Programmation Par Contraintes

propagateurs pour domaines finis

Denys Duchier

Université d'Orléans

IPVGCA PPC 2007

L'intuition par l'exemple

Introduction

- que ce passe-t-il dans un solveur ?
- quelques exemples pour concrétiser l'intuition
- on écrira $D_t(x)$ pour l'ensemble des valeurs possibles pour x à l'instant discret t
- le rôle d'un propagateur est de retirer de $D_t(x)$ les valeurs qui ne peuvent pas mener à une solution. On produit ainsi $D_{t+1}(x)$

Exemple 1

variable et domaine initial : $x \in [3, 7]$

$$D_0(x) = \{3, 4, 6, 7\}$$

contrainte : $x > 4$

$$D_1(x) = \{5, 6, 7\}$$

Exemple 1

variable et domaine initial : $x \in [3,7]$

$$D_0(x) = \{3,4,6,7\}$$

contrainte : $x > 4$

$$D_1(x) = \{5,6,7\}$$

Exemple 1

variable et domaine initial : $x \in [3, 7]$

$$D_0(x) = \{3, 4, 6, 7\}$$

contrainte : $x > 4$

$$D_1(x) = \{5, 6, 7\}$$

Exemple 1

variable et domaine initial : $x \in [3, 7]$

$$D_0(x) = \{\cancel{3}, \cancel{4}, 6, 7\}$$

contrainte : $x > 4$

$$D_1(x) = \{5, 6, 7\}$$

Exemple 2

$x, y \in [1, 5]$

Exemple 2

$x, y \in [1, 5]$

$$D_0(x) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$D_0(y) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Exemple 2

$x, y \in [1, 5]$

$x > y$

$$D_0(x) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$D_0(y) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Exemple 2

$x, y \in [1, 5]$

$x > y$

$$D_0(x) = \{\cancel{1}, 2, 3, 4, 5\}$$
$$D_0(y) = \{1, 2, 3, 4, \cancel{5}\}$$

Exemple 2

$x, y \in [1, 5]$

$x > y$

$$D_0(x) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$D_0(y) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$D_1(x) = \{2, 3, 4, 5\}$$
$$D_1(y) = \{1, 2, 3, 4\}$$

Exemple 2

$x, y \in [1, 5]$ $\qquad$ $x > y \quad \wedge \quad x < y$

$$D_0(x) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad D_1(x) = \{2, 3, 4, 5\}$$
$$D_0(y) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad D_1(y) = \{1, 2, 3, 4\}$$

Exemple 2

$x, y \in [1, 5]$

$x > y \quad \wedge \quad x < y$

$$D_0(x) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$D_0(y) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$D_1(x) = \{2, 3, \cancel{4}, \cancel{5}\}$$
$$D_1(y) = \{\cancel{1}, \cancel{2}, 3, 4\}$$

Exemple 2

$x, y \in [1, 5]$

$$x > y \quad \wedge \quad x < y$$

$$D_0(x) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$D_0(y) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$D_1(x) = \{2, 3, 4, 5\}$$
$$D_1(y) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$D_2(x) = \{2, 3\}$$
$$D_2(y) = \{3, 4\}$$

Exemple 2

$x, y \in [1, 5]$

$$x > y \quad \wedge \quad x < y$$

$$D_0(x) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$D_0(y) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$D_1(x) = \{2, 3, 4, 5\}$$
$$D_1(y) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$D_2(x) = \{\cancel{2}, \cancel{3}\}$$
$$D_2(y) = \{\cancel{3}, \cancel{4}\}$$

Exemple 2

$x, y \in [1, 5]$ $\qquad$ $x > y \quad \wedge \quad x < y$

$$D_0(x) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad D_1(x) = \{2, 3, 4, 5\}$$
$$D_0(y) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad D_1(y) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$D_2(x) = \{2, 3\} \qquad D_3(x) = \emptyset$$
$$D_2(y) = \{3, 4\} \qquad D_3(y) = \emptyset$$

Exemple 3

$x + 3y = 5$ $\qquad$ $x, y \in [1, 5]$

Exemple 3

$x + 3y = 5$ $\qquad x, y \in [1, 5]$

réécrire la formule pour isoler chaque variable :

Exemple 3

$x + 3y = 5$ $\qquad$ $x, y \in [1, 5]$

réécrire la formule pour isoler chaque variable :

$$x = 5 - 3y$$
$$y = (5 - x)/3$$

Exemple 3

$x + 3y = 5$ $\qquad$ $x, y \in [1, 5]$

on peut alors exprimer les bornes :

$$x = 5 - 3y$$
$$y = (5 - x)/3$$

Exemple 3

$x + 3y = 5$ $\qquad$ $x, y \in [1, 5]$

on peut alors exprimer les bornes :

$$x = 5 - 3y \qquad \leq x \leq$$

$$y = (5 - x)/3 \qquad \leq y \leq$$

Exemple 3

$x + 3y = 5$ $\qquad$ $x, y \in [1, 5]$

on peut alors exprimer les bornes :

$$x = 5 - 3y \qquad \leq x \leq 5 - 3\mathtt{min}(y)$$

$$y = (5 - x)/3 \qquad \leq y \leq$$

Exemple 3

$x + 3y = 5$ $\qquad$ $x, y \in [1, 5]$

on peut alors exprimer les bornes :

