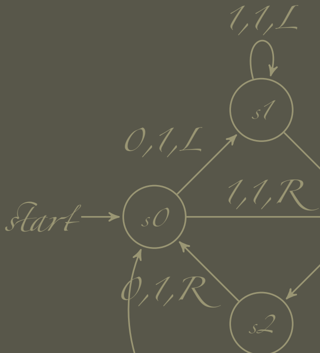
Machines de Turing

et autres vieilleries

Équipe Escape

in « Journée scientifique du LIF »

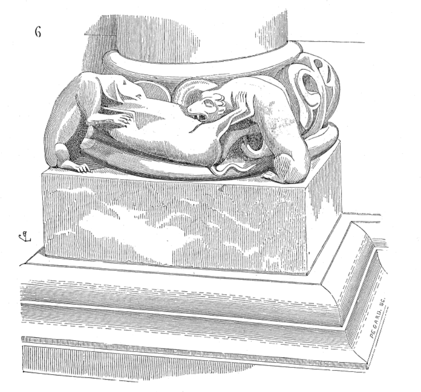


Escape

Equipe
systèmes
complexes
automates cellulaires
pavages
***e**tc*

Proposer des contributions ciblées à l'étude des systèmes complexes par le biais de l'informatique théorique moderne.

8 permanents en sept. 2008 :
1 PR, **1** DR, **4** MCF, **2** CR
+ 1 ATER, **4** PhD, **4** Coll. Ext.



ESCAPE [ɛskap] n.f. — 1567 ; lat. *scapus* «fût» ♦ ARCHIT. **1**♦ Partie inférieure du fût d'une colonne, voisine de la base. **2**♦ (1611) Fût d'une colonne, de la base au chapiteau.

Des machines poussiéreuses...

Nicolas Ollinger (LIF, Aix-Marseille Université, CNRS, France)
d'après des travaux réalisés en collaboration avec
Jarkko Kari (Dpt. of Mathematics, Université de Turku, Finlande)

LIF, 1er juillet 2008

J. Kari and N. Ollinger. Periodicity and Immortality in Reversible Computing.
E. Ochmański and J. Tyszkiewicz (Eds.) : MFCS 2008, LNCS 5162, pp. 419–430, 2008.

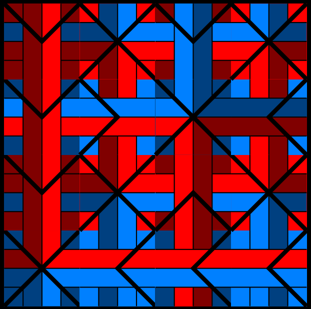
Décider la dynamique des systèmes complexes ?

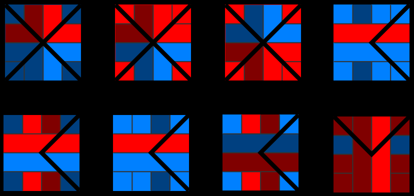
Étudier les propriétés dynamiques des systèmes complexes pour mieux les comprendre...

...montrer que ces propriétés sont indécidables, c'est montrer que la complexité apparente a une composante calculatoire.

Les pavabilités sont des outils classiques de réduction aux propriétés d'automates cellulaires depuis les années 90.

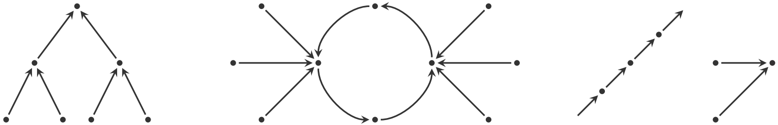
Aujourd'hui, pas de pavages !





Systèmes dynamiques discrets

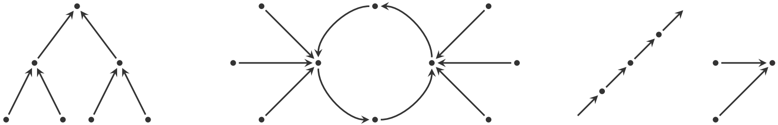
Un SDD $\mathcal{S}$ est une paire (X, F) avec $F : X \longrightarrow X$ partielle et continue



$\mathcal{S}$ s'arrête sur $x \in X$ si $F(x)$ n'est pas définie, noté $F(x) = \perp$

Systèmes dynamiques discrets

Un SDD $\mathcal{S}$ est une paire (X, F) avec $F : X \longrightarrow X$ partielle et continue

