CHAPITRE 2

Les ordinaux

Résumé. • *Un bon ordre est un ordre total tel que toute partie non vide a un plus petit élément. L'ordre des entiers est un bon ordre, pas celui des réels.*
• *Deux bons ordres sont toujours comparables : l'un est isomorphe à un segment initial de l'autre.*
• *Les bons ordres sont munis d'opérations d'addition, de multiplication, et d'exponentiation.*
• *Un ensemble A est dit transitif si tout élément d'un élément de A est dans A.*
• *Un ordinal est défini comme ensemble transitif sur lequel l'appartenance est un bon ordre ; $\varnothing$ est un ordinal, et pour tout ordinal α, $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ est encore un ordinal, d'où pour chaque entier n, un ordinal $\tilde{n} = S^n(\varnothing)$ à n éléments.*
• *Pour α, β ordinaux, on déclare $\alpha < \beta$ vrai si α est élément de β. Alors $<$ est un bon ordre sur les ordinaux. Pour tout α, $S(\alpha)$ est successeur immédiat de α. Tout ensemble non vide d'ordinaux A a un plus petit élément, à savoir $\bigcap A$, et une borne supérieure, à savoir $\bigcup A$.*
• *Aucun ensemble ne contient tous les ordinaux.*
• *Les ordinaux non nuls se partagent en ordinaux successeurs, du type $S(\alpha)$, et ordinaux limites, qui vérifient $\lambda = \bigcup \lambda$. Le plus petit ordinal limite est ω, borne supérieure des ordinaux finis.*
• *Les opérations sur les bons ordres induisent une addition, une multiplication, et une exponentiation sur les ordinaux, qui, via l'identification de n et $\tilde{n}$, prolongent celles des entiers. Diverses relations, associativité, distributivité, continuité, etc. sont satisfaites, mais pas toutes celles de l'arithmétique des entiers: on a $\tilde{1} + \omega = \omega \cdot \tilde{2} = \tilde{2}^\omega = \omega$.*

▶ Au cœur de la théorie des ensembles se trouvent les ordinaux, qu'on peut voir comme un prolongement de la suite des entiers naturels au-delà du fini. Tant sur le plan technique que sur le plan conceptuel, les ordinaux jouent un rôle fondamental, et ils constituent l'outil de base pour l'exploration de la notion d'infini qu'est la théorie des ensembles. Ce chapitre étudie les propriétés des ordinaux et de leurs opérations. L'approche est élémentaire, en ce qu'elle ne cherche pas à se raccrocher au contexte axiomatique esquissé à la fin du chapitre 1 : on raisonne ici « librement » sur des objets mathématiques, et ce n'est qu'au chapitre 3 qu'on reviendra sur ces raisonnements pour se demander s'ils entrent ou non dans le cadre de la théorie de Zermelo.

La première section est consacrée à la notion de bon ordre, forme particulière d'ordre total adaptée aux démonstrations par induction. Le résultat principal est que deux bons ordres sont toujours comparables, au sens où l'un est isomorphe à un début de l'autre. Il en résulte que les bons ordres eux-mêmes s'organisent en une suite totalement ordonnée, et même bien ordonnée.

La deuxième section introduit les ordinaux. L'idée est de choisir un représentant distingué dans chaque classe d'isomorphisme de bons ordres, et, pour cela, on suit la construction de von Neumann, qui est extrêmement astucieuse. Les ordinaux sont définis *ex nihilo* comme ensembles vérifiant certaines propriétés, et on vérifie pas à pas que les objets ainsi définis ont toutes les qualités escomptées, en particulier qu'il existe un unique ordinal dans chaque classe d'isomorphisme de bons ordres. Il existe pour chaque entier naturel un ordinal fini qui en est une sorte de copie, et les ordinaux s'organisent en une suite dont les ordinaux finis forment un début.

La troisième section étudie l'arithmétique ordinale. De même que la suite des ordinaux est un prolongement de la suite des ordinaux finis, qui est une copie des entiers naturels, les ordinaux peuvent être munis d'opérations arithmétiques qui étendent celles des entiers naturels. On construit ici ces opérations de somme, produit, et exponentiation à partir de la combinatoire des bons ordres. Leurs propriétés algébriques ressemblent à celles des opérations sur les entiers, mais elles en diffèrent dans le cas des ordinaux infinis ; en particulier, ni l'addition, ni la multiplication ordinale ne sont commutatives.

La dernière section présente deux applications des ordinaux, à savoir une démonstration du théorème de Cantor–Bendixson sur la structure des fermés de $\mathbb{R}$, et le théorème de Goodstein, un résultat paradoxal d'arithmétique très aisé à établir dès qu'on dispose des ordinaux. ◀

2.1. Bons ordres

▶ On étudie des ordres totaux particuliers appelés bons ordres. Ceux-ci généralisent l'ordre des entiers naturels tout en préservant le principe des démonstrations par récurrence. Le résultat principal est le théorème montrant que deux bons ordres sont toujours comparables au sens où l'un est isomorphe à un segment initial de l'autre, un résultat qui est complètement faux pour les ordres totaux généraux. On montre aussi que les bons ordres peuvent être composés à l'aide d'opérations naturelles, somme, produit, et, avec quelques difficultés, exponentiation. ◀

2.1.1. Notion de bon ordre.

▶ La notion de bon ordre s'introduit naturellement lorsqu'on cherche à étendre le principe de démonstration par récurrence des entiers naturels. ◀

Convention 2.1.1 (ordres). Dans toute la suite, on appelle *ordre* une relation réflexive, antisymétrique et transitive, et on utilise les symboles $\leqslant$, $\preccurlyeq$, $\sqsubseteq$, $\subseteq$, ... pour représenter des ordres. Si $\leqslant$ est un ordre, on note $<$ l'*ordre strict* associé, c'est-à-dire la relation « $x \leqslant y$ et $x \neq y$ », qui est antiréflexive ($x < x$ est toujours faux) et transitive. Inversement, si $<$ est un ordre strict, on utilise $\leqslant$ pour l'ordre (large) associé, c'est-à-dire la relation « $x < y$ ou $x = y$ ». De même pour $\preccurlyeq$ et $\prec$, $\sqsubseteq$ et $\sqsubset$, $\subseteq$ et $\subset$, *etc.*

Un ordre est dit *total* (ou linéaire) si deux éléments quelconques sont comparables, c'est-à-dire si, pour tous a, b dans le domaine concerné, est vérifiée au moins une des relations $a \leqslant b$ ou $b \geqslant a$, et, donc, exactement une des trois relations $a < b$, $a = b$, $a > b$.

ⵜ *La propriété essentielle de la suite des entiers naturels est la possiblité d'y effectuer des démonstrations par récurrence. Cette possibilité est elle-même une conséquence directe d'une propriété de l'ordre de $\mathbb{N}$, à savoir que toute partie non vide a un plus petit élément. En effet, ce qui légitime la démonstration par récurrence d'une propriété $\mathcal{P}(n)$, c'est l'assurance que, si l'ensemble des n ne vérifiant pas $\mathcal{P}(n)$ est non vide, alors il possède un plus petit élément, et c'est ce que l'hypothèse de récurrence interdit. La notion de bon ordre apparaît lorsqu'on considère cette propriété dans un contexte général.* ⵜ

Définition 2.1.2 (bon ordre). Un ordre $\leqslant$ sur un ensemble A est dit *bon* si toute partie non vide de A possède un plus petit élément (pour $\leqslant$). On dit alors que $(A, \leqslant)$ est un ensemble *bien ordonné*.

Si $<$ est une relation d'ordre strict, on dit que $<$ est un *bon ordre strict* si la relation large associée $\leqslant$ est un bon ordre. En pratique, on emploie souvent « bon ordre » aussi bien pour l'ordre strict que pour l'ordre large, la notation $<$ ou $\leqslant$ indiquant sans ambiguïté à quelle forme on se réfère.

Exemple 2.1.3. Tout bon ordre est un ordre total, puisque, si $\leqslant$ est un bon ordre sur A et que a et b sont deux éléments de A, la partie $\{a, b\}$ a un plus petit élément qui est a ou b, donc on doit avoir $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$. Par contre, tout ordre total n'est pas un bon ordre : l'ordre usuel sur $\mathbb{Z}$ n'est pas un bon ordre, puisque $\mathbb{Z}$ n'a pas de plus petit élément; de même, l'ordre usuel sur $\mathbb{Q}$ n'est pas un bon ordre puisque la partie $\mathbb{Q}_{>0}$ (rationnels strictement positifs) n'a pas de plus petit élément. D'une façon générale, un ordre dense, c'est-à-dire tel qu'entre deux éléments il y en ait toujours une troisième, n'est jamais bon.

Il existe des bons ordres :

Proposition 2.1.4 (1). (*i*) *L'ordre usuel sur $\mathbb{N}$ est un bon ordre.*
(*ii*) *Tout ordre total sur un ensemble fini est un bon ordre.*

Démonstration. (*i*) Soit X une partie non vide de $\mathbb{N}$, et soit p un élément quelconque de X. Ou bien p est plus petit élément de X, ou bien il existe p_1 dans X vérifiant $p_1 < p$. A nouveau, ou bien p_1 est plus petit élément de X, ou bien il existe p_2 dans X vérifiant $p_2 < p_1$, et ainsi de suite. Par construction, on a $p_1 \leqslant p - 1$, $p_2 \leqslant p - 2$, et, de proche en proche, $p_i \leqslant p - i$. La descente s'arrête donc après au plus p étapes, et il existe donc i au plus égal à p tel que p_i est plus petit élément de X.

(*ii*) Il suffit de montrer le résultat pour un intervalle $\{1, \ldots, p\}$ de $\mathbb{N}$. Soit X une partie non vide de $\{1, \ldots, p\}$. Alors X est une partie non vide de $\mathbb{N}$. D'après (*i*), X a dans $\mathbb{N}$ un plus petit élément a, lequel est dans X donc dans $\{1, \ldots, p\}$, et, par conséquent, a est dans $\{1, \ldots, p\}$ plus petit élément de X. □

☧ *On a noté que l'ordre usuel sur les rationnels ou les réels n'est pas un bon ordre. Ceci ne prouve pas que d'autres ordres sur ces mêmes ensembles ne puissent pas être des bons ordres : par exemple, puisqu'il existe une bijection f de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$, on peut définir un ordre exotique sur $\mathbb{Q}$ en déclarant que $x \prec y$ est vrai pour $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$; par construction, $(\mathbb{N}, <)$ et $(\mathbb{Q}, \prec)$ sont isomorphes, et $\prec$ est donc un bon ordre sur $\mathbb{Q}$.* ☧

Question 2.1.5. *Existe-t-il un bon ordre sur tout ensemble?*

On y reviendra au chapitre 4. Pour le moment, on note quelques propriétés élémentaires des bons ordres, à commencer par le principe d'induction[1] qui fait l'intérêt de la notion.

Proposition 2.1.6 (induction). *Supposons que $<$ est un bon ordre sur A, et que $\mathcal{P}(x)$ est une propriété à laquelle le principe de séparation est valide et telle que $\mathcal{P}(x)$ est vraie dès que $\mathcal{P}(y)$ est vraie pour tous y vérifiant $y < x$. Alors $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout x dans A.*

Démonstration. Soit $B := \{x \in A \,;\, \mathcal{P}(x) \text{ est fausse}\}$ [2]. Si B est non vide, il doit avoir un plus petit élément b. La définition de b signifie que $\mathcal{P}(y)$ est vraie pour tous les y vérifiant $y < b$, et l'hypothèse d'induction entraîne alors $\mathcal{P}(b)$, contrairement à ce qu'on a supposé. L'hypothèse que B est non vide est donc intenable, donc B est vide, ce qui est dire que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout x. □

Lemme 2.1.7. *Si $(A, <)$ est un ensemble bien ordonné, et si B est un sous-ensemble de A, alors la restriction de $<$ à B est un bon ordre.*

Démonstration. (*cf.* démonstration de la proposition 2.1.4(*ii*)) Si X est une partie non vide de B, alors X a dans A un plus petit élément a, qui, étant dans X, est dans B, donc est plus petit élément de X dans $(B, <)$. □

Lemme 2.1.8. *Si $<$ est un bon ordre sur A, alors il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante dans $(A, <)$, c'est-à-dire pas de suite $(a_1, a_2, \dots)$ avec $a_1 > a_2 > \dots$.*

Démonstration. Si on a $a_1 > a_2 > \dots$, alors $\{a_1, a_2, \dots\}$ de A n'a pas de plus petit élément. □

Question 2.1.9. *La condition nécessaire du lemme 2.1.8 est-elle suffisante, c'est-à-dire la non-existence d'une suite infinie décroissante pour un ordre total entraîne-t-elle que cet ordre est un bon ordre?*

Là encore, on y reviendra au chapitre 4.

[1] ou de récurrence, les deux mots étant employés ici comme synonymes

[2] c'est ici qu'il faut être sûr qu'un tel ensemble existe, c'est-à-dire qu'on peut séparer dans A les éléments qui satisfont $\mathcal{P}$: se rappeler le paradoxe de Berry

2.1.2. Rigidité des bons ordres.

▶ A la différence des ordres totaux généraux qui ont de multiples degrés de liberté, les bons ordres sont des structures très contraintes, dont le seul degré de liberté est la longueur. ◀

⚒ *La notion de morphisme pertinente pour les ensembles ordonnés est celle d'application strictement croissante: si* $(A, <)$ *et* $(B, \prec)$ *sont deux ordres (stricts), une application* f *de* A *dans* B *est dite strictement croissante si* $x < y$ *entraîne* $f(x) \prec f(y)$*. Si, de plus,* f *est bijective, on dit que c'est un isomorphisme de* $(A, <)$ *sur* $(B, \prec)$*, ce qui correspond bien à l'idée de deux avatars du même ordre.* ⚒

On commence par rappeler que, dans le contexte des ordres totaux, toute implication du type « $x < y$ entraîne $f(x) \prec f(y)$ » est une équivalence.

Lemme 2.1.10. *Soient* $(A, <)$ *et* $(B, \prec)$ *deux ensembles ordonnés. Supposons que* $<$ *est total et que* f *est une application strictement croissante de* A *dans* B*. Alors* f *est injective, et* $x < y$ *équivaut à* $f(x) \prec f(y)$*.*

Démonstration. Supposons $x, y \in A$ avec $x \neq y$: puisque $<$ est total, on a soit $x < y$, soit $y < x$. Dans le premier cas, on déduit $f(x) \prec f(y)$, dans le second, $f(y) \prec f(x)$, et, dans chaque cas, $f(x) \neq f(y)$. Donc f est injective.