$$x = 5 - 3y \qquad 5 - 3\mathtt{max}(y) \leq x \leq 5 - 3\mathtt{min}(y)$$

$$y = (5 - x)/3 \qquad \leq y \leq$$

Exemple 3

$x + 3y = 5$ $\qquad$ $x, y \in [1, 5]$

on peut alors exprimer les bornes :

$$x = 5 - 3y \qquad 5 - 3\mathtt{max}(y) \leq x \leq 5 - 3\mathtt{min}(y)$$

$$y = (5 - x)/3 \qquad \leq y \leq \lfloor (5 - \mathtt{min}(x))/3 \rfloor$$

Exemple 3

$x + 3y = 5$ $\qquad$ $x, y \in [1, 5]$

on peut alors exprimer les bornes :

$$x = 5 - 3y \qquad 5 - 3\mathtt{max}(y) \leq x \leq 5 - 3\mathtt{min}(y)$$

$$y = (5 - x)/3 \qquad \lceil(5 - \mathtt{max}(x))/3\rceil \leq y \leq \lfloor(5 - \mathtt{min}(x))/3\rfloor$$

Exemple 3

$x + 3y = 5$ $\qquad$ $x, y \in [1, 5]$

on peut alors exprimer les bornes :

$$x = 5 - 3y \qquad 5 - 3\mathtt{max}(y) \leq x \leq 5 - 3\mathtt{min}(y)$$
$$y = (5 - x)/3 \qquad \lceil (5 - \mathtt{max}(x))/3 \rceil \leq y \leq \lfloor (5 - \mathtt{min}(x))/3 \rfloor$$

initialement :

$$D_0(x) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$D_0(y) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Exemple 3

$x + 3y = 5$ $\quad x, y \in [1, 5]$

on peut alors exprimer les bornes :

$$x = 5 - 3y \qquad 5 - 3\mathtt{max}(y) \leq x \leq 5 - 3\mathtt{min}(y)$$
$$y = (5 - x)/3 \qquad \lceil (5 - \mathtt{max}(x))/3 \rceil \leq y \leq \lfloor (5 - \mathtt{min}(x))/3 \rfloor$$

l'évaluation des bornes dans D_0 donne :

$$D_0(x) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$D_0(y) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Exemple 3

$x + 3y = 5$ $\qquad$ $x, y \in [1, 5]$

on peut alors exprimer les bornes :

$$\begin{array}{ll} x = 5 - 3y & 5 - 3\mathtt{max}(y) \leq x \leq 5 - 3\mathtt{min}(y) \\ y = (5 - x)/3 & \lceil (5 - \mathtt{max}(x))/3 \rceil \leq y \leq \lfloor (5 - \mathtt{min}(x))/3 \rfloor \end{array}$$

l'évaluation des bornes dans D_0 donne : $\qquad$ $-10 \leq x \leq 2$

$$D_0(x) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$D_0(y) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Exemple 3

$x + 3y = 5$ $\qquad$ $x, y \in [1, 5]$

on peut alors exprimer les bornes :

$$x = 5 - 3y \qquad 5 - 3\mathtt{max}(y) \leq x \leq 5 - 3\mathtt{min}(y)$$
$$y = (5 - x)/3 \qquad \lceil (5 - \mathtt{max}(x))/3 \rceil \leq y \leq \lfloor (5 - \mathtt{min}(x))/3 \rfloor$$

l'évaluation des bornes dans D_0 donne : $\quad -10 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq 1$

$$D_0(x) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$D_0(y) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Exemple 3

$x + 3y = 5$ $\qquad$ $x, y \in [1, 5]$

on peut alors exprimer les bornes :

$$x = 5 - 3y \qquad 5 - 3\mathtt{max}(y) \leq x \leq 5 - 3\mathtt{min}(y)$$
$$y = (5 - x)/3 \qquad \lceil (5 - \mathtt{max}(x))/3 \rceil \leq y \leq \lfloor (5 - \mathtt{min}(x))/3 \rfloor$$

l'évaluation des bornes dans D_0 donne : $\quad -10 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq 1$

$$D_0(x) = \{1, 2, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}\}$$
$$D_0(y) = \{1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}\}$$

Exemple 3

$x + 3y = 5$ $\qquad$ $x, y \in [1, 5]$

on peut alors exprimer les bornes :

$$x = 5 - 3y \qquad 5 - 3\mathtt{max}(y) \leq x \leq 5 - 3\mathtt{min}(y)$$
$$y = (5 - x)/3 \qquad \lceil (5 - \mathtt{max}(x))/3 \rceil \leq y \leq \lfloor (5 - \mathtt{min}(x))/3 \rfloor$$

l'évaluation des bornes dans D_0 donne : $\qquad -10 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq 1$

$$D_0(x) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad D_1(x) = \{1, 2\}$$
$$D_0(y) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad D_1(y) = \{1\}$$