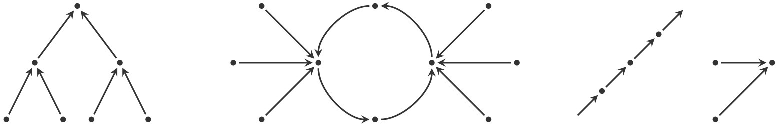


$\mathcal{S}$ s'arrête sur $x \in X$ si $F(x)$ n'est pas définie, noté $F(x) = \bot$

$\mathcal{S}$ est mortel si $\forall x \in X, \exists n \in \mathbb{Z}^+, F^n(x) = \bot$
$\mathcal{S}$ est uniformément mortel si $\exists n \in \mathbb{Z}^+, \forall x \in X, F^n(x) = \bot$

Systèmes dynamiques discrets

Un SDD $\mathcal{S}$ est une paire (X, F) avec $F : X \longrightarrow X$ partielle et continue



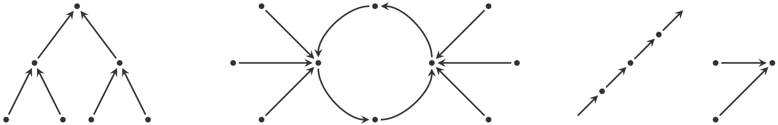
$\mathcal{S}$ s'arrête sur $x \in X$ si $F(x)$ n'est pas définie, noté $F(x) = \bot$

$\mathcal{S}$ est mortel si $\forall x \in X, \exists n \in \mathbb{Z}^+, F^n(x) = \bot$
$\mathcal{S}$ est uniformément mortel si $\exists n \in \mathbb{Z}^+, \forall x \in X, F^n(x) = \bot$

$\mathcal{S}$ est complet si F est totale

Systèmes dynamiques discrets

Un SDD $\mathcal{S}$ est une paire (X, F) avec $F : X \longrightarrow X$ partielle et continue



$\mathcal{S}$ s'arrête sur $x \in X$ si $F(x)$ n'est pas définie, noté $F(x) = \perp$

$\mathcal{S}$ est mortel si $\forall x \in X, \exists n \in \mathbb{Z}^+, F^n(x) = \perp$
$\mathcal{S}$ est uniformément mortel si $\exists n \in \mathbb{Z}^+, \forall x \in X, F^n(x) = \perp$

$\mathcal{S}$ est complet si F est totale

$\mathcal{S}$ est périodique si $\forall x \in X, \exists n \in \mathbb{Z}^+, F^n(x) = x$
$\mathcal{S}$ est uniformément périodique si $\exists n \in \mathbb{Z}^+, \forall x \in X, F^n(x) = x$

Périodicité et immortalité

Soit $\mathcal{M}$ une famille récursive de SDD.

Halting Problem. Étant donné $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$, $x_0 \in X$ est-il mortel pour $\mathcal{S}$?

Immortality Problem. Étant donné $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$, $\mathcal{S}$ est-il immortel ?

Periodicity Problem. Étant donné $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$, $\mathcal{S}$ est-il périodique ?

	HP	**IP**	**PP**
RCA			Thm 12
RTM	[Lecerf63]	Thm 7	Thm 8
RCM	[Morita96]	Thm 1	Thm 3

1. machines à compteurs réversibles

Définitions

Définition Une *k*-**CM** est un triplet (S, k, T) avec S l'ensemble fini d'états et $T \subseteq S \times \Upsilon^k \times \mathbb{Z}_k \times \Phi \times S$ la table de transition.

$\Upsilon = \{0, +\}$: le compteur vaut-il 0 ?

$\Phi = \{-, 0, +\}$: faut-il décrémenter ou incrémenter le compteur ?

Définitions

Définition Une ***k*-CM** est un triplet (S, k, T) avec S l'ensemble fini d'états et $T \subseteq S \times \Upsilon^k \times \mathbb{Z}_k \times \Phi \times S$ la table de transition.

$\Upsilon = \{0, +\}$: le compteur vaut-il 0 ?

$\Phi = \{-, 0, +\}$: faut-il décrémenter ou incrémenter le compteur ?

$(s, u, i, \phi, t) \in T$: « *dans l'état s avec les compteurs dans l'état u, appliquer ϕ au compteur i et passer dans l'état t.* »

$$\forall (s, v) \in S \times \mathbb{N}^k, \quad (s, v) \vdash (t, \theta_{i,\phi}(v)) \quad \text{si } (s, u, i, \phi, t) \in T \text{ et } \tau(v) = u$$

Définitions

Définition Une ***k*-CM** est un triplet (S, k, T) avec S l'ensemble fini d'états et $T \subseteq S \times \Upsilon^k \times \mathbb{Z}_k \times \Phi \times S$ la table de transition.