Soient maintenant x, y quelconques dans A, et supposons $f(x) \prec f(y)$. Si on n'avait pas $x < y$, on aurait soit $x = y$, qui entraîne $f(x) = f(y)$, soit $y < x$, qui entraîne $f(y) \prec f(x)$, et les deux contredisent $f(x) \prec f(y)$. La seule possibilité est donc $x < y$. □

Le point important pour la rigidité des bons ordres est le fait simple suivant :

Lemme 2.1.11. *Soient* $(A, <)$ *un ensemble bien ordonné, et* f *une application strictement croissante de* $(A, <)$ *dans lui-même. Alors, pour tout* a *dans* A*, on a* $a \leqslant f(a)$*.*

Démonstration. Posons $\mathcal{A} = \{x \in A \; ; \; f(x) < x\}$. Si $\mathcal{A}$ est non vide, $\mathcal{A}$ a un plus petit élément, soit a. Puisque a est dans $\mathcal{A}$, on a $f(a) < a$. Comme f est strictement croissante, on déduit $f(f(a)) < f(a)$. D'un autre côté, $f(a)$ n'est pas dans $\mathcal{A}$, puisqu'il est plus petit que le plus petit élément de $\mathcal{A}$. Par définition de $\mathcal{A}$, cela signifie qu'on a $f(f(a)) \not< f(a)$, contredisant ce qui précède. C'est donc que $\mathcal{A}$ est vide. □

On en déduit facilement le résultat de rigidité :

Proposition 2.1.12 (rigidité). *Si* $(A, <)$ *et* $(B, \prec)$ *sont deux ensembles bien ordonnés, il existe au plus un isomorphisme de* $(A, <)$ *sur* $(B, \prec)$*. En particulier, l'identité est le seul automorphisme d'un ensemble bien ordonné.*

Démonstration. Supposons que f et g sont deux isomorphismes de $(A, <)$ sur $(B, \prec)$. Alors $g^{-1} \circ f$ est une application strictement croissante de $(A, <)$ dans lui-même. Le lemme 2.1.11 implique $a \leqslant g^{-1} \circ f(a)$ pour tout a dans A, donc, puisque g est croissante, $g(a) \preccurlyeq f(a)$. Un argument symétrique donne de même $f(a) \preccurlyeq g(a)$, donc finalement $f(a) = g(a)$ pour tout a. □

2.1.3. Comparaison des bons ordres.

► On en vient au théorème de comparaison affirmant que, de deux bons ordres, l'un est toujours début de l'autre. La démonstration repose sur l'analyse des segments initiaux d'un bon ordre. Noter que le résultat est spécifique aux bons ordres : par exemple, aucun des deux ordres totaux $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Q}_{>0}, <)$ n'est isomorphe à un début de l'autre. ◄

Définition 2.1.13 (segment initial). Supposons que $<$ est un ordre sur A et que a est élément de A. On appelle *segment initial* de $(A, <)$ déterminé par a, et on note $I_<(a)$ — ou, simplement, $I(a)$ — l'ensemble $\{x \in A\ ;\ x < a\}$ muni de l'ordre induit par $<$.

Une relation d'ordre étant transitive, un segment initial d'un ensemble ordonné est toujours clos par minorant, c'est-à-dire qu'un minorant d'un élément de $I(a)$ est encore dans $I(a)$. L'exemple des coupures dans $\mathbb{Q}$ montre qu'il n'y a pas de réciproque en général. Par contre, dans le cas des bons ordres, on a la réciproque suivante :

Lemme 2.1.14. *Supposons que $<$ est un bon ordre sur A et que X est un sous-ensemble de A clos par minorant. Alors X est ou bien A entier, ou bien un segment initial de $(A, <)$.*

Démonstration. Soit $Y = A \setminus X$. Ou bien Y est vide, auquel cas on a $X = A$, ou bien Y possède un plus petit élément, soit a. Par hypothèse, $x < a$ entraîne $x \notin Y$, donc $x \in X$, et par conséquent $I(a) \subseteq X$. Inversement, soit $x \in X$. Si on avait $a \leqslant x$, alors, comme X est supposé clos par minorant, on déduirait $a \in X$, contrairement à l'hypothèse $a \in Y$. On doit donc avoir $x < a$, donc $X \subseteq I(a)$, et, finalement, $X = I(a)$. □

Lemme 2.1.15. *Si $<$ est un bon ordre sur A, alors $(A, <)$ n'est isomorphe à aucun de ses segments initiaux, et deux segments initiaux distincts de $(A, <)$ ne sont jamais isomorphes.*

Démonstration. Soit a un élément de A. Soit f une application de A dans $I(a)$: alors on a $f(a) < a$ par hypothèse, ce qui, par le lemme 2.1.11, interdit que f soit strictement croissante, et, *a fortiori*, qu'elle soit un isomorphisme.

Soient maintenant a, a' deux éléments distincts de A. On a soit $a < a'$, soit $a' < a$. Supposons par exemple $a < a'$. Alors $I(a')$ est bien ordonné par (la restriction de) $<$, et, comme $<$ est transitive, $I(a)$ est un segment initial de $I(a')$. Le résultat ci-dessus montre alors que $I(a')$ n'est pas isomorphe à son segment initial $I(a)$. □

Proposition 2.1.16 (comparaison). *Soient $(A, <)$, $(B, \prec)$ deux ensembles bien ordonnés. Alors l'un exactement des trois cas suivants se présente :*
(i) $(A, <)$ et $(B, \prec)$ sont isomorphes;
(ii) $(A, <)$ est isomorphe à un segment initial de $(B, \prec)$;
(iii) $(B, \prec)$ est isomorphe à un segment initial de $(A, <)$.

Démonstration. On définit une correspondance F de A dans B par

$$F(a) = b \Leftrightarrow I_<(a) \text{ est isomorphe à } I_\prec(b)$$

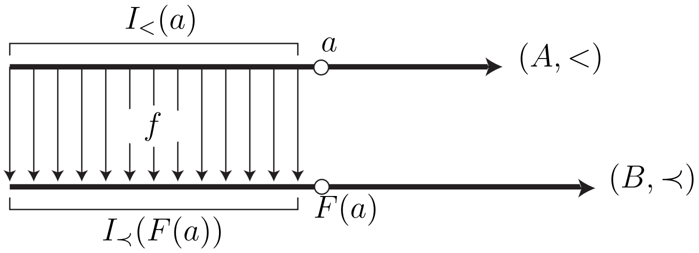

FIGURE 2.1. Comparaison de deux bons ordres : on établit une correspondance entre les segments initiaux (c'est-à-dire les débuts) du premier et ceux du second

(figure 2.1). Le lemme 2.1.15 appliqué à $(B,\prec)$ montre que F est fonctionnelle, c'est-à-dire que, pour chaque a dans A, il existe au plus une valeur b dans B satisfaisant $b = F(a)$. De même, le lemme 2.1.15 appliqué à $(A,<)$ montre que F est injective, c'est-à-dire que, pour b dans B, il existe au plus une valeur a dans A satisfaisant $b = F(a)$. (Par contre, rien ne prouve que F soit partout définie sur A, ni qu'elle soit surjective.)

Supposons que a appartient au domaine de F, et qu'on a $a' < a$. On va montrer que a' appartient aussi au domaine de F, et qu'on a $F(a') \prec F(a)$. Par définition, il existe un isomorphisme $f : I_<(a) \to I_\prec(F(a))$. Par transitivité de l'ordre $<$, le segment initial déterminé par a' dans $(I_<(a),<)$ est le même que le segment initial $I_<(a')$ qu'il détermine dans $(A,<)$. Soit f' la restriction de f à ce segment initial $I_<(a')$. Par construction, f' est une application strictement croissante de $I_<(a')$ dans $I_\prec(F(a))$. Tout élément x de $I_<(a')$ vérifie $x < a'$, donc $f'(x) = f(x) \prec f(a')$, ce qui montre que l'image de f' est incluse dans $I_\prec(f(a'))$. Inversement, soit y un élément quelconque de $I_\prec(f(a'))$. Par construction, $f(a')$ est dans $I_\prec(F(a))$, donc y est dans $I_\prec(F(a))$, qui est l'image de f. Il existe donc x dans $I_<(a)$ vérifiant $f(x) = y$. Comme f est un isomorphisme, $y \prec f(a')$ entraîne $x < a'$. C'est dire que y est dans l'image de f', et, par conséquent, f' est un isomorphisme de $I_<(a')$ sur $I_\prec(f(a'))$. Par définition, cela signifie que a' est dans le domaine de F, et qu'on a $F(a') = f(a')$, donc, en particulier, $F(a') \prec F(a)$.

A ce point, on a donc montré que d'une part F est strictement croissante, donc est un isomorphisme de son domaine sur son image, et d'autre part que le domaine de F est clos par minorant dans $(A,<)$.

Un argument symétrique montre que l'image de F est close par minorant dans $(B,\prec)$, c'est-à-dire que, si b appartient à l'image de F, et qu'on a $b' \prec b$, alors b' appartient aussi à l'image de F — et qu'on a $F^{-1}(b') < F^{-1}(b)$, mais ceci est déjà connu.

On applique alors le lemme 2.1.14. Quatre cas sont *a priori* possibles:

- Cas 1 : $\mathrm{Dom}(F) = A$ et $\mathrm{Im}(F) = B$. C'est dire que $(A,<)$ est isomorphe à $(B,\prec)$.

- Cas 2 : $\mathrm{Dom}(F) = A$ et $\mathrm{Im}(F)$ segment initial de $(B,\prec)$. C'est dire que $(A,<)$ est isomorphe à un segment initial de $(B,\prec)$.

- Cas 3 : $\mathrm{Dom}(F)$ segment initial de $(A,<)$ et $\mathrm{Im}(F) = B$. C'est dire que $(B,\prec)$ est isomorphe à un segment initial de $(A,<)$.

- Cas 4 : $\mathrm{Dom}(F)$ segment initial de $(A,<)$ et $\mathrm{Im}(F)$ segment initial de $(B,\prec)$. Il existe alors a et b tels qu'on ait $\mathrm{Dom}(F) = I_<(a)$ et $\mathrm{Im}(F) = I_\prec(b)$. Mais alors, par construction, F est alors un isomorphisme de $I_<(a)$ sur $I_\prec(b)$: cela signifie qu'on doit avoir $b = F(a)$, donc $a \in \mathrm{Dom}(F)$ et $b \in \mathrm{Im}(F)$, contredisant les hypothèses. Ce cas est donc impossible. □

※ *La plus grande partie de la démonstration précédente reste valable quand $(A,<)$ et $(B,\prec)$ sont des ensembles (totalement) ordonnés quelconques, mais, faute de* *pouvoir appliquer le lemme 2.1.14, on ne peut rien conclure en général. Par exemple, si on part de* $(\mathbb{Z}, <)$ *et* $(\mathbb{Q}^+, <)$*, le domaine et l'image de l'application* F *obtenue sont purement et simplement vides: aucun segment initial de* $(\mathbb{Z}, <)$ *n'est isomorphe à un segment initial de* $(\mathbb{Q}^+, <)$*.* ✗

2.1.4. Addition des bons ordres.

▶ Partant de deux ensembles (bien) ordonnés $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, on peut construire de nouveaux ensembles (bien) ordonnés à l'aide d'opérations naturelles, appelées somme, produit, et exponentiation, directement inspirées des opérations combinatoires usuelles dans le cas fini.

La première opération est l'*addition* qui consiste, à partir de deux ensemble ordonnés, à en construire un nouveau en plaçant le second ensemble ordonné (ou une copie de celui-ci) après le premier, c'est-à-dire en gardant dans chaque composante son ordre d'origine et en proclamant que tout élément de la première est plus petit que tout élément de la seconde (figure 2.2). Pour éviter les problèmes, on doit supposer les domaines disjoints, ce qu'on fait facilement à l'aide d'une notion convenable d'union disjointe. ◀

Définition 2.1.17 (union disjointe, somme de deux ordres). (*i*) Soient A, B deux ensembles. On définit l'*union disjointe* $A \amalg B$ de A et B par

$$A \amalg B = (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\}).$$

(*ii*) Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux ensembles ordonnés, soit $\mathcal{A} = (A, <)$ et $\mathcal{B} = (B, \prec)$. On appelle *somme* de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, noté $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, le couple $(A \amalg B, \sqsubset)$, où $\sqsubset$ est définie par

$$(a, i) \sqsubset (b, j) \Leftrightarrow \begin{cases} (i = j = 1 \text{ et } a < b), \text{ ou} \\ (i = j = 2 \text{ et } a \prec b), \text{ ou} \\ (i = 1 \text{ et } j = 2). \end{cases}$$

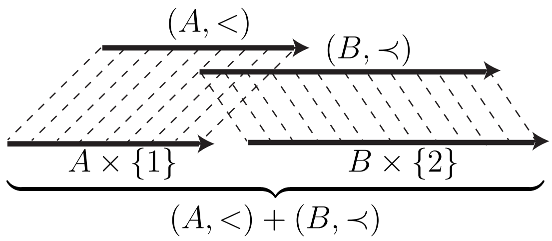

Figure 2.2. Somme de deux ordres: une copie de $(A, <)$, suivie d'une copie de $(B, \prec)$; noter que, que A et B soient disjoints ou non, les copies $A \times \{1\}$ et $B \times \{2\}$ le sont : par exemple, $A \amalg A$ consiste en deux copies distinctes de A.

Exemple 2.1.18. Soient p, q deux entiers. Alors la somme des intervalles $\{1, \ldots, p\}$ et $\{1, \ldots, q\}$, équipés de l'ordre usuel, est isomorphe à l'intervalle $\{1, \ldots, p + q\}$ (équipé de l'ordre usuel).

Proposition 2.1.19 (somme). *La somme de deux ensembles ordonnés (resp. totalement ordonnés, resp. bien ordonnés) est un ensemble ordonné (resp. totalement ordonné, resp. bien ordonné).*

Démonstration. Soient $(A, <)$ et $(B, \prec)$ des ensembles ordonnés. Soit (x, i) un élément quelconque de $A \amalg B$. Pour $i = 1$, on a $(x, i) \not\sqsubset (x, i)$, car ceci équivaudrait à $x < x$, qui est faux puisque $<$ est un ordre. De même, pour $i = 2$, on a $(x, i) \not\sqsubset (x, i)$, car ceci équivaudrait à $x \prec x$, qui est faux puisque $\prec$ est un ordre.