Exemple 3

$x + 3y = 5$ $\qquad$ $x, y \in [1, 5]$

on peut alors exprimer les bornes :

$$x = 5 - 3y \qquad 5 - 3\mathtt{max}(y) \leq x \leq 5 - 3\mathtt{min}(y)$$
$$y = (5 - x)/3 \qquad \lceil (5 - \mathtt{max}(x))/3 \rceil \leq y \leq \lfloor (5 - \mathtt{min}(x))/3 \rfloor$$

l'évaluation des bornes dans D_1 donne :

$$D_0(x) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad D_1(x) = \{1, 2\}$$
$$D_0(y) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad D_1(y) = \{1\}$$

Exemple 3

$x + 3y = 5$ $\qquad\qquad x, y \in [1, 5]$

on peut alors exprimer les bornes :

$$x = 5 - 3y \qquad 5 - 3\mathtt{max}(y) \leq x \leq 5 - 3\mathtt{min}(y)$$
$$y = (5 - x)/3 \qquad \lceil (5 - \mathtt{max}(x))/3 \rceil \leq y \leq \lfloor (5 - \mathtt{min}(x))/3 \rfloor$$

l'évaluation des bornes dans D_1 donne : $\qquad 2 \leq x \leq 2$ et $1 \leq y \leq 1$

$$D_0(x) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad D_1(x) = \{1, 2\}$$
$$D_0(y) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad D_1(y) = \{1\}$$

Exemple 3

$x + 3y = 5$ $\qquad$ $x, y \in [1, 5]$

on peut alors exprimer les bornes :

$$x = 5 - 3y \qquad 5 - 3\mathtt{max}(y) \leq x \leq 5 - 3\mathtt{min}(y)$$
$$y = (5 - x)/3 \qquad \lceil (5 - \mathtt{max}(x))/3 \rceil \leq y \leq \lfloor (5 - \mathtt{min}(x))/3 \rfloor$$

l'évaluation des bornes dans D_1 donne : $\qquad 2 \leq x \leq 2$ et $1 \leq y \leq 1$

$$D_0(x) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad D_1(x) = \{\cancel{1}, 2\}$$
$$D_0(y) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad D_1(y) = \{1\}$$

Exemple 3

$x + 3y = 5$ $\qquad$ $x, y \in [1, 5]$

on peut alors exprimer les bornes :

$$
\begin{array}{ll}
x = 5 - 3y & 5 - 3\mathtt{max}(y) \leq x \leq 5 - 3\mathtt{min}(y) \\
y = (5 - x)/3 & \lceil (5 - \mathtt{max}(x))/3 \rceil \leq y \leq \lfloor (5 - \mathtt{min}(x))/3 \rfloor
\end{array}
$$

l'évaluation des bornes dans D_1 donne : $\quad 2 \leq x \leq 2$ et $1 \leq y \leq 1$

$$
\begin{array}{lll}
D_0(x) = \{1, 2, 3, 4, 5\} & D_1(x) = \{1, 2\} & D_2(x) = \{2\} \\
D_0(y) = \{1, 2, 3, 4, 5\} & D_1(y) = \{1\} & D_2(y) = \{1\}
\end{array}
$$

Exemple 4

$x + y = z$

$$D_0(x) = \{1, 3, 6\}$$
$$D_0(y) = \{2, 4, 7\}$$
$$D_0(z) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Exemple 4

$x + y = z$

initialement :

$$
\begin{aligned}
D_0(x) &= \{1, 3, 6\} \\
D_0(y) &= \{2, 4, 7\} \\
D_0(z) &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}
\end{aligned}
$$

Exemple 4

$x + y = z$

cette fois-ci, nous allons raisonner sur tout le domaine, pas seulement sur les bornes :

$$
\begin{aligned}
D_0(x) &= \{1, 3, 6\} \\
D_0(y) &= \{2, 4, 7\} \\
D_0(z) &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}
\end{aligned}
$$

Exemple 4

$x + y = z$

calculons les valeurs possibles de z grâce à : $z = x + y$

$$D_0(x) = \{1, 3, 6\}$$
$$D_0(y) = \{2, 4, 7\}$$
$$D_0(z) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Exemple 4

$x + y = z$

calculons les valeurs possibles de z grâce à : $z = x + y$

$$D_0(x) = \{1, 3, 6\}$$
$$D_0(y) = \{2, 4, 7\}$$
$$D_0(z) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Exemple 4

$x + y = z$

calculons les valeurs possibles de z grâce à : $z = x + y$

$$D_0(x) = \{1, 3, 6\}$$
$$D_0(y) = \{2, 4, 7\}$$
$$D_0(z) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Exemple 4

$x + y = z$

calculons les valeurs possibles de z grâce à : $z = x + y$

$$D_0(x) = \{1, 3, 6\}$$
$$D_0(y) = \{2, 4, 7\}$$
$$D_0(z) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Exemple 4

$x + y = z$

calculons les valeurs possibles de z grâce à : $z = x + y$

$$D_0(x) = \{1, 3, 6\} \qquad D_1(x) = \{1, 3, 6\}$$
$$D_0(y) = \{2, 4, 7\} \qquad D_1(y) = \{2, 4, 7\}$$
$$D_0(z) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad D_1(z) = \{3, 5, 7\}$$

Exemple 4

$x + y = z$

calculons les valeurs possibles de x grâce à : $x = z - y$

$$D_0(x) = \{1, 3, 6\} \qquad D_1(x) = \{1, 3, 6\}$$
$$D_0(y) = \{2, 4, 7\} \qquad D_1(y) = \{2, 4, 7\}$$
$$D_0(z) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad D_1(z) = \{3, 5, 7\}$$