$\Upsilon = \{0, +\}$: le compteur vaut-il 0 ?

$\Phi = \{-, 0, +\}$: faut-il décrémenter ou incrémenter le compteur ?

$(s, u, i, \phi, t) \in T$: « *dans l'état s avec les compteurs dans l'état u, appliquer ϕ au compteur i et passer dans l'état t.* »

$$\forall (s, v) \in S \times \mathbb{N}^k, \quad (s, v) \vdash (t, \theta_{i,\phi}(v)) \quad \text{si } (s, u, i, \phi, t) \in T \text{ et } \tau(v) = u$$

Déterminisme (*k*-DCM) :

$(s, u, i, \phi, t) \in T \wedge (s, u, i', \phi', t') \in T \Rightarrow (i, \phi, t) = (i', \phi', t')$

SDD $(S \times \mathbb{N}^k, G)$ avec $G(\mathfrak{c})$ l'unique $\mathfrak{c}'$ tel que $\mathfrak{c} \vdash \mathfrak{c}'$

Réversibilité

L'inverse d'une k-CM (S, k, T) est la k-CM (S, k, T^{-1}) où T^{-1} est l'union des inverses des instructions définies par :

$$
\begin{aligned}
(s, u, i, 0, t)^{-1} &= \{(t, u, i, 0, s)\}, \\
(s, u, i, +, t)^{-1} &= \{(t, u[i \leftarrow +], i, -, s)\}, \\
(s, u, i, -, t)^{-1} &= \{(t, u, i, +, s), (t, u[i \leftarrow 0], i, +, s)\}
\end{aligned}
$$

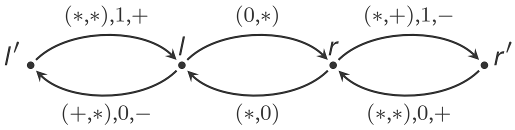
Réversibilité (*k*-RCM) : une k-RCM est une k-DCM d'inverse k-DCM.

Réversibilité

L'inverse d'une k-CM (S,k,T) est la k-CM (S,k,T^{-1}) où T^{-1} est l'union des inverses des instructions définies par :

$$\begin{array}{rcl}(s,u,i,0,t)^{-1} & = & \{(t,u,i,0,s)\},\\ (s,u,i,+,t)^{-1} & = & \{(t,u[i\leftarrow +],i,-,s)\},\\ (s,u,i,-,t)^{-1} & = & \{(t,u,i,+,s),(t,u[i\leftarrow 0],i,+,s)\}\end{array}$$

Réversibilité (*k*-RCM) : une k-RCM est une k-DCM d'inverse k-DCM.



une 2-RCM complète

Immortalité

[Minsky67] Toute fonction récursive est calculable par une 2-DCM.

Idée *une pile se simule avec 2 compteurs, k compteurs avec 2 compteurs*

Immortalité

[Minsky67] Toute fonction récursive est calculable par une 2-DCM.

Idée *une pile se simule avec 2 compteurs, k compteurs avec 2 compteurs*

[Hooper66] L'immortalité des 2-DCM est indécidable.

Idée *réduction de HP grâce à deux compteurs supplémentaires d'énergie*

$\mathfrak{c} \vdash \mathfrak{c}'$	$(\mathfrak{c}, \alpha+1, \beta) \vdash^* (\mathfrak{c}', \alpha, \beta+2)$
état initial $\mathfrak{c}_0$	$(\mathfrak{c}, 0, \beta) \vdash^* (\mathfrak{c}_0, \beta, 0)$
2-DCM dont on simule HP	*2-DCM simulante (teste IP)*

Immortalité

[Minsky67] Toute fonction récursive est calculable par une 2-DCM.

Idée *une pile se simule avec 2 compteurs, k compteurs avec 2 compteurs*

[Hooper66] L'immortalité des 2-DCM est indécidable.

Idée *réduction de HP grâce à deux compteurs supplémentaires d'énergie*

$\mathfrak{c} \vdash \mathfrak{c}'$	$(\mathfrak{c}, \alpha + 1, \beta) \vdash^* (\mathfrak{c}', \alpha, \beta + 2)$
état initial $\mathfrak{c}_0$	$(\mathfrak{c}, 0, \beta) \vdash^* (\mathfrak{c}_0, \beta, 0)$
2-DCM dont on simule HP	*2-DCM simulante (teste IP)*

[Morita96] Toute *k*-DCM est simulable par une 2-RCM.