Supposons $(x, i) \sqsubset (y, j) \sqsubset (z, k)$. Par définition, ceci n'est possible que pour $i \leqslant j \leqslant k$. On déduit alors $(x, i) \sqsubset (z, k)$ de ce que $<$ est transitive dans le cas $i = j = k = 1$, de la définition de $\sqsubset$ dans le cas $i < k$, et de la transitivité de $\prec$ dans le cas $i = j = k = 2$. Donc la relation $\sqsubset$ est un ordre strict.

Si à la fois $<$ et $\prec$ sont des ordres totaux, il en est de même de $\sqsubset$: en effet, étant donnés (x, i) et (y, j) quelconques, ou bien on a $i = j = 1$ et alors x et y sont comparables pour $<$, ou bien on a $i = j = 2$, et x et y sont comparables pour $\prec$, ou bien on a $i \neq j$, auquel cas on a soit $i = 1$ et $j = 2$, soit $i = 2$ et $j = 1$.

Supposons enfin que $<$ et $\prec$ sont des bons ordres. Soit X une partie non vide de $A \amalg B$. Deux cas sont possibles. Supposons d'abord $X \cap (A \times \{1\})$ non vide. Comme $<$ est un bon ordre, il existe a dans A tel que $(a, 1)$ est plus petit élément de $X \cap (A \times \{1\})$; comme on a $(a, 1) \sqsubset (y, 2)$ pour tout y dans B, l'élement $(a, 1)$ minore tout élément de $X \cap (B \times \{2\})$, et il est donc plus petit élément de X entier. Supposons ensuite $X \cap (A \times \{1\})$ vide. C'est dire que X est inclus dans $B \times \{2\}$. Comme $\prec$ est un bon ordre, il existe b dans B tel que $(b, 2)$ est plus petit élément de $X \cap (B \times \{2\}$, qui est X. Dans tous les cas, X possède un plus petit élément, et $\sqsubset$ est un bon ordre. □

Proposition 2.1.20 (associativité). *A isomorphisme près, l'addition des ordres est associative: quels que soient les ensembles ordonnés $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, il existe un isomorphisme de $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C}$ sur $\mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C})$.*

Démonstration. Envoyer $((a, 1), 1)$ sur $(a, 1)$, $((b, 2), 1)$ sur $((b, 1), 2)$, et $(c, 2)$ sur $((c, 2), 2)$. □

2.1.5. Multiplication des bons ordres.

▶ On passe à la *multiplication*, qui consiste à ordonner lexicographiquement le produit cartésien. L'intuition est donnée dans la figure 2.3: le produit $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ s'obtient en mettant bout à bout des copies (disjointes) de $\mathcal{A}$ indexées par $\mathcal{B}$. ». ◀

Définition 2.1.21 (produit de deux ordres). Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux ensembles ordonnés, soit $\mathcal{A} = (A, <)$ et $\mathcal{B} = (B, \prec)$. On appelle *produit* de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, noté $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, le couple $(A \times B, \sqsubset)$ le couple $(A \times B, \sqsubset)$, où $\sqsubset$ est définie par

$$(a, b) \sqsubset (a', b') \Leftrightarrow \begin{cases} b \prec b', \text{ ou} \\ (b = b' \text{ et } a < a'). \end{cases}$$

Exemple 2.1.22. Soient p, q deux entiers. Alors le produit des intervalles $\{1, \ldots, p\}$ et $\{1, \ldots, q\}$, équipés de l'ordre usuel, est isomorphe à l'intervalle $\{1, \ldots, pq\}$ (équipé de l'ordre usuel).

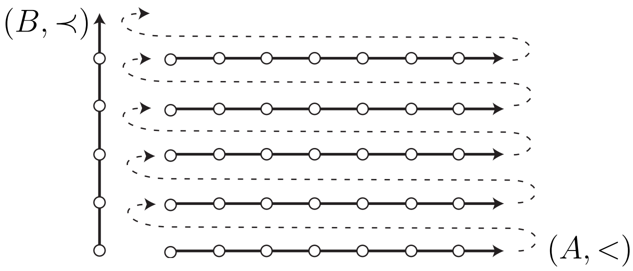

FIGURE 2.3. Produit de deux ordres: $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, c'est « $\mathcal{A}$ répété $\mathcal{B}$ fois »

PROPOSITION 2.1.23 (produit). *Le produit de deux ensembles ordonnés (resp. totalement ordonnés, resp. bien ordonnés) est un ensemble ordonné (resp. totalement ordonné, resp. bien ordonné).*

DÉMONSTRATION. Soient $(A, <)$ et $(B, \prec)$ des ensembles ordonnés. Soit (x, y) un élément de $A \times B$. Alors on n'a ni $y \prec y$, ni $y = y$ et $x < x$, donc $(x, y) \sqsubset (x, y)$ est faux, et la relation $\sqsubset$ est antiréflexive.

Supposons $(x, y) \sqsubset (x', y') \sqsubset (x'', y'')$. Quatre cas sont possibles. Si on a $y \prec y' \prec y''$, la transitivité de $\prec$ entraîne $y \prec y''$, donc $(x, y) \sqsubset (x'', y'')$. Si on a $y = y' \prec y''$ ou $y \prec y' = y''$, on obtient $(x, y) \sqsubset (x'', y'')$ directement. Enfin, si on a $y = y' = y''$ et $x < x' < x''$, la transitivité de $<$ entraîne $x \prec x''$, et on a donc $(x, y) \sqsubset (x'', y'')$. Donc la relation $\sqsubset$ est transitive, et c'est un ordre strict sur $A \times B$.

Supposons en outre que $<$ et $\prec$ sont des ordres totaux, et soient (x, y), (x', y') deux éléments distincts de $A \times B$. Si y et y' sont distincts, on a soit $y \prec y'$, soit $y' \prec y$, et, par conséquent, soit $(x, y) \sqsubset (x', y')$, soit $(x', y') \sqsubset (x, y)$. Si y et y' sont égaux, nécessairement x et x' sont distincts, et on a soit $x < x'$, soit $x' < x$, qui impliquent respectivement $(x, y) \sqsubset (x', y')$ ou $(x', y') \sqsubset (x, y)$. Donc la relation $\sqsubset$ est un ordre total sur $A \times B$.

Supposons maintenant que $<$ et $\prec$ sont des bons ordres, et soit X une partie non vide de $A \times B$ (figure 2.4). La seconde projection $\mathrm{pr}_2(X)$ de X, c'est-à-dire

$$\{y \in B \;;\; (\exists x \in A)((x, y) \in X)\},$$

est une partie non vide de B, donc elle admet un plus petit élément, disons b. Alors la fibre en b, c'est-à-dire l'ensemble $\{x \in A \;;\; (x, b) \in X\}$, est une partie non vide de A, donc elle admet un plus petit élément, disons a. Par construction, le couple (a, b) est dans X, et c'en est le plus petit élément. En effet, soit (x, y) un élément quelconque de X. Par construction, on a $y \succcurlyeq b$, donc ou bien $y \succ b$, qui entraîne $(x, y) \sqsupset (a, b)$, ou bien $y = b$. Dans ce dernier cas, on a par construction $x \geqslant a$, et donc $(x, y) \sqsupseteq (a, b)$. □

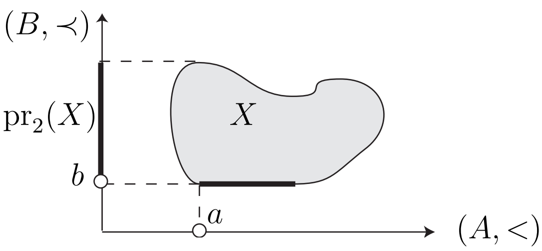

FIGURE 2.4. Le produit de deux bons ordres est un bon ordre

PROPOSITION 2.1.24 (associativité, distributivité). *A isomorphisme près, la multiplication des ordres est associative et distributive à gauche par rapport à l'addition: quels que soient les ensembles ordonnés $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, il existe un isomorphisme de $(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C}$ sur $\mathcal{A} \times (\mathcal{B} \times \mathcal{C})$, et un isomorphisme de $\mathcal{A} \times (\mathcal{B} + \mathcal{C})$ sur $(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) + (\mathcal{A} \times \mathcal{C})$.*

DÉMONSTRATION. Envoyer $((a, b), c)$ sur $(a, (b, c))$ dans le premier cas, et $(a, (b, 1))$ sur $((a, b), 1)$ et $(a, (c, 2))$ sur $((a, c), 2)$ dans le second. On obtient ainsi deux bijections, et il est facile de vérifier que celles-ci sont strictement croissantes en considérant les différents cas possibles. Ainsi, dans le cas de l'associativité, on a, en notant $<$ tous les ordres, $((a, b), c) < ((a', b'), c')$ si et seulement si soit $c < c'$, soit $c = c'$ et $b < b'$, soit $c = c'$ et $b = b'$ et $a < a'$ est vrai, et c'est aussi le cas de $(a, (b, c)) < (a', (b', c'))$. Dans le cas de la distributivité, $(a, (y, i)) < (a', (y', i'))$ est vrai si on a ou bien $i = i'$ et $y < y'$, ou bien $i = 1$ et $i' = 2$, ou bien $i = i'$ et $y = y'$ et $a < a'$, et c'est aussi le cas pour $((a, y), i) < ((a', y'), i')$, *cf.* figure 2.5. $\square$

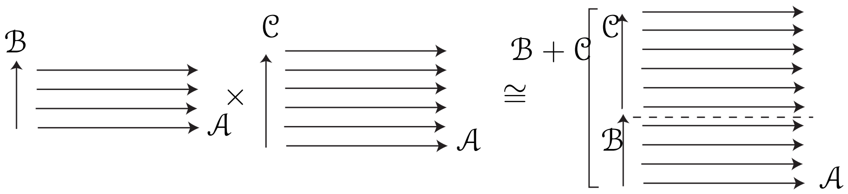

FIGURE 2.5. Distributivité à gauche de la multiplication par rapport à l'addition

2.1.6. Exponentiation des bons ordres.

▶ Pour terminer l'analogie avec les opérations arithmétiques, on considère l'exponentiation. On cherche donc à ordonner l'ensemble A^B des suites d'éléments de A indexées par B. On va voir que, pour ne pas sortir du cadre des bons ordres, on est amené à restreindre l'ensemble des suites considérées. ◀

⚒ *Partant de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, avec $\mathcal{A} = (A, <)$ et $\mathcal{B} = (B, \prec)$, on peut déclarer que la suite s est plus petite que la suite t si, pour le $\prec$-plus petit indice i pour lequel on a $s(i) \neq t(i)$, on a $s(i) < t(i)$. Pour assurer l'existence d'un tel plus petit indice i, on suppose que $\prec$ est un bon ordre sur B. Le problème est que, même si $<$ est un bon ordre sur A, et même si A est fini, il est faux que A^B soit bien ordonné dès que B est infini. Par exemple, si $\mathcal{A}$ est $\{0, 1\}$ bien ordonné par $0 < 1$ et $\mathcal{B}$ est $\mathbb{N}$ avec l'ordre usuel, on a*

$$(1, 0, 0, 0, \dots) > (0, 1, 0, 0, \dots) > (0, 0, 1, 0, \dots) > \dots$$

Le problème est similaire si on prend en compte le plus grand indice où les suites diffèrent. Pour l'éviter, il faudrait que l'ordre sur l'ensemble-exposant soit à la fois un bon ordre et l'opposé d'un bon ordre, c'est-à-dire que toute partie non vide ait à la fois un plus petit et un plus grand élément : ceci caractérise les ensembles finis, et, dans ce cas, on n'obtient rien de plus qu'une itération finie du produit d'ordres.

Le solution trouvée pour échapper à la difficulté précédente consiste à ordonner non pas toutes les suites d'éléments de B indexées par A, mais seulement certaines *d'entre elles, dites* à support fini. *On verra, en particulier à la fin de ce chapitre avec le théorème de Goodstein, que cette restriction n'enlève pas tout intérêt à l'opération obtenue.* ⚔

Définition 2.1.25 (exponentiation). Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux ensembles ordonnés, soit $\mathcal{A} = (A, <)$ et $\mathcal{B} = (B, \prec)$. On suppose que $\mathcal{A}$ possède un plus petit élément 0.

(i) Pour toute suite s d'éléments de A, on appelle *support* de s l'ensemble $\{i\ ;\ s(i) \neq 0\}$, et on note $A^{(B)}$ le sous-ensemble de A^B formé par les suites à support fini.

(*ii*) On appelle *exponentiation* de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{B}$, et on note $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}$, le couple $(A^{(B)}, \sqsubset)$, où $f \sqsubset g$ est vraie s'il existe i vérifiant $f(i) < g(i)$ et $f(j) = g(j)$ pour $j \succ i$.

La relation $\sqsubset$ ainsi définie est un ordre anti-lexicographique : on compare les suites en partant des valeurs sur les éléments le plus grands de B, donc en partant de la droite si on voit les éléments de A^B comme des suites d'éléments de A indexées par B.

Exemple 2.1.26. Soient p, q deux entiers. Alors l'exponentielle des intervalles $\{1, \dots, p\}$ et $\{1, \dots, q\}$, équipés de l'ordre usuel — par rapport auquel $\{1, \dots, q\}$ a un plus petit élément — est isomorphe à l'intervalle $\{1, \dots, p^q\}$ (équipé de l'ordre usuel).

Proposition 2.1.27 (exponentiation). *Supposons que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sont deux ensembles totalement (resp. bien) ordonnés, et que $\mathcal{A}$ a un plus petit élément. Alors $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}$ est un ensemble totalement (resp. bien) ordonné.*

Démonstration. Supposons $\mathcal{A} = (A, <)$ et $\mathcal{B} = (B, \prec)$. Par définition, on n'a jamais $f \sqsubset f$. Supposons $f \sqsubset g \sqsubset h$. Par définition, il existe i et j dans B tels qu'on ait $f(i) < g(i)$, $f(k) = g(k)$ pour $k \succ i$, et $g(j) < h(j)$, $g(k) = h(k)$ pour $k \succ j$. Puisque $\prec$ est un ordre total, on a ou bien $i \prec j$, ou bien $i = j$, ou bien $i \succ j$. Dans le premier cas, on trouve $f(j) = g(j) < h(j)$, d'où $f(j) < h(j)$, et $f(k) = g(k) = h(k)$ pour $k \succ j$. Dans le second cas, on trouve $f(i) < g(i) < h(i)$, d'où $f(i) < h(i)$, et $f(k) = g(k) = h(k)$ pour $k \succ i$. Enfin, dans le troisième, on trouve $f(i) < g(i) = h(i)$, d'où $f(i) < h(i)$, et $f(k) = g(k) = h(k)$ pour $k \succ i$. On a à chaque fois $f \sqsubset h$, et donc $\sqsubset$ est un ordre strict.