Exemple 4

$x + y = z$

calculons les valeurs possibles de x grâce à : $x = z - y$

$$D_0(x) = \{1, 3, 6\} \qquad D_1(x) = \{1, 3, 6\}$$
$$D_0(y) = \{2, 4, 7\} \qquad D_1(y) = \{2, 4, 7\}$$
$$D_0(z) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad D_1(z) = \{3, 5, 7\}$$

Exemple 4

$x + y = z$

calculons les valeurs possibles de x grâce à : $x = z - y$

$$D_0(x) = \{1,3,6\} \qquad D_1(x) = \{1,3,6\}$$
$$D_0(y) = \{2,4,7\} \qquad D_1(y) = \{2,4,7\}$$
$$D_0(z) = \{1,2,3,4,5,6,7\} \qquad D_1(z) = \{3,5,7\}$$

$$D_2(x) = \{1,3\}$$
$$D_2(y) = \{2,4,7\}$$
$$D_2(z) = \{3,5,7\}$$

Exemple 4

$x + y = z$

calculons les valeurs possibles de y grâce à : $y = z - x$

$$D_0(x) = \{1, 3, 6\}$$
$$D_0(y) = \{2, 4, 7\}$$
$$D_0(z) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$D_1(x) = \{1, 3, 6\}$$
$$D_1(y) = \{2, 4, 7\}$$
$$D_1(z) = \{3, 5, 7\}$$

$$D_2(x) = \{1, 3\}$$
$$D_2(y) = \{2, 4, 7\}$$
$$D_2(z) = \{3, 5, 7\}$$

Exemple 4

$x + y = z$

calculons les valeurs possibles de y grâce à : $y = z - x$

$$D_0(x) = \{1, 3, 6\} \qquad D_1(x) = \{1, 3, 6\}$$
$$D_0(y) = \{2, 4, 7\} \qquad D_1(y) = \{2, 4, 7\}$$
$$D_0(z) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad D_1(z) = \{3, 5, 7\}$$

$$D_2(x) = \{1, 3\}$$
$$D_2(y) = \{2, 4, 7\}$$
$$D_2(z) = \{3, 5, 7\}$$

Exemple 4

$x + y = z$

calculons les valeurs possibles de y grâce à : $y = z - x$

$$
\begin{aligned}
D_0(x) &= \{1, 3, 6\} & D_1(x) &= \{1, 3, 6\} \\
D_0(y) &= \{2, 4, 7\} & D_1(y) &= \{2, 4, 7\} \\
D_0(z) &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} & D_1(z) &= \{3, 5, 7\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2(x) &= \{1, 3\} & D_3(x) &= \{1, 3\} \\
D_2(y) &= \{2, 4, 7\} & D_3(y) &= \{2, 4\} \\
D_2(z) &= \{3, 5, 7\} & D_3(z) &= \{3, 5, 7\}
\end{aligned}
$$

on peut vérifier que c'est un point fixe

Formalisation

Propagation

Dans chacun des exemples, on a calculé une séquence de domaines :

Propagation

Dans chacun des exemples, on a calculé une séquence de domaines :

$$D_0$$

Propagation

Dans chacun des exemples, on a calculé une séquence de domaines :

$$D_0 \longrightarrow D_1$$

Propagation

Dans chacun des exemples, on a calculé une séquence de domaines :

$$D_0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow D_2$$

Propagation

Dans chacun des exemples, on a calculé une séquence de domaines :

$$D_0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow D_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_n$$

Propagation

Dans chacun des exemples, on a calculé une séquence de domaines :

$$D_0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow D_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_n$$

A chaque étape, on a appliqué un critère de filtrage (propagateur) :

$$\begin{aligned} D_1 &= f_1(D_0) \\ D_2 &= f_2(D_1) \\ &\vdots \\ D_n &= f_n(D_{n-1}) \end{aligned}$$

avec $f_i \in \{p_1, \ldots, p_m\}$

Propagation

on veux que :

- la suite (D_i) converge
- la limite ne dépende pas du choix de la suite (f_i)

Définitions

- domaine fini : sous ensemble fini de $\mathbb{N}$
- $[n, m] = \{i \in \mathbb{N} \mid n \leq i \leq m\}$
- domaine $D : V \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ tq $D(x)$ est un sous ensemble fini de $\mathbb{N}$
- $x \in V$ est déterminée si $|D(x)| = 1$
- D est en échec (ou faux) si $\exists x \in V$ tq $D(x) = \emptyset$

Définitions

- les domaines forment un treillis :

$$
\begin{array}{rcl}
(D_1 \sqcap D_2)(x) & = & D_1(x) \cap D_2(x) \\
(D_1 \sqcup D_2)(x) & = & D_1(x) \cup D_2(x) \\
D_1 \sqsubseteq D_2 & \equiv & \forall x \in V : \; D_1(x) \subseteq D_2(x)
\end{array}
$$

- quand $D_1 \sqsubseteq D_2$ on dit que D_1 est plus fort que D_2
- domaines finis $\Rightarrow$ $D_1 \sqsubset D_2$ bien-fondée