Idée *ajouter une pile stockant les transitions, simuler k compteurs avec 2*

Immortalité

[Minsky67] Toute fonction récursive est calculable par une 2-DCM.

Idée *une pile se simule avec 2 compteurs, k compteurs avec 2 compteurs*

[Hooper66] L'immortalité des 2-DCM est indécidable.

Idée *réduction de HP grâce à deux compteurs supplémentaires d'énergie*

$\mathfrak{c} \vdash \mathfrak{c}'$	$(\mathfrak{c}, \alpha + 1, \beta) \vdash^* (\mathfrak{c}', \alpha, \beta + 2)$
état initial $\mathfrak{c}_0$	$(\mathfrak{c}, 0, \beta) \vdash^* (\mathfrak{c}_0, \beta, 0)$
2-DCM dont on simule HP	*2-DCM simulante (teste IP)*

[Morita96] Toute *k*-DCM est simulable par une 2-RCM.

Idée *ajouter une pile stockant les transitions, simuler k compteurs avec 2*

Théorème 1 L'immortalité des 2-RCM est indécidable.

Idée *La simulation de Morita préserve l'immortalité.* $\Diamond$

Périodicité

Théorème 3 La périodicité des 2-RCM est indécidable.

Idée On réduit l'immortalité à la périodicité.

(1) L'immortalité des 2-RCM d'inverse mortelle est indécidable
(on ajoute au k-DCM un compteur incrémenté en permanence)

Périodicité

Théorème 3 La périodicité des 2-RCM est indécidable.

Idée On réduit l'immortalité à la périodicité.

(1) L'immortalité des 2-RCM d'inverse mortelle est indécidable (on ajoute au *k*-DCM un compteur incrémenté en permanence)

(2) Soit $\mathcal{M} = (S, 2, T)$ une 2-RCM d'inverse mortelle : $\mathcal{M}$ ne possède aucune orbite périodique.
On construit une 2-RCM $\mathcal{M}'$ d'ensemble d'états $S \times \{+, -\}$ qui simule $\mathcal{M}$ sur $(S, +)$ et $\mathcal{M}^{-1}$ sur $(S, -)$. Sur un état d'arrêt, on inverse la polarité.

Périodicité

Théorème 3 La périodicité des 2-RCM est indécidable.

Idée On réduit l'immortalité à la périodicité.

(1) L'immortalité des 2-RCM d'inverse mortelle est indécidable (on ajoute au k-DCM un compteur incrémenté en permanence)

(2) Soit $\mathcal{M} = (S, 2, T)$ une 2-RCM d'inverse mortelle : $\mathcal{M}$ ne possède aucune orbite périodique.
On construit une 2-RCM $\mathcal{M}'$ d'ensemble d'états $S \times \{+, -\}$ qui simule $\mathcal{M}$ sur $(S, +)$ et $\mathcal{M}^{-1}$ sur $(S, -)$. Sur un état d'arrêt, on inverse la polarité.

(3) $\mathcal{M}'$ est périodique ssi $\mathcal{M}$ est mortelle. $\Diamond$

2. machines de Turing réversibles

Définitions

Définition Une **TM** est un triplet (S, Σ, T) avec S l'ensemble fini d'états, Σ l'alphabet fini des symboles et $T \subseteq (S \times \{\leftarrow, \rightarrow\} \times S) \cup (S \times \Sigma \times S \times \Sigma)$ la table de transition.

Définitions

Définition Une **TM** est un triplet (S, Σ, T) avec S l'ensemble fini d'états, Σ l'alphabet fini des symboles et $T \subseteq (S \times \{\leftarrow, \rightarrow\} \times S) \cup (S \times \Sigma \times S \times \Sigma)$ la table de transition.

(s, δ, t) : « *dans l'état s se déplacer selon δ et passer dans l'état t.* »

$$\forall (s, c) \in S \times \Sigma^{\mathbb{Z}}, \quad (s, c) \vdash (t, \sigma_\delta(c)) \qquad \text{si } (s, \delta, t) \in T$$

Définitions

Définition Une **TM** est un triplet (S, Σ, T) avec S l'ensemble fini d'états, Σ l'alphabet fini des symboles et $T \subseteq (S \times \{\leftarrow, \rightarrow\} \times S) \cup (S \times \Sigma \times S \times \Sigma)$ la table de transition.