Cet ordre est total : en effet, f et g étant deux éléments quelconques de $A^{(B)}$, l'ensemble des indices i vérifiant $f(i) \neq g(i)$ est inclus dans la réunion des supports de f et g, qui est un ensemble fini, et possède donc un plus grand élément i vis-à-vis de $\prec$. On a alors l'une des deux relations $f(i) \prec g(i)$, $f(i) \succ g(i)$, et donc soit $f \sqsubset g$, soit $f \sqsupset g$.

Supposons maintenant que $<$ et $\prec$ sont des bons ordres, et soit X une partie non vide de $A^{(B)}$. Nous voulons montrer que X possède un plus petit élément. Par hypothèse, chaque fonction f dans $A^{(B)}$ a un support fini; on notera $s_1(f)$ le plus grand élément du support de f vis-à-vis de l'ordre $\prec$, s'il existe, c'est-à-dire si f n'est pas la fonction constante de valeur 0, et, plus généralement, on notera $s_1(f), s_2(f), \dots$ l'énumération décroissante du support de f. Par définition, pour chaque f, l'élément $s_k(f)$ n'est défini que pour un nombre fini de valeurs de k.

Posons, pour démarrer une induction, $X_0 = X$. Deux cas sont possibles. Ou bien la fonction constante f_0 de valeur 0 est dans X_0, et alors, par définition, f_0 minore tout élément de $A^{(B)}$, donc f_0 est plus petit élément de X_0. Ou bien f_0 n'est pas dans X_0, ce qui signifie que $s_1(f)$

est défini pour chaque fonction dans X_0. Posons

$$\begin{aligned} b_1 &= \inf\{s_1(f) \ ; \ f \in X_0\}, \\ a_1 &= \inf\{f(b_1) \ ; \ f \in X_0 \text{ et } s_1(f) = b_1\}, \\ X_1 &= \{f \in X_0 \ ; \ s_1(f) = b_1 \text{ et } f(b_1) = a_1\}. \end{aligned}$$

Comme $\prec$ est un bon ordre, l'élément b_1 existe, et, comme $<$ en est un aussi, l'élément a_1 existe également. L'ensemble X_1 est un sous-ensemble non vide de X_0. Soit f un élément quelconque de X_0. Ou bien on a $s_1(f) \succ b_1$, et alors, si g est un élément quelconque de X_1, on trouve $g(s_1(f)) = 0 < f(s_1(f))$, donc $f \sqsubset g$. Ou bien on a $s_1(f) = b_1$ et $f(b_1) >_A a_1$, et alors, si g est à nouveau un élément quelconque de X_1, on trouve $g(s_1(f)) = g(b_1) = a_1 < f(s_1(f)) = f(b_1)$, donc $f \sqsubset g$. Ou bien on a $s_1(f) = b_1$ et $f(b_1) = a_1$, soit $f \in X_1$. Ceci montre que X_1 est un segment initial de X_0, et donc, pour montrer que X_0 a un plus petit élément, il suffit de montrer que X_1 a un plus petit élément.

A nouveau, deux cas sont possibles. Ou bien la fonction f_1 définie par $f_1(b) = 0$ pour $b \neq b_1$ et $f_1(b_1) = a_1$ est dans X_1, et alors, par construction, f_1 minore toute fonction f vérifiant $s_1(f) = b_1$ et $f(b_1) = a_1$, donc f_1 est plus petit élément de X_1, donc de X_0. Ou bien f_1 n'est pas dans X_1, ce qui signifie que $s_2(f)$ est défini pour chaque fonction dans X_1. On est alors en position d'induction. On pose

$$\begin{aligned} b_2 &= \inf\{s_2(f) \ ; \ f \in X_1\}, \\ a_2 &= \inf\{f(b_2) \ ; \ f \in X_1 \text{ et } s_2(f) = b_2\}, \\ X_2 &= \{f \in X_1 \ ; \ s_2(f) = b_2 \text{ et } f(b_2) = a_2\}. \end{aligned}$$

Le même argument que ci-dessus montre que X_2 est un segment initial de X_1, car on ne considère ici que des fonctions f vérifiant $s_1(f) = b_1$ et $f(b_1) = a_1$, donc le point intervenant dans la comparaison est $s_2(f)$. Introduisons la fonction f_2 définie par $f_2(b) = 0$ pour $b \neq b_1, b_2$, $f_2(b_1) = a_1$ et $f_2(b_2) = a_2$. Ou bien f_2 est dans X_2, auquel cas c'en est le plus petit élément, et donc le plus petit élément de X_1, et de X_0, ou bien f_2 n'est pas dans X_2, auquel cas $s_3(f)$ est défini pour tout f dans X_2, et on peut recommencer, construisant ainsi une suite $X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots$ aussi longtemps qu'on n'a pas trouvé de plus petit élément. Appelons b_i est la valeur commune de $s_i(f)$ pour f dans X_i. Puisque, par définition, il existe au moins une fonction f dans X_i, on a $b_{i-1} = s_{i-1}(f)$ et $b_i = s_i(f)$, d'où $b_{i-1} \succ b_i$. Puisque $\prec$ est un bon ordre, il est impossible que b_i existe pour tout i : cela signifie que, nécessairement, l'induction doit s'arrêter après un nombre fini d'étapes, c'est-à-dire qu'il existe nécessairement un indice i pour lequel X_{i+1} n'existe pas, c'est-à-dire pour lequel la fonction f_i définie par

$$f_i(b) = 0 \text{ pour } b \neq b_1, \dots, b_i, \quad f(b_1) = a_1, \quad \dots, \quad f(b_i) = a_i$$

est dans X_i, dont elle est le plus petit élément, ainsi que celui de X_0. $\square$

Proposition 2.1.28 (1). *Quels que soient les ensembles totalement ordonnés $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ tels que $\mathcal{A}$ ait un élément minimal, il existe un isomorphisme de $\mathcal{A}^{\mathcal{B}+\mathcal{C}}$ sur $\mathcal{A}^{\mathcal{B}} \times \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$, et un isomorphisme de $\mathcal{A}^{\mathcal{B}\times\mathcal{C}}$ sur $(\mathcal{A}^{\mathcal{B}})^{\mathcal{C}}$.*

Démonstration. On note A, B, C les domains respectifs de $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, et $\mathcal{C}$, et on note tous les ordres $<$. L'élément minimal de A est noté 0. Il s'agit d'associer, de façon bijective, à toute fonction à support fini f de $B \amalg C$ dans A un couple formé d'une fonction à support fini de B dans A et d'une fonction à support fini de C dans A. Ceci est facile : on associe à f d'une part sa restriction $R_1(f)$ à B, et d'autre part sa restriction $R_2(f)$ à C. Comme $B \amalg C$ est construit comme $B \times \{1\} \cup C \times \{2\}$, la définition formelle est $R_1(f)(b) = f((b, 1))$ pour $b \in B$, et $R_2(f)(c) = f((c, 2))$ pour $c \in C$ La vérification du fait que l'application $F : f \mapsto (R_1(f), R_2(f))$ est une bijection et est strictement croissante est facile (*cf.* figure 2.6).

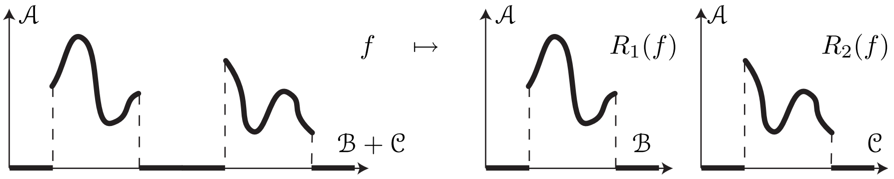

FIGURE 2.6. Isomorphisme de $\mathcal{A}^{\mathcal{B}+\mathcal{C}}$ sur $\mathcal{A}^{\mathcal{B}} + \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$: on coupe la suite en deux fragments

Pour le second résultat, le principe est le même. Il s'agit cette fois d'associer à toute fonction à support fini f de $B \times C$ dans A une fonction à support fini $F(f)$ de C dans les fonctions à support fini de B dans A. Comme l'élément minimal de A^B est la fonction constante c_0 de valeur 0, être de support fini pour une fonction de C dans A^B signifie prendre la valeur c_0 sauf pour un nombre fini de valeurs. Ici f est une fonction à deux variables, et on définit $F(f)$ en posant $F(f)(c)(b) = f(b,c)$, c'est-à-dire en séparant les deux variables. Comme l'ensemble des couples (b,c) vérifiant $f(b,c) \neq 0$ est fini, l'ensemble des c vérifiant $F(f)(c) \neq c_0$ est fini, et F appartient à $(A^{(B)})^{(C)}$ comme escompté. A nouveau les vérifications requises, à savoir que F est bijective et strictement croissante, sont faciles (*cf.* figure 2.7). $\square$

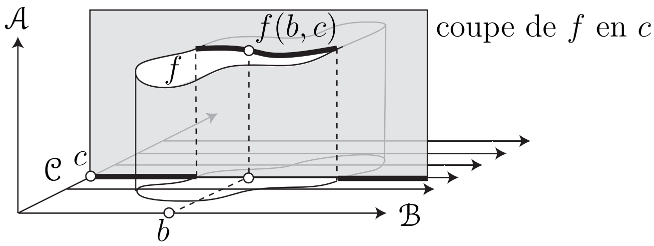

FIGURE 2.7. Isomorphisme de $\mathcal{A}^{\mathcal{B}\times\mathcal{C}}$ sur $(\mathcal{A}^{\mathcal{B}})^{\mathcal{C}}$: on associe à une suite f la suite de ses coupes suivant la seconde variable

2.2. Construction des ordinaux

▶ On construit une famille d'ensembles bien ordonnés particuliers, appelés les ordinaux. La propriété remarquable de ces ordinaux est de constituer une famille de représentants uniques pour les classes d'isomorphisme de bons ordres : tout ensemble bien ordonné est isomorphe à un unique ordinal.

La construction décrite ici est dûe à John von Neumann ; elle est extrêmement astucieuse et rapide — mais en contre-partie peu intuitive. En faisant des ordinaux des ensembles purs[3], elle constituera une étape importante dans la réalisation du programme proposé au chapitre 1, lequel réclame l'existence de suffisamment d'ensembles purs.

Il est bon de se rappeler dans la suite que, suivant un principe déjà affirmé, la nature des objets mathématiques importe moins que leur comportement. Ceci s'applique aux ordinaux qui sont ici introduits par

[3]lesquels n'ont pas encore été définis à ce point...

une définition explicite mais assez mystérieuse. Ce qui importera surtout dans la suite n'est pas la construction elle-même, mais les propriétés qu'elle garantit, typiquement le résultat que tout bon ordre est isomorphe à un unique ordinal, puis la légitimation des définitions par récursion ordinale qu'on verra au chapitre 3. Ne pas oublier que des définitions alternatives des ordinaux seraient possibles, pourvu qu'elles mènent aux mêmes propriétés[4]. ◀

2.2.1. Ensembles transitifs.

▶ La construction commence avec la notion d'ensemble transitif, une notion assez étrange même si la définition est simple. ◀

DÉFINITION 2.2.1 (transitif). Un ensemble A est dit *transitif* si c'est un ensemble d'ensembles et que tout élément d'un élément de A est élément de A, c'est-à-dire si $\bigcup A$ est inclus dans A.

Ainsi, un ensemble A est transitif si et seulement si on a

$$x \in a \in A \Rightarrow x \in A, \tag{2.2.1}$$

c'est-à-dire encore

$$a \in A \Rightarrow a \subseteq A, \tag{2.2.2}$$

soit $A \subseteq \mathfrak{P}(A)$. La plupart des ensembles ne sont pas transitifs ; cependant il existe des ensembles transitifs :

LEMME 2.2.2. (i) *L'ensemble vide est transitif.*
(ii) *Si A est transitif, il en est de même de $\mathfrak{P}(A)$ et de $A \cup \{A\}$.*

DÉMONSTRATION. (i) Comme $\varnothing$ n'a pas d'élément, l'implication (2.2.1) est automatiquement vraie.

(ii) Supposons A transitif. Supposons $x \in a \in \mathfrak{P}(A)$, soit $x \in a \subseteq A$. Par définition de l'inclusion, ceci entraîne $x \in A$, donc, par (2.2.2), $x \subseteq A$, soit $x \in \mathfrak{P}(A)$, et on conclut que $\mathfrak{P}(A)$ est transitif.

De même, supposons $x \in a \in A \cup \{A\}$. On a donc $a \in A$ ou $a = A$ (ou les deux). Dans le premier cas, on obtient $x \in a \in A$, donc $x \in A$ puisque A est transitif; dans le second cas, on a $x \in a = A$, donc $x \in A$ directement. Donc $A \cup \{A\}$ est transitif. □

Il existe donc une infinité d'ensembles transitifs, puisqu'au moins tous les ensembles inductivement obtenus à partir de l'ensemble vide en utilisant de façon répétée les opérations $A \mapsto \mathfrak{P}(A)$ ou $A \mapsto A \cup \{A\}$ sont transitifs.