Définitions

affectation :

- $\alpha : V \to \mathbb{N}$
- notation : $\{x_1 \mapsto i_1, x_2 \mapsto i_2, \ldots, x_n \mapsto i_n\}$
- $\alpha \in D \quad \equiv \quad \forall x \in V : \ \alpha(x) \in D(x)$

contrainte : c sur $x_1, \ldots, x_n$ peut être modélisée par un ensemble d'affectations α tq $\mathrm{dom}(\alpha) = \{x_1, \ldots, x_n\}$

Propagateurs

- une contrainte est définie de manière extensionelle par un ensemble d'affectations
- cette représentation est peu utilisée en pratique :
  - trop de mémoire (exponentielle en nombre de variables)
  - on perd la "structure" de la contrainte
- les solveurs à propagation de contraintes implémentent une contrainte par une collection de propagateurs (filtres, opérateurs de contraction)

Propagateur : propriétés

un propagateur p est une fonction mappant un domaine à un domaine

contractant :

$$p(D) \sqsubseteq D$$

le rôle d'un propagateur est de filtrer des valeurs

monotone :

$$D_1 \sqsubseteq D_2 \quad \Rightarrow p(D_1) \sqsubseteq p(D_2)$$

à partir d'une hypothèse plus forte p dérive des conclusions plus précises

Propagateur : propriétés

un ensemble P de propagateurs doit implémenter fidèlement la contrainte correspondante.

correction : p est correct pour c s'il n'élimine pas d'affectation valides :

$$\forall D \qquad D \cap c \quad = \quad p(D) \cap c$$

complétude : un ensemble P de propagateurs est complet pour c (vérifie c) s'il peut distinguer les solutions des non-solutions :

$$\forall D \text{ déterminé} \qquad (\forall p \in P : p(D) = D) \equiv D \text{ est solution de } c$$

i.e. $\forall D$ dét. non sol, $p(D)$ est en échec

Propagateurs : propriétés

- P implémente c si P vérifie c et $\forall p \in P$, p est correct pour c
- l'identité est correcte !
- pour que P vérifie c, il n'est pas nécessaire qu'il propage ; il suffit qu'il teste

Itérations

- P un ensemble fini de propagateurs
- $\sigma \in P^*$ une séquence de propagateurs
- soit $\sigma = p_1\, p_2\, \ldots\, p_n$:

$$\sigma(D) = (p_n \circ \cdots \circ p_2 \circ p_1)(D)$$

- σ est stabilisée pour D ssi :

$$\forall \sigma' \in P^* \qquad \sigma\sigma'(D) = \sigma(D)$$

Itérations

théorème : pour toutes les séquence stabilisées, on atteint le même point-fixe

Preuve : soient σ_1, σ_2 deux séquences stabilisée pour D :

$$\begin{aligned} \sigma_1(D) &\sqsubseteq D && \sigma_1 \text{ contractant} \\ \sigma_2(\sigma_1(D)) &\sqsubseteq \sigma_2(D) && \sigma_2 \text{ monotone} \\ \sigma_1(D) &\sqsubseteq \sigma_2(D) && \sigma_1 \text{ stabilisée} \end{aligned}$$

de la même manière on déduit $\sigma_2(D) \sqsubseteq \sigma_1(D)$. Par conséquent :

$$\sigma_1(D) = \sigma_2(D)$$

Itérations chaotiques

- itération : $I \in P^\omega$
- itération chaotique (pour D) : une itération telle que, si une réduction est possible, alors elle n'est pas indéfiniment différée
- soit une itération I. Elle est chaotique pour D, si $\forall \sigma \in P^*$ préfixe (fini) de I, et si $\exists \sigma' \in P^*$: $\sigma\sigma'(D) \sqsubset \sigma(D)$, alors il existe un préfixe (fini) $\sigma\sigma''$ de I, tel que $\sigma\sigma''(D) \sqsubset \sigma(D)$
- on construit ainsi une chaine décroissante ; or $\sqsubset$ est bien-fondée, donc la suite est finie
- toute itération chaotique atteint le même point-fixe en un nombre fini d'étapes
- il suffit de choisir les propagateurs de manière équitable

Réalisation de propagateurs : indexicaux

Conditions de filtrage

soit la contrainte : $x \leq y$

Conditions de filtrage

soit la contrainte : $x \leq y$

Bornes

$\leq x \leq$

$\leq y \leq$

Conditions de filtrage

soit la contrainte : $x \leq y$

Bornes

$$0 \leq x \leq \mathtt{max}(y)$$
$$\leq y \leq$$

Conditions de filtrage

soit la contrainte : $x \leq y$

Bornes

$$0 \leq x \leq \mathtt{max}(y)$$

$$\mathtt{min}(x) \leq y \leq \infty$$

Conditions de filtrage

soit la contrainte : $x \leq y$

Bornes	**Filtrage**
$0 \leq x \leq \mathtt{max}(y)$	$x \in [0, \mathtt{max}(y)]$
$\mathtt{min}(x) \leq y \leq \infty$	$y \in [\mathtt{min}(x), \infty]$