(s, δ, t) : « *dans l'état s se déplacer selon δ et passer dans l'état t.* »

$$\forall (s, c) \in S \times \Sigma^{\mathbb{Z}}, \quad (s, c) \vdash (t, \sigma_\delta(c)) \qquad \text{si } (s, \delta, t) \in T$$

(s, a, t, b) : « *dans l'état s lisant le symbole a sous la tête de lecture, écrire le symbole b et passer dans l'état t.* »

$$\forall (s, c) \in S \times \Sigma^{\mathbb{Z}}, \quad (s, c) \vdash (t, \mu_b(c)) \qquad \text{si } (s, a, t, b) \in T \text{ et } c(0) = a$$

Définitions

Définition Une **TM** est un triplet (S, Σ, T) avec S l'ensemble fini d'états, Σ l'alphabet fini des symboles et $T \subseteq (S \times \{\leftarrow, \rightarrow\} \times S) \cup (S \times \Sigma \times S \times \Sigma)$ la table de transition.

(s, δ, t) : *« dans l'état s se déplacer selon δ et passer dans l'état t. »*

$$\forall (s, c) \in S \times \Sigma^{\mathbb{Z}}, \quad (s, c) \vdash (t, \sigma_\delta(c)) \qquad \text{si } (s, \delta, t) \in T$$

(s, a, t, b) : *« dans l'état s lisant le symbole a sous la tête de lecture, écrire le symbole b et passer dans l'état t. »*

$$\forall (s, c) \in S \times \Sigma^{\mathbb{Z}}, \quad (s, c) \vdash (t, \mu_b(c)) \qquad \text{si } (s, a, t, b) \in T \text{ et } c(0) = a$$

Déterminisme (**DTM**) : au plus une instruction applicable.

SDD $(S \times \Sigma^{\mathbb{Z}}, G)$ avec $G(\mathfrak{c})$ l'unique $\mathfrak{c}'$ tel que $\mathfrak{c} \vdash \mathfrak{c}'$

Réversibilité

L'inverse d'une TM (S, Σ, T) est la TM (S, Σ, T^{-1}) où T^{-1} est l'union des inverses des instructions définies par :

$$\begin{aligned}(s, \delta, t)^{-1} &= \{(t, \delta^{-1}, s)\},\\ (s, a, t, b)^{-1} &= \{(t, b, s, a)\}\end{aligned}$$

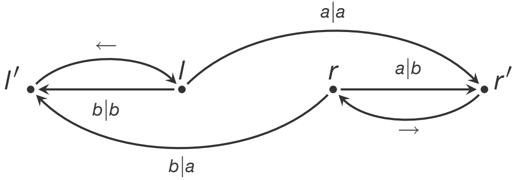
Réversibilité (RTM) : une RTM est une DTM d'inverse DTM.

Réversibilité

L'inverse d'une TM (S, Σ, T) est la TM (S, Σ, T^{-1}) où T^{-1} est l'union des inverses des instructions définies par :

$$\begin{array}{rcl} (s, \delta, t)^{-1} & = & \{(t, \delta^{-1}, s)\}, \\ (s, a, t, b)^{-1} & = & \{(t, b, s, a)\} \end{array}$$

Réversibilité (RTM) : une RTM est une DTM d'inverse DTM.



une RTM complète sur $\{a, b\}$

De Büchi à Hooper : Immortalité

"(T_2) To find an effective method, which for every Turing-machine *M* decides whether or not, for all tapes *I* (finite and infinite) and all states *B*, *M* will eventually halt if started in state *B* on tape *I*" *(Büchi, 1962)*

De Büchi à Hooper : Immortalité

"(T_2) To find an effective method, which for every Turing-machine *M* decides whether or not, for all tapes *I* (finite and infinite) and all states *B*, *M* will eventually halt if started in state *B* on tape *I*" *(Büchi, 1962)*

[Hooper66] L'immortalité des DTM est indécidable.

Idée *appels récursifs sur TM ! (on va y revenir)*

De Büchi à Hooper : Immortalité

"(T_2) To find an effective method, which for every Turing-machine *M* decides whether or not, for all tapes *I* (finite and infinite) and all states *B*, *M* will eventually halt if started in state *B* on tape *I*" *(Büchi, 1962)*

[Hooper66] L'immortalité des DTM est indécidable.

Idée *appels récursifs sur TM ! (on va y revenir)*

[Lecerf63] Toute DTM est simulable par une RTM.

Idée *Stocker les transitions sur le ruban*

De Büchi à Hooper : Immortalité

"(T_2) To find an effective method, which for every Turing-machine *M* decides whether or not, for all tapes *I* (finite and infinite) and all states *B*, *M* will eventually halt if started in state *B* on tape *I*" *(Büchi, 1962)*

[Hooper66] L'immortalité des DTM est indécidable.

