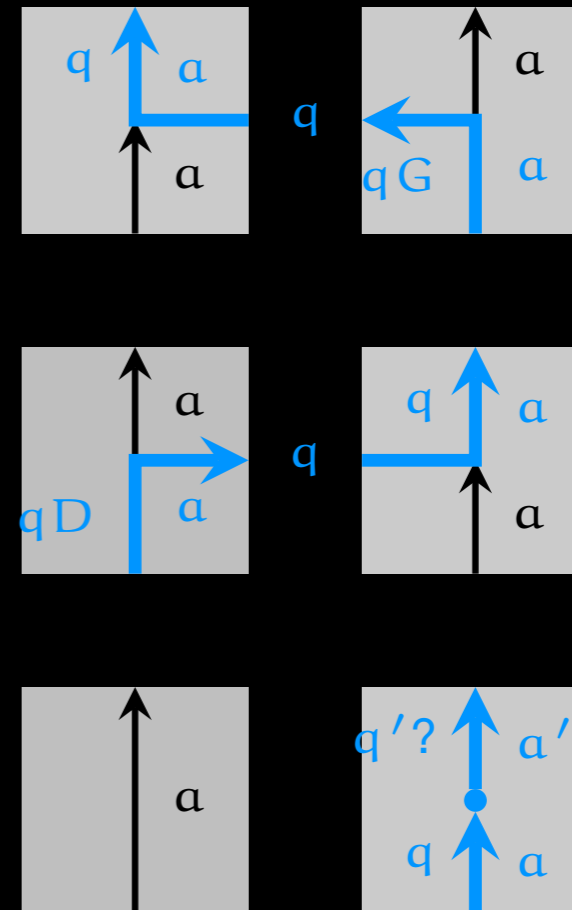
La substitution O2



itération de O2

Calcul Turing

- Simulons des machines de Turing par des pavages.
- Un calcul est lancé dans le coin SW de chaque carré de calcul d'O2.
- Supprimer l'état d'arrêt.
- Le jeu de tuiles pave le plan ssi la machine ne s'arrête pas.



Bibliographie

R. Berger, *The Undecidability of the Domino Problem*, Ph.D. thesis, Harvard University, July 1964. (almost completely reprinted in *Memoirs of the AMS* 66).

R. M. Robinson, *Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane*, *Inventiones Mathematicae* , **12** (1971), 177–209.

N. Ollinger, *Two-by-two Substitution Systems and the Undecidability of the Domino Problem*, CiE 2008, LNCS 5028.

5. application aux automates cellulaires

Résumé de cette partie

Fort de ces résultats sur les pavages, on en déduit l'indécidabilité d'un certain nombre de propriétés des automates cellulaires :

- **Surjectivité 2D** (réduction à la pavabilité finie) ;
- **Injectivité 2D** (réduction à la pavabilité) ;
- **Nilpotence** (réduction à la pavabilité NW-déterministe) ;
- **Universalité intrinsèque** (réduction à la pavabilité périodique NW-déterministe).

À partir de l'indécidabilité de la nilpotence, un théorème de Rice pour les propriétés de l'ensemble limite est obtenu.

Bibliographie

J. Kari, *The nilpotency problem of one-dimensional cellular automata*, SIAM J. Comput., **21** (1992), no. 3, 571–586.

J. Kari, *Rice's Theorem for the Limit Sets of Cellular Automata*, Theor. Comput. Sci. **127** (1994) no. 2, 229–254.

J. Kari, *Reversibility and Surjectivity Problems of Cellular Automata*, J. Comput. Syst. Sci. **48** (1994) no. 1, 149–182.

B. Durand, *The Surjectivity Problem for 2D Cellular Automata*, J. Comput. Syst. Sci. **49** (1994) no. 3, 718–725.

Bibliographie (*suite*)

J. Mazoyer, I. Rapaport, *Global fixed point attractors of circular cellular automata and periodic tilings of the plane: Undecidability results*, Discrete Mathematics **199** (1999), 103–122.

N. Ollinger, *The intrinsic universality problem of one-dimensional cellular automata*, STACS 2003, LNCS 2607, 632–641.

6. pour aller plus loin...

Résumé de cette partie

Les techniques développées dans ce cours peuvent être étendues de différentes manières :

- pour montrer l'indécidabilité de **Infinite Snake Problem** ;
- pour construire des jeux de tuiles n'admettant que des pavages du plan non récurrents ;
- pour montrer que la pavabilité et la pavabilité périodique sont récursivement inséparables ;
- pour construire des jeux de tuiles dont les pavages sont de complexité maximale.

Bibliographie

L. M. Adleman, J. Kari, L. Kari, D. Reishus, *On the Decidability of Self-Assembly of Infinite Ribbons*, FOCS 2002, 530–537.

W. Hanf, *Nonrecursive Tilings of the Plane I*, J. of Symb. Logic, **39** (1974) no. 2, 283–285.

D. Myers, *Nonrecursive Tilings of the Plane II*, J. of Symb. Logic, **39** (1974) no. 2, 286–294.

Y. Gurevich and I. O. Koriakov, *A remark on Berger's paper on the domino problem*, Siberian Mathematical Journal, **13** (1972), 319–321.

B. Durand, L. A. Levin, A. Shen, *Complex tilings*, STOC 2001, 732–739.