Conditions de filtrage

soit la contrainte : $x \leq y$

Bornes	Filtrage
$0 \leq x \leq \mathtt{max}(y)$	$x \in [0, \mathtt{max}(y)]$
$\mathtt{min}(x) \leq y \leq \infty$	$y \in [\mathtt{min}(x), \infty]$

Indexicaux : x `in` R

$$x \ \mathtt{in}\ 0 \mathinner{\ldotp\ldotp} \mathtt{max}(y)$$

$$y \ \mathtt{in}\ \mathtt{min}(x) \mathinner{\ldotp\ldotp} \mathtt{sup}$$

Syntaxe des expressions indexicales

$$
\begin{array}{lcl}
T & ::= & n \mid \mathtt{inf} \mid \mathtt{sup} \mid \\
 & & \mathtt{min}(x) \mid \mathtt{max}(x) \mid \mathtt{card}(x) \mid \mathtt{val}(x) \mid \\
 & & T_1 + T_2 \mid T_1 - T_2 \mid T_1 \times T_2 \mid -T_1 \\
 & & \lfloor T_1 / T_2 \rfloor \mid \lceil T_1 / T_2 \rceil \mid T_1 \,\mathtt{mod}\, T_2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
R & ::= & \{T_1, \ldots, T_n\} \mid T_1 \,..\, T_2 \mid \mathtt{dom}(x) \mid \\
 & & R_1 \cap R_2 \mid R_1 \cup R_2 \mid \overline{R_1} \mid -R_1 \\
 & & R_1 + R_2 \mid R_1 - R_2 \mid R_1 * R_2 \mid R_1 / R_2 \mid R_1 \,\mathtt{mod}\, R_2 \mid \\
 & & R_1 + T_1 \mid R_1 - T_1 \mid R_1 * T_1 \mid \\
 & & \lfloor R_1 / T_1 \rfloor \mid \lceil R_1 / T_1 \rceil \mid R_1 \,\mathtt{mod}\, T_1
\end{array}
$$

Sémantique des expressions indexicales

On écrira $D[\![E]\!]$ pour l'évaluation de E dans D :

$$
\begin{aligned}
D[\![\texttt{dom}(x)]\!] &= D(x) \\
D[\![\texttt{min}(x)]\!] &= \inf(D(x)) \\
D[\![\texttt{max}(x)]\!] &= \sup(D(x)) \\
D[\![\texttt{val}(x)]\!] &= n & \text{si } D(x) = \{n\}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{D[\![T_1]\!] = n_1 \qquad D[\![T_2]\!] = n_2}{D[\![T_1 + T_2]\!] = n_1 + n_2}
$$

Sémantique des expressions indexicales

$$\frac{D[\![T_1]\!] = n_1 \qquad D[\![T_2]\!] = n_2}{D[\![T_1 \,..\, T_2]\!] = [n_1, n_2]}$$

$$\frac{D[\![R_1]\!] = d_1 \qquad D[\![R_2]\!] = d_2}{D[\![R_1 \cap R_2]\!] = d_1 \cap d_2}$$

$$\frac{D[\![R_1]\!] = d_1 \qquad D[\![R_2]\!] = d_2}{D[\![R_1 + R_2]\!] = \{i_1 + i_2 \mid \forall i_1 \in d_1,\ \forall i_2 \in d_2\}}$$

Sémantique des assertions indexicales

notation :

$$D[x \mapsto d](y) = \begin{cases} d & \text{si } x = y \\ D(y) & \text{sinon} \end{cases}$$

l'assertion $x \ \texttt{in} \ R$ définit le propagateur suivant :

$$(x \ \texttt{in} \ R)(D) \quad = \quad D[x \mapsto D(x) \cap D[\![R]\!]]$$

Exercices

Exercice 1

$x + y = c$

Exercice 1

$x + y = c$

Equations

$x = c - y$

$y = c - x$

Exercice 1

$x + y = c$

Equations	Bornes
$x = c - y$	$c - \mathtt{max}(y) \leq x \leq c - \mathtt{min}(y)$
$y = c - x$	$c - \mathtt{max}(x) \leq y \leq c - \mathtt{min}(x)$

Exercice 1

$x + y = c$

Equations	Bornes
$x = c - y$	$c - \mathtt{max}(y) \leq x \leq c - \mathtt{min}(y)$
$y = c - x$	$c - \mathtt{max}(x) \leq y \leq c - \mathtt{min}(x)$

Filtrage sur les bornes :

$$x \;\; \mathtt{in} \;\; c - \mathtt{max}(y) \,..\, c - \mathtt{min}(y)$$
$$y \;\; \mathtt{in} \;\; c - \mathtt{max}(x) \,..\, c - \mathtt{min}(x)$$

Exercice 1

$x + y = c$

Equations	Bornes
$x = c - y$	$c - \mathtt{max}(y) \leq x \leq c - \mathtt{min}(y)$
$y = c - x$	$c - \mathtt{max}(x) \leq y \leq c - \mathtt{min}(x)$

Filtrage sur les bornes :

$$x \;\; \mathtt{in} \;\; c - \mathtt{max}(y) \mathinner{..} c - \mathtt{min}(y)$$
$$y \;\; \mathtt{in} \;\; c - \mathtt{max}(x) \mathinner{..} c - \mathtt{min}(x)$$