Idée *appels récursifs sur TM ! (on va y revenir)*

[Lecerf63] Toute DTM est simulable par une RTM.

Idée *Stocker les transitions sur le ruban*

Tentative Combiner les deux résultats ci-dessus pour obtenir l'indécidabilité de l'immortalité des RTM... Ça ne marche pas !

Immortalité

Théorème 7 L'immortalité des RTM est indécidable.

Idée *on refait la preuve de Hooper version réversible...*

Principe réduire **HP** : simulation de 2-RCM $(s, \underline{@}1^m x2^n y)$

Immortalité

Théorème 7 L'immortalité des RTM est indécidable.

Idée *on refait la preuve de Hooper version réversible...*

Principe réduire **HP** : simulation de 2-RCM $(s, \underline{@}1^m x2^n y)$

Obstacle le modèle est compact : de toute recherche non bornée on peut extraire une configuration immortelle.

Immortalité

Théorème 7 L'immortalité des RTM est indécidable.

Idée *on refait la preuve de Hooper version réversible...*

Principe réduire **HP** : simulation de 2-RCM $(s, \underline{@}1^m x 2^n y)$

Obstacle le modèle est compact : de toute recherche non bornée on peut extraire une configuration immortelle.

Astuce recherche bornée avec appels récursifs au calcul :

$$\left(s_0, @1^k \underline{@_s} xy 1^{m-(k+3)} x 2^n y\right)$$
$$\left(s', @1^k \underline{@_s} 1^{m'} x 2^{n'} y 1^{m-(k+3+m'+n')} x 2^n y\right)$$

On utilise la réversibilité pour rétracter le calcul !

Immortalité

Théorème 7 L'immortalité des RTM est indécidable.

Idée *on refait la preuve de Hooper version réversible...*

Principe réduire **HP** : simulation de 2-RCM $(s, \underline{@}1^m x2^n y)$

Obstacle le modèle est compact : de toute recherche non bornée on peut extraire une configuration immortelle.

Astuce recherche bornée avec appels récursifs au calcul :

$$\left(s_0, @1^k \underline{@_s} xy 1^{m-(k+3)} x2^n y\right)$$
$$\left(s', @1^k \underline{@_s} 1^{m'} x2^{n'} y 1^{m-(k+3+m'+n')} x2^n y\right)$$

On utilise la réversibilité pour rétracter le calcul !

La RTM est immortelle ssi la 2-RCM est mortelle sur $(s_0, (0,0))$ $\Diamond$

Immortalité : ingrédients

`http://www.lif.univ-mrs.fr/~nollinge/rec/gnirut/`

$[s|\mathrm{check}_1|t\rangle$ vérifie $s.\,\underline{@_\alpha}1^m\mathrm{x} \vdash \underline{@_\alpha}1^m\mathrm{x}, t$ ou $s.\,\underline{@_\alpha}1^\omega \uparrow$ ou arrêt.

Immortalité : ingrédients

`http://www.lif.univ-mrs.fr/~nollinge/rec/gnirut/`

$[s|\mathrm{check}_1|t\rangle$ vérifie $s.\,\underline{@_\alpha}1^m\mathtt{x} \vdash \underline{@_\alpha}1^m\mathtt{x}, t$ ou $s.\,\underline{@_\alpha}1^\omega \uparrow$ ou arrêt.

$[s|\mathrm{search}_1|t_0, t_1, t_2\rangle$ vérifie $s.\,\underline{@_\alpha}1^m\mathtt{x} \vdash @_\alpha 1^m\underline{\mathtt{x}}, t_{m[3]}$ ou $\ldots$

Immortalité : ingrédients

`http://www.lif.univ-mrs.fr/~nollinge/rec/gnirut/`

$[s|\mathrm{check}_1|t\rangle$ vérifie $s.\ \underline{@_\alpha}1^m\mathtt{x} \vdash \underline{@_\alpha}1^m\mathtt{x}, t$ ou $s.\ \underline{@_\alpha}1^\omega \uparrow$ ou arrêt.

$[s|\mathrm{search}_1|t_0, t_1, t_2\rangle$ vérifie $s.\ \underline{@_\alpha}1^m\mathtt{x} \vdash @_\alpha 1^m\underline{\mathtt{x}}, t_{m[3]}$ ou ...