2.2.2. Ordinaux.

▶ On introduit maintenant les ordinaux comme des ensembles transitifs particuliers, définis en termes de propriétés de la restriction de l'appartenance. ◀

[4] à commencer par la définition initiale de Cantor, qui introduisait les ordinaux comme classes d'isomorphisme de bons ordre, sans sélectionner de représentants particuliers

$\maltese$ *Pour tout ensemble A, la restriction de la relation d'appartenance à A est une relation binaire sur A. En général, cette relation est purement et simplement vide : il y a a priori aucune raison pour que, parmi les éléments de A, il en existe deux, disons a et b, tels que b soit un ensemble et qu'on ait $a \in b$. Cependant, si A est un ensemble transitif, alors il se peut qu'un élément de A appartienne à un autre élément de A. Par exemple, l'ensemble $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\varnothing))$ a deux éléments, à savoir $\varnothing$ et $\{\varnothing\}$, et le premier est un élément du second, donc la restriction de $\in$ à $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\varnothing))$ se compose de l'unique couple $(\varnothing, \{\varnothing\})$. La figure 2.8 donne un autre exemple.*

Même lorsque la restriction de l'appartenance à un ensemble A est non vide, il n'y a aucune raison pour que cette restriction soit une relation d'ordre, ou une relation d'équivalence, ou quelque relation particulière que ce soit. Cependant, on peut toujours considérer ceux des ensembles A pour lesquels la restriction à A de l'appartance a telle ou telle propriété par exemple d'être un ordre. Comme une relation du type $a \in a$ apparaît étrange, on considère le cas où la restriction de $\in$ est un ordre strict. $\maltese$

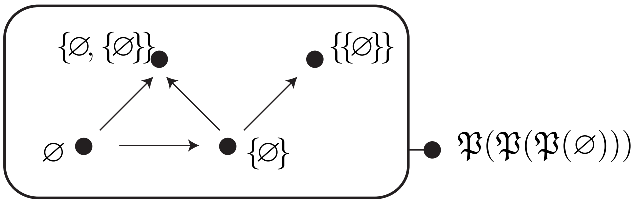

FIGURE 2.8. Un exemple d'ensemble A tel que la restriction de $\in$ à A ne soit pas vide : l'ensemble $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\varnothing)))$

DÉFINITION 2.2.3 (ordinal). On dit qu'un ensemble α est un *ordinal* si α est un ensemble transitif et que la restriction de $\in$ à α est un bon ordre strict. Autrement dit, α est un ordinal si les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

(i) pour tout x dans α, on a $x \subseteq \alpha$;

(ii) pour tout x dans α, on a $x \notin x$;

(iii) pour tous x, y, z dans α, si on a $x \in y$ et $y \in z$, alors on a $x \in z$;

(iv) pour tout sous-ensemble non vide A de α, il existe x dans A vérifiant $x \in y$ pour tout y dans A distinct de x.

Dans toute la suite, on se conforme à l'usage d'utiliser les minuscules grecques pour les ordinaux, et de les réserver à cette fin. Comme pour les ensembles transitifs, on commence par vérifier qu'il existe des ordinaux.

LEMME 2.2.4. (i) *L'ensemble vide est un ordinal.*
(ii) *Si α est un ordinal, alors on a $\alpha \notin \alpha$.*
(iii) *Si α est un ordinal, alors on a $\alpha \cup \{\alpha\}$ en est un aussi.*

DÉMONSTRATION. (i) Comme $\varnothing$ n'a aucun élément, et, de là, aucun sous-ensemble non vide, les quatre conditions qui définissent un ordinal sont automatiquement satisfaites.

(*ii*) Par définition, si α est un ordinal, on a $x \notin x$ pour tout élement x de α. Si on avait $\alpha \in \alpha$, c'est-à-dire si α était élément de lui-même, on aurait donc $\alpha \notin \alpha$, ce qui contredit l'hypothèse.

(*iii*) Soit α un ordinal, et $\beta = S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$. Il s'agit de vérifier que β satisfait aux quatre conditions de la définition d'un ordinal. Le lemme 2.2.2 affirme déjà que $S(\alpha)$ est un ensemble transitif.

Supposons $x \in \beta$. Alors, par définition, on a ou bien $x \in \alpha$, ou bien $x = \alpha$, les deux s'excluant en vertu de (*ii*). Dans le premier cas, on a $x \notin x$ puisque α est un ordinal, dans le second, on a $x \notin x$ par (*ii*).

Supposons maintenant $x, y, z \in \beta$, avec $x \in y \in z$. Si x, y et z appartiennent à α, alors on déduit $x \in z$ de l'hypothèse que α est un ordinal. Supposons $x = \alpha$. Par (*ii*), on ne peut avoir $y = \alpha$, et on a donc $\alpha \in y \in a$. Comme α est un ensemble transitif, cela entraîne $\alpha \in \alpha$, contredisant (*ii*) : l'hypothèse $x = \alpha$ est donc impossible. Supposons maintenant $y = \alpha$. Nous déduisons alors $z \neq \alpha$, donc $z \in \alpha$, soit $\alpha \in z \in \alpha$, et, à nouveau, $\alpha \in \alpha$: l'hypothèse $y = \alpha$ est donc également impossible. Reste le cas $z = \alpha$. On a alors $x \in y \in \alpha$, et l'hypothèse que α est un ensemble transitif entraîne $x \in \alpha$, soit $x \in z$. On a donc montré dans tous les cas que la restriction de $\in$ à β est une relation transitive.

Soit A un sous-ensemble non vide de β. Supposons d'abord que $A \cap \alpha$ est non vide. Puisque α est un ordinal, il existe x dans $A \cap \alpha$ vérifiant $x \in y$ pour tout y distinct de x dans $A \cap \alpha$. Puisque x est dans $A \cap \alpha$, on a $x \in \alpha$ par hypothèse, et donc $x \in y$ pour tout y distinct de x dans A. Finalement, si A est non vide et $A \cap \alpha$ l'est, comme β est $\alpha \cup \{\alpha\}$, la seule possibilité est $A = \{\alpha\}$. Posons $x = \alpha$: alors x est bien un élément de A vérifiant $x \in y$ pour tout élément de A distinct de x, puisqu'il n'existe pas de tel élément y. □

Il existe donc une infinité d'ordinaux, à savoir au moins $\varnothing$ et tous les ensembles obtenus à partir de $\varnothing$ en répétant l'opération $\alpha \mapsto \alpha \cup \{\alpha\}$.

NOTATION 2.2.5 (opération S, ordinal $\tilde{n}$). Pour tout ensemble A, on pose $S(A) = A \cup \{A\}$. Pour n entier naturel, on note $\tilde{n}$ l'ordinal $S^n(\varnothing)$.

Par exemple, on trouve :
$\tilde{0} = \varnothing$,
$\tilde{1} = S(\tilde{0}) = \{\tilde{0}\}$,
$\tilde{2} = S(\tilde{1}) = \tilde{1} \cup \{\tilde{1}\} = \{\tilde{0}\} \cup \{\tilde{1}\} = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$,
$\tilde{3} = S(\tilde{2}) = \tilde{2} \cup \{\tilde{2}\} = \{\tilde{0}, \tilde{1}\} \cup \{\tilde{2}\} = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}\}$, *etc.*
On constate sur ces exemples que les éléments de l'ordinal $\tilde{n}$ se trouvent être des ordinaux, et plus précisément les ordinaux $\tilde{k}$ pour $k < n$. Cette propriété est générale :

PROPOSITION 2.2.6 (1). *Pour tout entier n, l'ordinal $\tilde{n}$ a exactement n éléments, à savoir les ordinaux $\tilde{k}$ pour $k < n$.*

DÉMONSTRATION. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 0$, c'est-à-dire opur $\varnothing$, le résultat est vrai. Supposons $n > 0$, et posons $m := n - 1$. On a alors $\tilde{n} = \tilde{m} \cup \{\tilde{m}\}$, donc les éléments de $\tilde{n}$ sont d'une part les éléments de $\tilde{m}$, c'est-à-dire, par hypothèse de récurrence, les m ordinaux $\tilde{k}$ avec $k < m$, d'autre part l'unique élément de $\{\tilde{m}\}$, c'est-à-dire $\tilde{m}$, dont on sait par le lemme 2.2.4(*ii*) qu'il n'appartient pas à $\tilde{m}$. Donc $\tilde{n}$ a n éléments et ce sont les ordinaux $\tilde{k}$ avec $k < n$. □

On note dès maintenant deux résultats valables pour tous les ordinaux, qu'ils soient du type $\tilde{n}$ ou non :

Lemme 2.2.7. *Tout élément d'un ordinal α est un ordinal strictement inclus dans α.*

Démonstration. Soit α un ordinal, et x un élément de α. Puisque α est transitif, $x \in \alpha$ implique $x \subseteq \alpha$. On veut montrer que x est un ordinal. Supposons d'abord $z \in y \in x$. Puisque x est inclus dans α, on déduit $y \in \alpha$, puis $z \in \alpha$ puisque α est transitif. Puisque la restriction de $\in$ à α est une relation transitive et que z, y, et x sont éléments de α, on déduit $z \in x$, et x est un ensemble transitif.

Puisque x est inclus dans α, la relation $\in\restriction_x$ est la restriction à x de $\in\restriction_\alpha$, donc, par le lemme 2.1.7, cette restriction est un bon ordre. Par conséquent, x est un ordinal.

Finalement, on a vu que x est inclus dans α. L'inclusion est stricte, car, par le Lemme 2.2.4(ii), x est dans α mais pas dans x. $\square$

La figure 2.9 suggère la structure (assez étrange) des ordinaux découlant des résultats précédents.

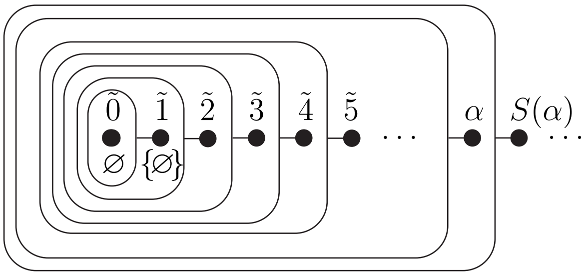

Figure 2.9. Structure des ordinaux : chaque ordinal α est lui-même un ensemble d'ordinaux inclus dans α ; l'ordinal $S(\alpha)$ est la réunion de α et de $\{\alpha\}$: ses éléments sont donc les éléments de α, ainsi qu'α lui-même

Si A est un ensemble non vide d'ensembles, on note $\bigcap A$ l'*intersection* de A, c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui sont dans tous les éléments de A.

Lemme 2.2.8. *Si A est un ensemble non vide d'ordinaux, $\bigcap A$ est un ordinal.*

Démonstration. Posons $x = \bigcap A = \{\xi \ ; \ (\forall \alpha \in A)(\xi \in \alpha)\}$. Toute intersection d'ensembles transitifs est un ensemble transitif, donc x est un ensemble transitif. Soit α un élément quelconque de A. D'abord tout élément de x est élément de α, donc est un ordinal. Soient ξ, η, ζ des éléments de x, donc de α. Par le lemme 2.2.4(ii), on a $\xi \notin \xi$. Ensuite, si on a $\xi \in \eta \in \zeta$, le fait que α soit un ordinal entraîne $\xi \in \zeta$. Donc la restriction de $\in$ à x est un ordre strict. Enfin, soit X une partie non vide de x. Alors X est une partie non vide de α, donc elle possède un plus petit élément ξ vis-à-vis de $\in\restriction_\alpha$, c'est-à-dire qu'on a $\xi \in \eta$ ou $\xi = \eta$ pour tout élément de X. Ceci signifie que ξ est plus petit élément de X vis-à-vis de $\in\restriction_x$. Donc la relation $\in\restriction_x$ est un bon ordre, et x est un ordinal. $\square$

2.2.3. L'ordre sur les ordinaux.

▶ On vient de voir que tous les éléments d'un ordinal sont des ordinaux. On montre ici une sorte de réciproque, à savoir que, si α et β sont des ordinaux distincts et que α n'est pas élément de β, alors nécessairement β est élément de α. Cette propriété permet de construire un ordre total, et même un bon ordre, sur les ordinaux. ◀

LEMME 2.2.9. *La restriction de la relation $\in$ aux ordinaux est un ordre strict.*

DÉMONSTRATION. Le lemme 2.2.4(ii) affirme que $\alpha \in \alpha$ est impossible pour tout ordinal α. Par ailleurs, si α, β, γ vérifient $\alpha \in \beta \in \gamma$, alors, puisque, par définition, γ est un ensemble transitif, on a $\alpha \in \gamma$. Donc la restriction de $\in$ aux ordinaux est antiréflexive et transitive: c'est un ordre strict. □

DÉFINITION 2.2.10 (ordre). Si α, β sont des ordinaux, on dit que α est *plus petit* que β, noté $\alpha < \beta$, si α est élément de β.

EXEMPLE 2.2.11. Par construction, on a toujours $\alpha \in S(\alpha)$ et donc, puisque $S(\alpha)$ est un ordinal, on a $\alpha < S(\alpha)$. En particulier, on a $\tilde{n} < (n+1)\tilde{}$ pour tout entier n. Plus généralement, la proposition 2.2.6 montre que, pour m, n entiers, $\tilde{m} < \tilde{n}$ équivaut à $m < n$.

PROPOSITION 2.2.12 (ordre). (i) *Tout ordinal coïncide avec l'ensemble des ordinaux plus petits que lui.*
(ii) *L'ordre large associé à la restriction de $\in$ aux ordinaux est l'inclusion : si α, β sont des ordinaux, $\alpha \subseteq \beta$ est vrai si et seulement si on a soit $\alpha \in \beta$, soit $\alpha = \beta$ — autrement dit, $\alpha \in \beta$ équivaut à $\alpha \subsetneqq \beta$.*
(iii) *Pour chaque ordinal α, l'ordinal $S(\alpha)$ est succeseur immédiat de α : on a $\alpha < S(\alpha)$, et $\alpha < \beta$ entraîne $S(\alpha) \leqslant \beta$. De plus, S est strictement croissante: $\alpha < \beta$ entraîne $S(\alpha) < S(\beta)$.*

DÉMONSTRATION. (i) Soit α un ordinal quelconque. Alors α est l'ensemble de ses éléments. Par le lemme 2.2.7, ceux-ci sont des ordinaux, donc α est l'ensemble des ordinaux qui sont éléments de α: par définition, c'est donc l'ensemble des ordinaux plus petits que α.

(ii) Supposons $\alpha \leqslant \beta$. Nous avons ou bien $\alpha < \beta$, donc, par définition, $\alpha \in \beta$, ce qui, puisque β est transitif, entraîne $\alpha \subseteq \beta$, ou bien $\alpha = \beta$, donc aussi $\alpha \subseteq \beta$. Dans tous les cas, $\alpha \leqslant \beta$ entraîne $\alpha \subseteq \beta$.

Inversement, supposons $\alpha \subseteq \beta$. Alors on a ou bien $\alpha = \beta$, donc $\alpha \leqslant \beta$, ou bien $\alpha \subsetneqq \beta$. Dans ce cas, $\beta \setminus \alpha$ est une partie non vide de α et, puisque $(\beta, \in\restriction_\beta)$ est un ensemble bien ordonné, cette partie $\beta \setminus \alpha$ possède un plus petit élément α', qui est un ordinal comme tout élément de β. On va montrer $\alpha' = \alpha$, qui, puisque α' est dans β, donne $\alpha \in \beta$, donc $\alpha < \beta$, d'où *a fortiori* $\alpha \leqslant \beta$.

Soit $\xi \in \alpha$ quelconque. Puisque α est inclus dans β, on a $\xi \in \beta$, et ξ est comparable avec α' : l'une des trois relations $\xi \in \alpha'$, $\xi = \alpha'$, $\alpha' \in \xi$ est vraie. Or $\xi = \alpha'$ donnerait $\xi \notin \alpha$ puisque α' est dans $\beta \setminus \alpha$, contredisant l'hypothèse $\xi \in \alpha$. De même, puisque α est un ensemble transitif, $\alpha' \in \xi$ entraînerait $\alpha' \in \alpha$, contredisant le fait que α' est dans $\beta \setminus \alpha$. On a donc nécessairement $\xi \in \alpha'$, donc $\alpha \subseteq \alpha'$.