Filtrage sur les domaines :

$$x \;\; \mathtt{in} \;\; \{c\} - \mathtt{dom}(y)$$
$$y \;\; \mathtt{in} \;\; \{c\} - \mathtt{dom}(x)$$

Exercice 2

$x + y = z$

Exercice 2

$x + y = z$

Equations	Bornes
$z = x + y$	$\mathtt{min}(x) + \mathtt{min}(y) \leq z \leq \mathtt{max}(x) + \mathtt{max}(y)$
$x = z - y$	$\mathtt{min}(z) - \mathtt{max}(y) \leq x \leq \mathtt{max}(z) - \mathtt{min}(y)$
$y = z - x$	$\mathtt{min}(z) - \mathtt{max}(x) \leq y \leq \mathtt{max}(z) - \mathtt{min}(x)$

Exercice 2

$x + y = z$

Equations	Bornes
$z = x + y$	$\mathtt{min}(x) + \mathtt{min}(y) \leq z \leq \mathtt{max}(x) + \mathtt{max}(y)$
$x = z - y$	$\mathtt{min}(z) - \mathtt{max}(y) \leq x \leq \mathtt{max}(z) - \mathtt{min}(y)$
$y = z - x$	$\mathtt{min}(z) - \mathtt{max}(x) \leq y \leq \mathtt{max}(z) - \mathtt{min}(x)$

Filtrage sur les bornes :

$$z \ \mathtt{in} \ \mathtt{min}(x) + \mathtt{min}(y) \,..\, \mathtt{max}(x) + \mathtt{max}(y)$$
$$x \ \mathtt{in} \ \mathtt{min}(z) - \mathtt{max}(y) \,..\, \mathtt{max}(z) - \mathtt{min}(y)$$
$$y \ \mathtt{in} \ \mathtt{min}(z) - \mathtt{max}(x) \,..\, \mathtt{max}(z) - \mathtt{min}(x)$$

Exercice 2

$x + y = z$

Equations	Bornes
$z = x + y$	$\texttt{min}(x) + \texttt{min}(y) \leq z \leq \texttt{max}(x) + \texttt{max}(y)$
$x = z - y$	$\texttt{min}(z) - \texttt{max}(y) \leq x \leq \texttt{max}(z) - \texttt{min}(y)$
$y = z - x$	$\texttt{min}(z) - \texttt{max}(x) \leq y \leq \texttt{max}(z) - \texttt{min}(x)$

Filtrage sur les domaines :

$$z \ \texttt{in} \ \texttt{dom}(x) + \texttt{dom}(y)$$
$$x \ \texttt{in} \ \texttt{dom}(z) - \texttt{dom}(y)$$
$$y \ \texttt{in} \ \texttt{dom}(z) - \texttt{dom}(x)$$

Exercice 3

$ax + by = c \qquad \text{avec } a, b, c > 0$

Exercice 3

$ax + by = c \qquad \text{avec } a, b, c > 0$

Equations :

$$x = (c - by)/a$$
$$y = (c - ax)/b$$

Exercice 3

$ax + by = c \qquad$ avec $a, b, c > 0$

Equations :

$$x = (c - by)/a$$
$$y = (c - ax)/b$$

Bornes :

$$\lceil (c - b * \mathtt{max}(y))/a \rceil \leq x \leq \lfloor (c - b * \mathtt{min}(y))/a \rfloor$$
$$\lceil (c - a * \mathtt{max}(x))/b \rceil \leq y \leq \lfloor (c - b * \mathtt{max}(x))/b \rfloor$$

Exercice 3

$ax + by = c \qquad$ avec $a, b, c > 0$

Equations :

$$x = (c - by)/a$$
$$y = (c - ax)/b$$

Bornes :

$$\lceil (c - b * \mathtt{max}(y))/a \rceil \leq x \leq \lfloor (c - b * \mathtt{min}(y))/a \rfloor$$
$$\lceil (c - a * \mathtt{max}(x))/b \rceil \leq y \leq \lfloor (c - b * \mathtt{max}(x))/b \rfloor$$

Filtrage sur les bornes :

$$x \ \mathtt{in} \ \lceil (c - b * \mathtt{max}(y))/a \rceil \, .. \, \lfloor (c - b * \mathtt{min}(y))/a \rfloor$$
$$y \ \mathtt{in} \ \lceil (c - a * \mathtt{max}(x))/b \rceil \, .. \, \lfloor (c - b * \mathtt{max}(x))/b \rfloor$$

Exercice 3

$ax + by = c \qquad$ avec $a, b, c > 0$

Equations :

$$x = (c - by)/a$$
$$y = (c - ax)/b$$

Filtrage sur les domaines (FAUX) :

$$x \;\; \mathtt{in} \;\; \lfloor (\{c\} - \mathtt{dom}(y) * b)/a \rfloor$$
$$y \;\; \mathtt{in} \;\; \lfloor (\{c\} - \mathtt{dom}(x) * a)/b \rfloor$$

Exercice 3

$ax + by = c \qquad$ avec $a, b, c > 0$

Equations :

$$x = (c - by)/a$$
$$y = (c - ax)/b$$

Filtrage sur les domaines (FAUX) :

$$x \ \mathtt{in} \ \lfloor(\{c\} - \mathtt{dom}(y) * b)/a\rfloor$$
$$y \ \mathtt{in} \ \lfloor(\{c\} - \mathtt{dom}(x) * a)/b\rfloor$$

Les deux propagateurs ci-dessus sont corrects mais pas complets pour $ax + by = c$. Contre-exemple : $2x + 2y = 5$. La non-solution $x = y = 1$ n'est pas éliminée.