Instructions **RCM** :

- test de compteur $[s|\mathrm{test1}|z,p\rangle$ et $[s|\mathrm{test2}|z,p\rangle$
- incrémentation $[s|\mathrm{inc1}|t,co\rangle$ et $[s|\mathrm{inc2}|t,co\rangle$
- décrémentation $[s|\mathrm{dec1}|t,co\rangle$ et $[s|\mathrm{dec2}|t,co\rangle$

Immortalité : ingrédients

`http://www.lif.univ-mrs.fr/~nollinge/rec/gnirut/`

$[s|\mathrm{check}_1|t\rangle$ vérifie $s.\ \underline{@_\alpha}1^m\mathtt{x} \vdash \underline{@_\alpha}1^m\mathtt{x}, t$ ou $s.\ \underline{@_\alpha}1^\omega \uparrow$ ou arrêt.

$[s|\mathrm{search}_1|t_0, t_1, t_2\rangle$ vérifie $s.\ \underline{@_\alpha}1^m\mathtt{x} \vdash @_\alpha 1^m\underline{\mathtt{x}}, t_{m[3]}$ ou $\ldots$

Instructions **RCM** :

test de compteur $[s|\mathrm{test1}|z, p\rangle$ et $[s|\mathrm{test2}|z, p\rangle$

incrémentation $[s|\mathrm{inc1}|t, co\rangle$ et $[s|\mathrm{inc2}|t, co\rangle$

décrémentation $[s|\mathrm{dec1}|t, co\rangle$ et $[s|\mathrm{dec2}|t, co\rangle$

Simulateur : $[s|\mathrm{RCM}_\alpha|co_1, co_2, \ldots\rangle$ initialise puis calcule

Immortalité : ingrédients

`http://www.lif.univ-mrs.fr/~nollinge/rec/gnirut/`

$[s|\mathrm{check}_1|t\rangle$ vérifie $s.\ \underline{@_\alpha}1^m\mathrm{x} \vdash \underline{@_\alpha}1^m\mathrm{x}, t$ ou $s.\ \underline{@_\alpha}1^\omega \uparrow$ ou arrêt.

$[s|\mathrm{search}_1|t_0, t_1, t_2\rangle$ vérifie $s.\ \underline{@_\alpha}1^m\mathrm{x} \vdash @_\alpha 1^m\underline{\mathrm{x}}, t_{m[3]}$ ou $\ldots$

Instructions **RCM** :

- test de compteur $[s|\mathrm{test1}|z,p\rangle$ et $[s|\mathrm{test2}|z,p\rangle$
- incrémentation $[s|\mathrm{inc1}|t,co\rangle$ et $[s|\mathrm{inc2}|t,co\rangle$
- décrémentation $[s|\mathrm{dec1}|t,co\rangle$ et $[s|\mathrm{dec2}|t,co\rangle$

Simulateur : $[s|\mathrm{RCM}_\alpha|co_1, co_2, \ldots\rangle$ initialise puis calcule

$$\boxed{[s|\mathrm{check}_\alpha|t\rangle = [s|\mathrm{RCM}_\alpha|co_1, co_2, \ldots\rangle + \langle co_1, co_2, \ldots|\mathrm{RCM}_\alpha|s]}$$

Immortalité : programmation

def $[s|\mathrm{search}_1|t_0, t_1, t_2\rangle$:
  $s.\ \underline{@_\alpha} \vdash \underline{@_\alpha}, l$
  $l.\ \longrightarrow, u$
  $u.\ \underline{\mathsf{x}} \vdash \underline{\mathsf{x}}, t_0$
  $\mid \underline{1}\mathsf{x} \vdash 1\underline{\mathsf{x}}, t_1$
  $\mid \underline{1}1\mathsf{x} \vdash 11\underline{\mathsf{x}}, t_2$
  $\mid \underline{1}11 \vdash \underline{1}11, c$
  call $[c|\mathrm{check}_1|p\rangle$ from 1
  $p.\ \underline{1}11 \vdash 11\underline{1}, l$

def $[s|\mathrm{test2}|z, p\rangle$:
  $[s|\mathrm{search}_1|t_0, t_1, t_2\rangle$
  $[t_0|\mathrm{endtest2}|z_0, p_0\rangle$
  $[t_1|\mathrm{endtest2}|z_1, p_1\rangle$
  $[t_2|\mathrm{endtest2}|z_2, p_2\rangle$
  $\langle z_0, z_1, z_2|\mathrm{search}_1|z]$
  $\langle p_0, p_1, p_2|\mathrm{search}_1|p]$

Périodicité

Théorème 8 La périodicité des RTM est indécidable.

Idée On réduit l'immortalité à la périodicité.