Inversement, supposons $\xi \in \alpha'$. Puisque β est un ensemble transitif, ξ est dans β, et alors la définition de α' comme plus petit élément de $\beta \setminus \alpha$ entraîne $\xi \in \alpha$. On a donc $\alpha' \subseteq \alpha$, et, finalement $\alpha' = \alpha$, comme annoncé.

(*iii*) La relation $\alpha \in S(\alpha)$, c'est-à-dire $\alpha < S(\alpha)$, est vraie par définition. Supposons $\alpha < \beta$. On a alors $\alpha \in \beta$, donc $\{\alpha\} \subseteq \beta$, et, d'autre part, $\alpha \leqslant \beta$ donc, par (*ii*), $\alpha \subseteq \beta$. On a donc $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$, soit, toujours par (*ii*), $S(\alpha) \leqslant \beta$. Enfin, supposons $\alpha < \beta$. On vient de voir que ceci entraîne $S(\alpha) \leqslant \beta < S(\beta)$, d'où $S(\alpha) < S(\beta)$. □

L'ordre des ordinaux est un bon ordre au sens suivant :

Proposition 2.2.13 (bon ordre). *Tout ensemble non vide d'ordinaux A possède un plus petit élément, à savoir $\bigcap A$.*

Démonstration. Posons $\mu = \bigcap A$. Par le lemme 2.2.8, μ est un ordinal. Par construction, on a $\mu \subseteq \alpha$ pour tout α dans A, soit, par la proposition 2.2.12(*ii*), $\mu \leqslant \alpha$. Deux cas sont possibles *a priori*: ou bien il existe α_0 dans A pour lequel on a $\mu = \alpha_0$, c'est-à-dire que μ appartient à A, et, dans ce cas, μ est plus petit élément de A puisqu'on a $\mu \leqslant \alpha$ pour tout élément α de A, ou bien on a $\mu < \alpha$ pour tout α dans A, ce qui, par définition de l'ordre, signifie qu'on a $\mu \in \alpha$ pour tout α dans A, donc $\mu \in \bigcap A$, soit $\mu \in \mu$, contredisant le lemme 2.2.4(*ii*). On est donc nécessairement dans le premier cas, c'est-à-dire que μ appartient à A. □

Appliquant ce qui précède à la paire $\{\alpha, \beta\}$, on déduit :

Corollaire 2.2.14. *Pour chaque paire d'ordinaux $\{\alpha, \beta\}$, l'une exactement des trois relations $\alpha \in \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta \in \alpha$ est vérifiée.*

⚔ *Autrement dit, l'ordre des ordinaux est un ordre total. En vertu de la proposition 2.2.12(i), le segment initial de la suite des ordinaux déterminé par un ordinal α, c'est-à-dire l'ensemble des ordinaux plus petits que α, coïncide avec α : cette propriété peu intuitive résulte de la définition des ordinaux choisie. A ce point, nous pouvons commencer à représenter la suite des ordinaux comme sur la figure 2.10 : il s'agit d'une suite totalement ordonnée, $\tilde{0}$ en est le plus petit élément, et chaque ordinal α a un successeur immédiat qui est $S(\alpha)$, de sorte que $\tilde{1}$ est le second élément, $\tilde{2}$ le troisième, etc.* ⚔

Figure 2.10. La suite des ordinaux (1) : cette figure est analogue à la figure 2.9, mais on oublie la structure interne des ordinaux pour ne retenir que leur ordre

2.2.4. Le principe d'induction ordinale.

▶ On a rappelé l'importance des démonstrations par induction, sur les entiers ou plus généralement sur les ensembles bien ordonnés. Comme les ordinaux sont des cas particuliers d'ensembles bien ordonnés, le principe général d'induction s'applique à eux. Vue son importance cruciale, on réénonce le résultat dans le cas spécifique. ◀

PROPOSITION 2.2.15 (induction ordinale). *Soit $\mathcal{P}(\alpha)$ une propriété pour laquelle le principe de séparation est valide* [5]*. Supposons que $\mathcal{P}(\alpha)$ est vraie dès que $\mathcal{P}(\xi)$ l'est pour $\xi < \alpha$. Alors $\mathcal{P}(\alpha)$ est vraie pour tout ordinal α.*

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il existe un ordinal α tel que $\mathcal{P}(\alpha)$ soit fausse. Posons $A = \{\xi \in S(\alpha)\ ;\ \mathcal{P}(\xi) \text{ est fausse}\}$. L'hypothèse sur $\mathcal{P}$ garantit l'existence de l'ensemble A, et A n'est pas vide puisqu'il contient α. Donc A a un plus petit élément, disons α'. Mais cela signifie que $\mathcal{P}(\alpha')$ est fausse, alors que $\mathcal{P}(\xi)$ est vraie pour $\xi < \alpha'$, contredisant à nouveau l'hypothèse. La seule possibilité est donc qu'il n'existe pas d'ordinal α tel que $\mathcal{P}(\alpha)$ soit fausse. □

☒ *La formulation du principe d'induction comme savoir $(\forall \xi < \alpha)(\mathcal{P}(\xi)) \Rightarrow \mathcal{P}(\alpha)$ dispense de séparer le cas de $\tilde{0}$: $(\forall \xi < \tilde{0})(\mathcal{P}(\xi)) \Rightarrow \mathcal{P}(\tilde{0})$ équivaut à $\mathcal{P}(\varnothing)$, puisque $(\forall \xi < \tilde{0})(\mathcal{P}(\xi))$ est toujours vrai, faute d'ordinal ξ vérifiant $\xi < \tilde{0}$.* ☒

2.2.5. Borne supérieure; l'ordinal ω.

▶ Ayant considéré les intersections d'ensembles d'ordinaux, on peut considérer symétriquement les réunions de tels ensembles. Le résultat est similaire, mais avec la différence fondamentale qu'on obtient seulement une borne supérieure et pas nécessairement un plus grand élément. Ceci mène au résultat que les ordinaux ne forment pas un ensemble, et à l'introduction de l'ordinal infini ω. ◀

PROPOSITION 2.2.16 (borne supérieure). *Tout ensemble d'ordinaux A possède une borne supérieure, à savoir $\bigcup A$.*

DÉMONSTRATION. Posons $x = \bigcup A$. Par le lemme 2.2.7, x est un ensemble d'ordinaux. D'abord x est transitif comme toute union d'ensembles transitifs. Ensuite soient ξ, η, ζ des éléments de x. Puisque ξ est un ordinal, on a $\xi \notin \xi$ par le lemme 2.2.4(*ii*). D'autre part, supposons $\xi \in \eta \in \zeta$. Il existe par définition α dans A tel que ζ appartient à α. Comme α est transitif, η, puis ξ, appartiennent à α. Comme la restriction de $\in$ à α est transitive, on déduit $\xi \in \zeta$, et la restriction de $\in$ à x est un ordre strict.

Soit X une partie non vide de x. Soit ξ un élément quelconque de X. Par hypothèse, il existe α dans A tel que ξ appartient à α. Alors $X \cap \alpha$ est une partie de α, qui est non vide puisqu'elle contient ξ, et cette partie contient donc un plus petit élément, disons η. Il s'agit de voir que η est plus petit élément de X, et pas seulement de $X \cap \alpha$. Or soit ζ un élément quelconque de X. Alors on a ou bien $\zeta \in \alpha$, donc $\eta \leqslant \zeta$ par hypothèse, ou bien $\zeta \notin \alpha$, donc $\alpha \subseteq \zeta$ par la proposition 2.2.13 d'où $\eta < \alpha \leqslant \zeta$. Donc η est plus petit élément de X, et la restriction de $\in$ à x est un bon ordre. Donc x est un ordinal.

Pour tout α dans A, on a $\alpha \subseteq x$, donc x est un majorant de A. Inversement, supposons $\xi < x$, c'est-à-dire $\xi \in \bigcup A$. Par définition de l'union, cela signifie qu'il existe α dans A vérifiant $\xi \in \alpha$. Donc x est le plus petit des majorants de A, c'est-à-dire qu'il en est borne supérieure. □

Une conséquence directe est que les ordinaux ne forment pas un ensemble :

PROPOSITION 2.2.17 (paradoxe de Burali–Forti). *Aucun ensemble ne contient tous les ordinaux.*

---

[5]Comme pour la proposition 2.1.6, la restriction sur la propriété $\mathcal{P}$ tient au flou de la formulation ; tout ceci sera précisé dans le chapitre 3

Démonstration. Supposons qu'il existe un ensemble contenant tous les ordinaux. Alors, par séparation, il existe un ensemble Ω de tous les ordinaux. Par la proposition 2.2.16, $\bigcup\Omega$ est un ordinal, et on a $\alpha \leqslant \bigcup\Omega$ pour tout ordinal α dans Ω, donc pour tout ordinal α. En particulier, on a $\bigcup\Omega < S(\bigcup\Omega) \leqslant \bigcup\Omega$, d'où $\bigcup\Omega \in \bigcup\Omega$, contredisant le lemme 2.2.4(ii). $\square$

L'application de la proposition 2.2.16 à la famille des ordinaux $\tilde{n}$ mène à un nouvel ordinal :

Définition 2.2.18 (omega). On note ω la borne supérieure des ordinaux $\tilde{n}$ pour n entier.

L'ordinal ω est le premier ordinal plus grand que tous les ordinaux finis. Par construction, il se trouve contenir tous les ordinaux $\tilde{n}$, et est donc un ensemble infini ainsi qu'en témoigne l'injection non surjective $\tilde{n} \mapsto (n{+}1)\tilde{}$. Par conséquent, ω est le premier ordinal infini.

Le point important pour la suite est que ω majore tous les ordinaux finis, ce que Cantor exprimait par le qualificatif transfini. *Qu'en tant qu'ensemble, l'ordinal ω se trouve être infini résulte de la construction adoptée ici, mais c'est un point secondaire — même si, et c'est dommage, l'adjectif « infini » a pris le pas sur « transfini » dans l'usage.*

Lemme 2.2.19. *La relation $\omega = \bigcup\omega$ est vérifiée.*

Démonstration. Comme $k < n$ entraîne $\tilde{k} \in \tilde{n}$, les éléments des éléments de ω coïncident avec les éléments de ω. $\square$

2.2.6. Ordinaux successeurs et limites.

▶ Le lemme 2.2.19 suggère d'étudier systématiquement l'ensemble $\bigcup\alpha$ quand α est un ordinal. Ceci mène à séparer les ordinaux non nuls en deux familles complémentaires. ◀

Lemme 2.2.20. *Pour tout ordinal α,*
- ou bien $\xi < \alpha$ entraîne $S(\xi) < \alpha$ pour tout ξ, et on a alors $\bigcup\alpha = \alpha$,
- ou bien il existe α' tel qu'on ait $\alpha = S(\alpha')$, et on a alors $\bigcup\alpha = \alpha'$.

Démonstration. Soit α un ordinal quelconque. Par définition, α est un ensemble transitif, donc on a $\bigcup\alpha \subseteq \alpha$, soit, puisque $\bigcup\alpha$ est un ordinal par la proposition 2.2.16, $\bigcup\alpha \leqslant \alpha$. Par ailleurs, par la proposition 2.2.12(iii), $\xi < \alpha$ entraîne $S(\xi) \leqslant \alpha$. Deux cas sont possibles : ou bien $\xi < \alpha$ entraîne toujours $S(\xi) < \alpha$, ou bien il existe $\alpha' < \alpha$ vérifiant $S(\alpha') \geqslant \alpha$, auquel cas on a nécessairement $S(\alpha') = \alpha$.

Dans le premier cas, pour ξ dans α, on a $\xi < S(\xi) < \alpha$, soit $\xi \in S(\xi) \in \alpha$, et donc $\xi \in \bigcup\alpha$. Par conséquent, α est inclus dans $\bigcup\alpha$, et on a donc $\bigcup\alpha = \alpha$ d'après ce qui est au-dessus.

Dans le second cas, pour ξ dans α', on a $\xi \in \alpha' \in \alpha$, donc $\xi \in \bigcup\alpha$, soit $\alpha' \leqslant \bigcup\alpha$. Inversement, par construction, on a $\bigcup\alpha = \bigcup(S(\alpha')) = \bigcup\alpha' \cup \alpha' \subseteq \alpha'$, donc $\bigcup\alpha \leqslant \alpha'$, et, finalement, $\bigcup\alpha = \alpha'$. $\square$

Définition 2.2.21 (successeur, limite). Un ordinal α est appelé *successeur* (*resp. limite*) s'il existe β vérifiant $\alpha = S(\beta)$ (*resp.* si α est distinct de $\tilde{0}$ et vérifie $\alpha = \bigcup\alpha$).

Exemple 2.2.22. Les ordinaux $\tilde{1}, \tilde{2}, \ldots$ sont des ordinaux successeurs, tandis que ω est un ordinal limite, et c'est le plus petit ordinal limite. La suite des ordinaux continue ensuite avec de nouveaux ordinaux successeurs : $S(\omega)$, $S^2(\omega)$, *etc.* On peut donc raffiner un peu la représentation des ordinaux comme suggéré sur la figure 2.11.

Figure 2.11. La suite des ordinaux (2) : l'ordinal ω n'est successeur d'aucun ordinal, mais c'est la limite des ordinaux plus petits ; comme la suite des ordinaux n'est pas un ensemble, il est naturel de l'imaginer très longue.

⚒ *L'appellation d'ordinal limite provient de la topologie. Pour chaque ordre total sur un ensemble A, on introduit la topologie dont une base d'ouverts est la famille des intervalles ouverts $]a, b[$. La topologie de $\mathbb{R}$ s'obtient ainsi à partir de l'ordre des réels, de même que la topologie discrète sur $\mathbb{Z}$ puisque chaque singleton dans $\mathbb{Z}$ est un intervalle ouvert. Dans le cas des ordinaux, noter que chaque intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ coïncide avec l'intervalle semi-ouvert $[S(\alpha), \beta[$.* ⚒

Proposition 2.2.23 (topologie). *Un ordinal est limite (resp. successeur) si et seulement si c'est un point d'accumulation (resp. un point isolé) pour de la topologie de l'ordre.*

Démonstration. Soient λ un ordinal limite, et U un ouvert contenant λ. Par définition, il existe un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ inclus dans U et contenant λ. On a donc $\alpha < \lambda < \beta$. Alors $S(\alpha)$ est un autre point de cet intervalle, donc de U, ce qui montre que λ est point d'accumulation (à gauche).