Exercice 3

$ax + by = c \qquad$ avec $a, b, c > 0$

Equations :

$$x = (c - by)/a$$
$$y = (c - ax)/b$$

Filtrage sur les domaines (OK) :

$$x \ \texttt{in} \ \lfloor(\{c\} - \texttt{dom}(y) * b)/a\rfloor \cap \lceil(\{c\} - \texttt{dom}(y) * b)/a\rceil$$
$$y \ \texttt{in} \ \lfloor(\{c\} - \texttt{dom}(x) * a)/b\rfloor \cap \lceil(\{c\} - \texttt{dom}(x) * a)/b\rceil$$

Exercice 3

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i x_i = c \qquad \text{avec} \qquad a_i > 0 \quad \forall i$$

Exercice 3

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i x_i = c \qquad \text{avec} \qquad a_i > 0 \quad \forall i$$

Equations :

$$x_k = (c - \sum_{i \neq k} a_i x_i)/a_k$$

Exercice 3

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i x_i = c \qquad \text{avec} \qquad a_i > 0 \quad \forall i$$

Equations :

$$x_k = (c - \sum_{i \neq k} a_i x_i)/a_k$$

Bornes :

$$\lceil (c - \sum_{i \neq k} a_i \, \mathtt{max}(x_i))/a_k \rceil \leq x_k \leq \lfloor (c - \sum_{i \neq k} a_i \, \mathtt{min}(x_i))/a_k \rfloor$$

Exercice 3

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i x_i = c \qquad \text{avec} \qquad a_i > 0 \quad \forall i$$

Equations :

$$x_k = (c - \sum_{i \neq k} a_i x_i)/a_k$$

Bornes :

$$\lceil (c - \sum_{i \neq k} a_i \,\mathtt{max}(x_i))/a_k \rceil \leq x_k \leq \lfloor (c - \sum_{i \neq k} a_i \,\mathtt{min}(x_i))/a_k \rfloor$$

Filtrage sur les bornes :

$$x_k \;\; \mathtt{in} \;\; \lceil (c - \sum_{i \neq k} a_i \,\mathtt{max}(x_i))/a_k \rceil \,..\, \lfloor (c - \sum_{i \neq k} a_i \,\mathtt{min}(x_i))/a_k \rfloor$$

Exercice 3

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i x_i = c \qquad \text{avec} \qquad a_i > 0 \quad \forall i$$

Equations :

$$x_k = (c - \sum_{i \neq k} a_i x_i)/a_k$$

Bornes :

$$\lceil (c - \sum_{i \neq k} a_i \, \mathtt{max}(x_i))/a_k \rceil \leq x_k \leq \lfloor (c - \sum_{i \neq k} a_i \, \mathtt{min}(x_i))/a_k \rfloor$$

Filtrage sur les domaines :

$$x_k \;\; \mathtt{in} \;\; \lceil (\{c\} - \sum_{i \neq k} a_i \, \mathtt{dom}(x_i))/a_k \rceil \cap \lfloor (\{c\} - \sum_{i \neq k} a_i \, \mathtt{dom}(x_i))/a_k \rfloor$$

Exercice 4

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i x_i - \sum_{j=1}^{j=m} b_j y_j = c \qquad \text{avec} \qquad \forall i : \ a_i > 0, \forall j : \ b_j > 0$$

Exercice 4

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i x_i - \sum_{j=1}^{j=m} b_j y_j = c \qquad \text{avec} \qquad \forall i : \; a_i > 0, \forall j : \; b_j > 0$$

Equations :

$$x_k = (c - \sum_{i \neq k} a_i x_i + \sum_{j} b_j y_j)/a_k$$

$$y_k = (\sum_{i} a_i x_i - \sum_{j \neq k} b_j y_j - c)/b_k$$

Exercice 4

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i x_i - \sum_{j=1}^{j=m} b_j y_j = c \qquad \text{avec} \qquad \forall i : \; a_i > 0, \forall j : \; b_j > 0$$

Equations :

$$x_k = (c - \sum_{i \neq k} a_i x_i + \sum_j b_j y_j)/a_k$$

$$y_k = (\sum_i a_i x_i - \sum_{j \neq k} b_j y_j - c)/b_k$$

Bornes :

$$(c - \sum_{i \neq k} a_i \, \mathtt{max}(x_i) + \sum_j b_j \, \mathtt{min}(y_j))/a_k \leq x_k \leq (c - \sum_{i \neq k} a_i \, \mathtt{min}(x_i) + \sum_j b_j \, \mathtt{max}(y_j))/a_k$$

$$(\sum_i a_i \, \mathtt{min}(x_i) - \sum_{j \neq k} b_j \, \mathtt{max}(y_j) - c)/b_k \leq y_k \leq (\sum_i a_i \, \mathtt{max}(x_i) - \sum_{j \neq k} b_j \, \mathtt{min}(y_j) - c)/b_k$$