(1) L'immortalité des RTM sans orbite périodique est indécidable

Périodicité

Théorème 8 La périodicité des RTM est indécidable.

Idée On réduit l'immortalité à la périodicité.

(1) L'immortalité des RTM sans orbite périodique est indécidable

(2) Soit $\mathcal{M} = (S, \Sigma, T)$ une RTM sans orbite périodique
On construit une RTM complète $\mathcal{M}'$ d'ensemble d'états $S \times \{+, -\}$ qui simule $\mathcal{M}$ sur $(S, +)$ et $\mathcal{M}^{-1}$ sur $(S, -)$. Sur un état d'arrêt, on inverse la polarité.

Périodicité

Théorème 8 La périodicité des RTM est indécidable.

Idée On réduit l'immortalité à la périodicité.

(1) L'immortalité des RTM sans orbite périodique est indécidable

(2) Soit $\mathcal{M} = (S, \Sigma, T)$ une RTM sans orbite périodique
On construit une RTM complète $\mathcal{M}'$ d'ensemble d'états $S \times \{+, -\}$ qui simule $\mathcal{M}$ sur $(S, +)$ et $\mathcal{M}^{-1}$ sur $(S, -)$. Sur un état d'arrêt, on inverse la polarité.

(3) $\mathcal{M}'$ est périodique ssi $\mathcal{M}$ est mortelle. $\Diamond$

3. automates cellulaires réversibles

Définition

Définition Un **CA** est un triplet (S, r, f) avec S l'ensemble fini d'états, r le rayon de voisinage et $f : S^{2r+1} \longrightarrow S$ la règle locale de transition.

SDD $(S^{\mathbb{Z}}, G)$ avec $\forall z \in \mathbb{Z},\ G(c)(z) = f(c(z-r), \dots, c(z+r))$

Définition

Définition Un **CA** est un triplet (S, r, f) avec S l'ensemble fini d'états, r le rayon de voisinage et $f : S^{2r+1} \longrightarrow S$ la règle locale de transition.

SDD $(S^{\mathbb{Z}}, G)$ avec $\forall z \in \mathbb{Z},\ G(c)(z) = f(c(z-r), \ldots, c(z+r))$

Ce sont les applications continues (pour la topologie produit) qui commutent avec les décalages ($\sigma(c)(z) = c(z+1)$).

Réversibilité (RCA) : un RCA est un CA bijectif.

Périodicité

Théorème 12 La périodicité des RCA est indécidable.

Idée On réduit la périodicité des RTM complètes.

(1) La périodicité des RTM complètes est indécidable.

Périodicité

Théorème 12 La périodicité des RCA est indécidable.

Idée On réduit la périodicité des RTM complètes.

(1) La périodicité des RTM complètes est indécidable.

(2) Soit $\mathcal{M} = (S, \Sigma, T)$ une RTM complète
On construit un RCA $(S', 2, f)$ d'ensemble d'états
$\Sigma \times (S \times \{+, -\} \cup \{\leftarrow, \rightarrow\})$ qui simule $\mathcal{M}$ sur $(S, +)$ et
$\mathcal{M}^{-1}$ sur $(S, -)$ en deux couches.

Périodicité

Théorème 12 La périodicité des RCA est indécidable.

Idée On réduit la périodicité des RTM complètes.

(1) La périodicité des RTM complètes est indécidable.

(2) Soit $\mathcal{M} = (S, \Sigma, T)$ une RTM complète
On construit un RCA $(S', 2, f)$ d'ensemble d'états
$\Sigma \times (S \times \{+, -\} \cup \{\leftarrow, \rightarrow\})$ qui simule $\mathcal{M}$ sur $(S, +)$ et
$\mathcal{M}^{-1}$ sur $(S, -)$ en deux couches.

(3) En cas d'incohérence locale, inverser la polarité.

Périodicité

Théorème 12 La périodicité des RCA est indécidable.

Idée On réduit la périodicité des RTM complètes.

(1) La périodicité des RTM complètes est indécidable.

(2) Soit $\mathcal{M} = (S, \Sigma, T)$ une RTM complète
On construit un RCA $(S', 2, f)$ d'ensemble d'états
$\Sigma \times (S \times \{+, -\} \cup \{\leftarrow, \rightarrow\})$ qui simule $\mathcal{M}$ sur $(S, +)$ et
$\mathcal{M}^{-1}$ sur $(S, -)$ en deux couches.

(3) En cas d'incohérence locale, inverser la polarité.

(4) Le RCA est périodique ssi $\mathcal{M}$ est périodique. $\Diamond$

The End