Inversement, supposons $\alpha = S(\alpha')$. Alors on a $\{\alpha\} =]\beta, S(\alpha)[$, et α est donc un point isolé. □

La partition des ordinaux en $\tilde{0}$, ordinaux successeurs et ordinaux limites permet de reformuler le principe d'induction dans des termes plus voisins de l'induction sur les entiers :

Proposition 2.2.24 (induction ordinale II). *Soit $\mathcal{P}(\alpha)$ une propriété pour laquelle la séparation est valide. Supposons que*
- $\mathcal{P}(\tilde{0})$ *est vraie;*
- *si $\mathcal{P}(\alpha)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(S(\alpha))$ l'est aussi,*
- *si λ est limite et si $\mathcal{P}(\alpha)$ est vraie pour $\alpha < \lambda$, alors $\mathcal{P}(\lambda)$ est vraie.*

Alors $\mathcal{P}(\alpha)$ est vraie pour tout ordinal α.

Démonstration. Comme pour la proposition 2.2.15, si $\mathcal{P}(\alpha)$ n'était pas vraie pour tout α, il existerait un plus petit élément α tel que $\mathcal{P}(\alpha)$ soit fausse, et les trois clauses de l'énoncé interdisent respectivement que α soit $\varnothing$, un ordinal successeur, et un ordinal limite. □

2.2.7. Le théorème de comparaison.

► A chaque ordinal α est associé un bon ordre, à savoir $\in\restriction_\alpha$. Les ordinaux constituent donc une famille particulière d'ensembles bien ordonnés. Une des intérêts de cette construction est que cette famille fournit un représentant distingué (et un seul) pour chaque type de bon ordre. ◄

Proposition 2.2.25 (comparaison). *Tout ensemble bien ordonné est isomorphe à un unique ordinal.*

Démonstration. Essentiellement, le résultat est dans la proposition 2.1.16 : si $(A, <)$ est un ensemble bien ordonné, alors on le compare à la suite des ordinaux, et la proposition dit que ou bien $(A, <)$ est isomorphe à la suite des ordinaux entière, ou bien cette dernière est isomorphe à un segment initial de $(A, <)$, ou bien $(A, <)$ est isomorphe à un segment initial de la suite des ordinaux. Les deux premiers cas sont exclus car la suite des ordinaux n'est pas un ensemble, donc il ne reste que le troisième cas, et, comme un segment initial de la suite des ordinaux est un ordinal, on a le résultat escompté.

Comme la proposition 2.1.16 ne concerne que deux ensembles bien ordonnés, l'argument précédent peut paraître un peu rapide, et on peut le reprendre. Soit $(A, <)$ un ensemble bien ordonné quelconque. On considère la correspondance F de A vers les ordinaux définie par

$$F(a) = \xi \text{ si et seulement si } I_<(a) \text{ est isomorphe à } (\xi, \in).$$

Comme dans la section 2.1, F est fonctionnelle, c'est-à-dire qu'il existe au plus une valeur de ξ pour chaque valeur de a, et injective, c'est-à-dire qu'il existe au plus une valeur de a pour chaque valeur de ξ. Donc F établit un isomorphisme de son domaine sur son image.

Le même argument que dans la section 2.1 montre que le domaine de F est A ou un segment initial de $(A, <)$, et que l'image de F est la suite entière des ordinaux, ou un segment initial de celle-ci, et que le cas « segment initial + segment initial » est impossible. Comme aucun ensemble ne contient tous les ordinaux, le cas où l'image serait toute la suite des ordinaux est exclu[6], et le seul cas restant est celui où le domaine de F est A et où l'image de F est un segment initial de la suite des ordinaux, c'est-à-dire, par construction, un ordinal. On a donc ainsi un isomorphisme de $(A, <)$ sur un ordinal.

Celui-ci est unique, puisque, par le lemme 2.1.15, un bon ordre n'est jamais isomorphe à un de ses segments initiaux. □

2.3. Arithmétique ordinale

► Par l'intermédiaire du théorème de comparaison, les opérations sur les bons ordres définies dans la section 2.1 mènent naturellement à des opérations sur les ordinaux. Celles-ci permettent en particulier de spécifier des ordinaux nouveaux et par là de mieux appréhender la richesse des ordinaux. ◄

2.3.1. Un critère.

► Dans la suite, on affirmera souvent soit des égalités, soit des inégalités strictes ou larges entre des ordinaux, eux-mêmes introduits comme les

[6]cet argument de bon sens n'est pour le moment étayé par aucune démonstration véritable ; on y reviendra au chapitre 3 — comme du reste sur l'ensemble des démonstrations de ce chapitre

uniques ordinaux isomorphes à divers ensembles bien ordonnés. La méthode de démonstration consiste dans la plupart des cas à appliquer le critère suivant. ◀

Lemme 2.3.1. *Supposons que α et β sont deux ordinaux respectivement isomorphes à des ensembles bien ordonnés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.*
(i) Pour montrer $\alpha = \beta$, il suffit de construire une bijection strictement croissante de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$.
(ii) Pour montrer $\alpha < \beta$, il suffit de construire une bijection strictement croissante de $\mathcal{A}$ sur un segment initial de $\mathcal{B}$.
(iii) Pour montrer $\alpha \leqslant \beta$, il suffit de construire une injection strictement croissante de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$.

Démonstration. Le point (*i*) n'est qu'une reformulation de l'unicité dans la proposition 2.2.25. Pour (*ii*), l'existence d'un isomorphisme de $\mathcal{A}$ dans un segment initial de $\mathcal{B}$ entraîne celle d'un isomorphisme de $(\alpha, <)$ sur un segment initial de $(\beta, <)$. Or le segment initial de $(\beta, <)$ déterminé par un élément γ se trouve coïncider, en tant qu'ensemble, avec γ lui-même. Dire que $(\alpha, <)$ est isomorphe au segment initial de $(\beta, <)$ déterminé par γ équivaut donc à dire que α est égal à γ, et on a alors $\alpha = \gamma < \beta$.

Pour (*iii*), une injection croissante de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ fournit par transport une injection croissante, disons f, de $(\alpha, <)$ dans $(\beta, <)$. Si on avait $\beta < \alpha$, l'application f serait une injection croissante de $(\beta, <)$ dans un de ses segments initiaux, contredisant la démonstration du lemme 2.1.11. Donc $\beta < \alpha$ est faux, et, comme l'ordre des ordinaux est un ordre total, la seule possibilité est $\alpha \leqslant \beta$. □

⚒ *On notera que l'existence d'une injection strictement croissante non surjective de $(\alpha, <)$ dans $(\beta, <)$ n'entraîne* pas *$\alpha < \beta$: par exemple, l'application $\alpha \mapsto S(\alpha)$ est une injection strictement croissante non surjective de $(\omega, <)$ dans lui-même, et pourtant on n'a pas $\omega < \omega$. On ne peut conclure à une inégalité stricte que dans le cas particulier où l'image de l'injection est un segment initial du second ordinal.* ⚒

2.3.2. Addition ordinale.

▶ La première, et plus simple, opération est l'addition des ordinaux. Elle ressemble à l'addition des entiers, dont elle est (à isomorphisme près) une extension, mais des différences importantes apparaissent dès qu'on considère les ordinaux infinis. En particulier, l'addition ordinale n'est pas commutative. ◀

Définition 2.3.2 (addition ordinale). Pour α, β ordinaux, on définit $\alpha + \beta$ comme l'unique ordinal γ tel que $(\gamma, \in)$ soit isomorphe à $(\alpha, \in) + (\beta, \in)$.

Exemple 2.3.3 (addition ordinale). Pour n et k entiers, l'ordinal $\tilde{n} + \tilde{k}$ est un ordinal qui a $n + k$ éléments, il s'agit donc nécessairement de l'ordinal $\widetilde{n + k}$: l'application $n \mapsto \tilde{n}$ est un homomorphisme injectif de $(\mathbb{N}, +)$ dans les ordinaux munis de l'addition. Donc, en considérant que l'ordinal $\tilde{n}$ est une copie de l'entier n, on peut dire que l'addition ordinale prolonge l'addition des entiers.

Calculons maintenant $\tilde{1}+\omega$. Il s'agit de déterminer l'unique ordinal γ tel que l'ordre-somme $(\tilde{1},\in)+(\omega,\in)$ soit isomorphe à $(\gamma,\in)$. Or définissons $f : \tilde{1}\amalg\omega \to \omega$ par $f((\tilde{0},1)) = \tilde{0}$ et $f((\xi,2) = S(\xi)$ pour $\xi \in \omega$. L'application f est injective, puisque S l'est, et surjective puisque, par construction, tout élément de ω est soit $\tilde{0}$, soit le successeur d'un élément de ω. Donc f est une bijection. De plus, f est strictement croissante puisque $f((\tilde{0},1))$ vient avant tout élément de la forme $f((\xi,2))$. Par le lemme 2.3.1(i), on déduit l'égalité $\tilde{1}+\omega = \omega$. Cette égalité montre que l'addition des ordinaux n'est *pas* commutative: on a $\tilde{1}+\omega = \omega \neq S(\alpha) = \omega+\tilde{1}$. De même, elle montre que l'addition des ordinaux n'admet pas la simplification à droite: on a $\tilde{1}+\omega = \tilde{0}+\omega$, et pourtant on n'a pas $\tilde{1} = \tilde{0}$.

Proposition 2.3.4 (1). *(i) On a toujours $\alpha+\tilde{0} = \tilde{0}+\alpha = \alpha$. ($ii$) On a toujours $\alpha+\tilde{1} = S(\alpha)$. On a $\tilde{1}+\alpha = S(\alpha)$ pour α fini, et $\tilde{1}+\alpha = \alpha$ pour α infini. (iii) L'addition ordinale est associative: on a toujours $(\alpha+\beta)+\gamma = (\alpha+\beta)+\gamma$.*

Démonstration. (i) L'application f définie par $f(\xi,1) = \xi$ est une bijection de $A\amalg\varnothing$ sur A, et elle est croissante vis-à-vis de l'ordre somme de $(A,<)$ et $(\varnothing,\varnothing)$. Par le lemme 2.3.1($i$), on déduit $\alpha+\tilde{0} = \alpha$. L'argument est similaire pour $\tilde{0}+\alpha$.

(ii) L'application f définie par $f((\xi,1)) = \xi$ pour $\xi \in \alpha$, et $f((\tilde{0},2)) = \alpha$ définit une bijection de $\alpha\amalg\{\tilde{0}\}$, c'est-à-dire de $\alpha\amalg\tilde{1}$, sur $S(\alpha)$. Cette bijection est croissante de $(\alpha,<)+(\tilde{1},<)$ dans $(S(\alpha),<)$, car, dans $(\alpha,<)+(\tilde{1},<)$, l'élément $(\tilde{0},2)$ est placé après tous les éléments $(\xi,1)$, de même que, dans $(S(\alpha),<)$, l'élément α est placé après tous les éléments ξ de α. Toujours par le critère du lemme 2.3.1(i), on déduit $\alpha+\tilde{1} = S(\alpha)$.

Une construction symétrique définissant f de $\tilde{1}\amalg\alpha$ dans $S(\alpha)$ par $f((\tilde{0},1)) = \tilde{0}$ et $f((\xi,2) = S(\xi)$ pour $\xi \in \alpha$ fournit une injection croissante de $(\tilde{1},<)+(\alpha,<)$ dans $(S(\alpha),<)$, mais rien ne permet d'affirmer la surjectivité en général: le lemme 2.3.1(iii) donne seulement $\tilde{1}+\alpha \leqslant S(\alpha)$. On distingue deux cas. Supposons d'abord $\alpha < \omega$, c'est-à-dire α fini. Alors f est surjective, et on déduit $\tilde{1}+\alpha = S(\alpha)$. En effet, l'image de f consiste en $\tilde{0}$ et en tous les ordinaux $S(\xi)$ pour $\xi \in \alpha$, c'est-à-dire en $\tilde{0}$ et en tous les ordinaux successeurs plus petits que $S(\alpha)$: comme α, et $S(\alpha)$, sont finis, tous les ordinaux plus petits que $S(\alpha)$ et distincts de $\tilde{0}$ sont successeurs. Supposons maintenant $\alpha \geqslant \omega$. Alors ω n'appartient pas à l'image de f. Définissons $g : \{\tilde{0}\}\amalg\alpha \to \alpha$ par $g((\tilde{0},1)) = \tilde{0}$, $g((\xi,2) = S(\xi)$ pour $\xi \in \omega$, et $g((\xi,2) = \xi$ pour $\xi \in \alpha$ avec $\xi \geqslant \omega$. Alors g est une bijection croissante, impliquant $\tilde{1}+\alpha = \alpha$.

(iii) Il suffit de montrer que $((\alpha,\in)+(\beta,\in))+(\gamma,\in)$ et $(\alpha,\in)+((\beta,\in)+(\gamma,\in))$ sont isomorphes, ce qui résulte de la proposition 2.1.20. $\square$

Les liens entre l'addition et l'ordre des ordinaux étendent eux aussi ceux qui existent dans le cas des entiers, à ceci près qu'il faut distinguer entre addition à gauche et addition à droite.

Lemme 2.3.5. *Pour α,β ordinaux, $\alpha \leqslant \beta$ est vraie si et seulement il existe δ vérifiant $\alpha+\delta = \beta$.*

Démonstration. Par construction, $(\alpha,\in)$ est un segment initial de $(\alpha,\in)+(\delta,\in)$, donc $\alpha+\delta = \beta$ entraîne $\alpha \leqslant \beta$. Inversement, supposons $\alpha \leqslant \beta$. Alors $(\beta\setminus\alpha,\in)$ est un ensemble bien ordonné, donc il est isomorphe à un ordinal δ. Par construction, $(\alpha,\in)$ est le segment initial de $(\beta,\in)$ déterminé par α, c'est-à-dire qu'on a $\alpha = \{\xi \in \beta\ ;\ \xi < \alpha\}$. Donc, dans l'ordre sur β, tous les éléments de $\beta \setminus \alpha$ sont après tous les éléments de α, ce qui est dire qu'on a $(\beta, \in) \cong (\alpha, \in) + (\beta \setminus \alpha, \in)$, d'où l'égalité $\alpha + \delta = \beta$. □

PROPOSITION 2.3.6 (addition et ordre). (*i*) *Pour chaque ordinal α, l'addition de α à gauche pour l'addition de α est strictement croissante et continue : $\beta < \beta'$ entraîne $\alpha + \beta < \alpha + \beta'$, et, pour λ limite, on a $\alpha + \lambda = \sup_{\beta<\lambda}(\alpha + \beta)$.*
(*ii*) *Pour chaque ordinal β, l'addition de β à droite est non décroissante et semi-continue inférieurement : $\alpha \leqslant \alpha'$ entraîne $\alpha + \beta \leqslant \alpha' + \beta$, et, pour λ limite, on a $\lambda + \beta \geqslant \sup_{\alpha<\lambda}(\alpha + \beta)$.*

DÉMONSTRATION. (*i*) Supposons $\beta < \beta'$. L'application f définie par $f((\xi, 1)) = (\xi, 1)$ pour ξ dans α et $f((\eta, 2)) = (\eta, 2)$ pour η dans β est une injection strictement croissante de $(\alpha, <) + (\beta, <)$ sur le segment initial de $(\alpha, <) + (\beta', <)$ déterminé par $\alpha + \beta$. Par le lemme 2.3.1(*ii*), on déduit $\alpha + \beta < \alpha + \beta'$.

Supposons λ limite. D'après ce qui précède, $\beta < \lambda$ entraîne $\alpha + \beta < \alpha + \lambda$, donc, en passant à la borne supérieure, on a $\sup_{\beta<\lambda}(\alpha + \beta) \leqslant \alpha + \lambda$. Inversement, soit $\xi < \alpha + \lambda$. Alors ou bien on a $\xi < \alpha$, ou bien, par le lemme 2.3.5, il existe δ vérifiant $\xi = \alpha + \delta$. Dans ce cas, $\xi < \alpha + \lambda$ entraîne $\delta < \lambda$: il existe donc β plus petit que λ, à savoir $\beta = \delta$, tel qu'on ait $\xi \leqslant \alpha + \beta$, et on a donc $\alpha + \lambda \leqslant \sup_{\beta<\lambda}(\alpha + \beta)$.

(*ii*) Supposons $\alpha \leqslant \alpha'$. L'application g définie par $g((\xi, 1)) = (\xi, 1)$ pour ξ dans α et $f((\eta, 2)) = (\eta, 2)$ pour η dans β est une injection strictement croissante de $(\alpha, <) + (\beta, <)$ dans $(\alpha', <) + (\beta, <)$. Par le lemme 2.3.1(*iii*), on déduit $\alpha + \beta \leqslant \alpha' + \beta$. Supposons enfin λ limite. D'après ce qui précède, $\alpha < \lambda$ entraîne $\lambda + \beta \geqslant \alpha + \beta$, d'où $\lambda + \beta \geqslant \sup_{\alpha<\lambda}(\alpha + \beta)$. □

☓ *D'après (i), l'addition ordinale admet la simplification à gauche : $\alpha + \beta = \alpha + \beta'$ entraîne $\beta = \beta'$, et, de là, l'ordinal δ du lemme 2.3.5 est unique ; il pourrait être noté $\beta - \alpha$, une option maladroite car α devrait plutôt figurer à gauche de β.* ☓

Les résultats du point (*ii*) sont optimaux : on a $\tilde{0} < \tilde{1}$ mais $\tilde{0} + \omega = \tilde{1} + \omega$, donc $\alpha < \alpha'$ n'entraîne pas $\alpha + \beta < \alpha' + \beta$; de même, on a $\omega + \tilde{1} > \sup_{\alpha<\omega}(\alpha + \omega) = \omega$, donc, pour λ limite, $\lambda + \beta$ n'est pas nécessairement égal à $\sup_{\alpha<\lambda}(\alpha + \beta)$.

La proposition 2.3.6 mène à une caractérisation récursive de l'addition ordinale, ou plus exactement des translations à gauche associées.

COROLLAIRE 2.3.7. *Pour tout ordinal α, la translation à gauche pour l'addition de α, c'est-à-dire l'application $\xi \mapsto \alpha + \xi$, est déterminée par les relations*

(2.3.1)
$$\alpha + \tilde{0} = \alpha, \quad \alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta), \quad \alpha + \lambda = \sup_{\beta<\lambda}(\alpha + \beta) \text{ pour } \lambda \text{ limite.}$$

L'addition ordinale fournit un outil pour nommer facilement de nouveaux ordinaux, et on peut prolonger la description esquissée dans la figure 2.11.

2.3.3. Multiplication ordinale.

► La seconde opération est le produit. La multiplication ordinale prolonge celle des entiers, mais, comme dans le cas de l'addition, des différences importantes apparaissent avec les ordinaux infinis, et, en particulier, la multiplication ordinale n'est ni commutative, ni distributive à droite par rapport à l'addition. ◄

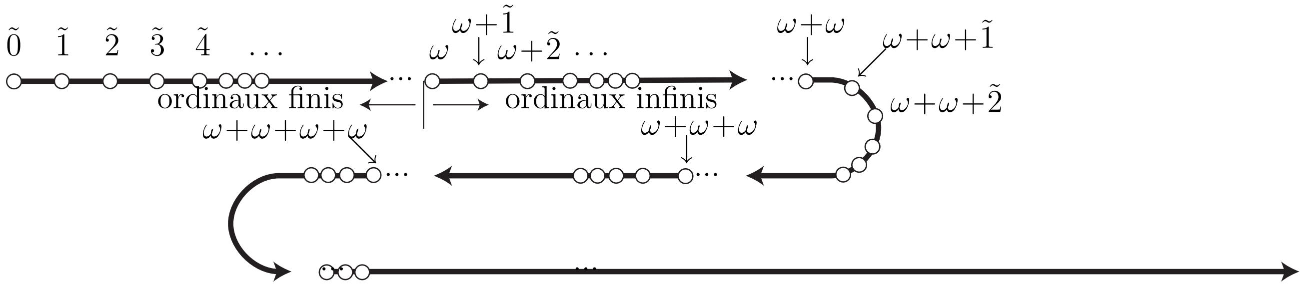

FIGURE 2.12. La suite des ordinaux (3) : l'opération $\xi \mapsto \xi+\omega$ permet de faire des sauts de taille ω inaccessibles à l'opération successeur, par exemple $\omega+\omega$ ou $\omega+\omega+\omega$

DÉFINITION 2.3.8 (multiplication ordinale). Pour α, β ordinaux, on définit $\alpha{\cdot}\beta$ comme l'unique ordinal γ tel que $(\gamma, \in)$ soit isomorphe à $(\alpha, \in) \times (\beta, \in)$.

EXEMPLE 2.3.9 (multiplication ordinale). Pour n et k entiers, l'ordinal $\tilde{n}{\cdot}\tilde{k}$ est un ordinal qui a nk éléments, il s'agit donc nécessairement de l'ordinal $\widetilde{nk}$: l'application $n \mapsto \tilde{n}$ est un homomorphisme injectif de $(\mathbb{N}, \times)$ dans lesordinaux munis du produit. A l'identification de $\tilde{n}$ avec n près, la multiplication ordinale prolonge celle des entiers naturels.

Comme autre exemple, calculons $\tilde{2}{\cdot}\omega$. Il s'agit de ω copies de $\tilde{2}$, c'est-à-dire de $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$, placées bout à bout. Définissons $f : \{\tilde{0}, \tilde{1}\} \times \omega \to \omega$ par $f((\tilde{0}, \xi)) = \xi + \xi$ et $f((\tilde{1}, \xi)) = \xi + \xi + \tilde{1}$. Alors f est une bijection strictement croissante de $(\tilde{2}, <) \times (\omega, <)$ sur $(\omega, <)$. On a donc $\tilde{2}{\cdot}\omega = \omega$.

PROPOSITION 2.3.10 (1). (*i*) *On a toujours* $\alpha{\cdot}\tilde{0} = \tilde{0}{\cdot}\alpha = \tilde{0}$, *et* $\tilde{1}{\cdot}\alpha = \alpha{\cdot}\tilde{1} = \alpha$.
(*ii*) *La multiplication ordinale est associative et distributive à gauche par rapport à l'addition : on a toujours* $(\alpha{\cdot}\beta){\cdot}\gamma = (\alpha{\cdot}\beta){\cdot}\gamma$ *et* $\alpha{\cdot}(\beta + \gamma) = \alpha{\cdot}\beta + \alpha{\cdot}\gamma$.

DÉMONSTRATION. (*i*) Comme les produits cartésiens $\alpha \times \varnothing$ et $\varnothing \times \alpha$ sont vides, les deux premières égalités sont claires. Ensuite, les applications définies par $\xi \mapsto (\xi, \tilde{0}$ et $\xi \mapsto (\tilde{0}, \xi)$ établissent une bijection de α sur $\alpha \times \{\tilde{0}\}$ et $\{\tilde{0}\} \times \alpha$ respectivement. Ces bijections sont strictement croissantes, et on obtient les deux dernières égalités.

Le point (*ii*) est une application directe de la proposition 2.1.24 sur l'addition et la multiplication des ordres. □

Comme on a $\tilde{2} = \tilde{1} + \tilde{1}$, la distributivité de la multiplication entraîne $\alpha{\cdot}\tilde{2} = \alpha + \alpha$ pour tout ordinal α et, inductivement, $\alpha{\cdot}\tilde{n} = \alpha + \cdots + \alpha$, n fois α, pour tout entier n. En particulier, on a $\omega{\cdot}\tilde{2} = \omega + \omega$. Par contre, on a vu qu'on a $\tilde{2}{\cdot}\omega = \omega$. Donc la multiplication ordinale n'est pas commutative ; puisqu'on a

$$(\tilde{1} + \tilde{1}){\cdot}\omega = \tilde{2}{\cdot}\omega = \omega \neq \omega + \omega = \tilde{1}{\cdot}\omega + \tilde{1}{\cdot}\omega,$$

et donc la multiplication ordinale n'est pas non plus distributive à droite par rapport à l'addition.

Grâce à la multiplication ordinale, on peut enrichir à nouveau le schéma de la suite des ordinaux illustré la figure 2.12.

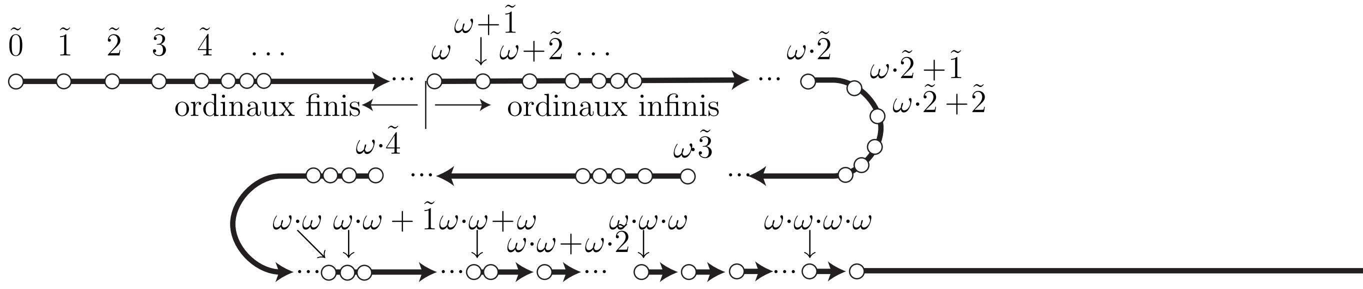

FIGURE 2.13. La suite des ordinaux (4) : noter qu'on a $\omega{\cdot}\tilde{2} = \omega + \omega$, $\omega{\cdot}\tilde{3} = \omega + \omega + \omega$, *etc.* L'opération $\xi \mapsto \xi{\cdot}\omega$ permet de faire des sauts encore plus grands, et d'atteindre des ordinaux inaccessibles à l'addition, comme $\omega{\cdot}\omega$ ou $\omega{\cdot}\omega{\cdot}\omega$

2.3.4. Division euclidienne.

► Même si, par certains côtés, elles diffèrent beaucoup de l'addition et de la multiplication des entiers, l'addition et la multiplication des ordinaux donnent lieu à une division euclidienne tout à fait analogue. ◄

On commence par un énoncé préliminaire qui sera précisé plus loin.

LEMME 2.3.11. *Pour tout ordinal γ vérifiant $\gamma < \alpha{\cdot}\beta$, il existe un couple d'ordinaux (ρ, σ) avec $\rho < \alpha$ et $\sigma < \beta$ vérifiant $\gamma = \alpha{\cdot}\sigma + \rho$.*

DÉMONSTRATION. Le résultat étant vide pour $\alpha = \tilde{0}$, on suppose $\alpha > \tilde{0}$. Par définition, il existe un isomorphisme f de $(\alpha, \in) \times (\beta, \in)$ sur $(\alpha{\cdot}\beta, \in)$. Soit γ un ordinal plus petit que $\alpha{\cdot}\beta$, donc, par construction, un élément de $\alpha{\cdot}\beta$. Posons $(\rho, \sigma) = f^{-1}(\gamma)$. Par construction, on a $\rho < \alpha$ et $\sigma < \beta$. Toujours par construction, $(\gamma, \in)$ est le segment initial de $(\alpha{\cdot}\beta, \in)$, et il est donc isomorphe au segment initial de $(\alpha, \in) \times (\beta, \in)$ déterminé par (σ, ρ). Par définition de l'ordre-produit, ce segment initial consiste en les couples (ξ, η) vérifiant $\xi < \alpha$ et $\eta < \sigma$, suivis par les couples (σ, η) vérifiant $\eta < \rho$. Il est donc isomorphe à l'ordinal $\alpha{\cdot}\sigma + \rho$. On a donc égalité des ordinaux γ et $\alpha{\cdot}\sigma + \rho$. □

Une première application est l'étude de la compatibilité de la multiplication ordinale avec l'ordre.

PROPOSITION 2.3.12 (multiplication et ordre). (i) *Pour chaque ordinal α distinct de $\tilde{0}$, la multiplication par α à gauche est strictement croissante et continue : $\beta < \beta'$ entraîne $\alpha{\cdot}\beta < \alpha{\cdot}\beta'$, et, pour λ limite, on a $\alpha{\cdot}\lambda = \sup_{\beta<\lambda} \alpha{\cdot}\beta$.*
(ii) *Pour chaque ordinal β, la multiplication par β à droite est non décroissante et semi-continue inférieurement : $\alpha \leqslant \alpha'$ entraîne $\alpha{\cdot}\beta \leqslant \alpha'{\cdot}\beta$, et, pour λ limite, on a $\lambda{\cdot}\beta \geqslant \sup_{\alpha<\lambda} \alpha{\cdot}\beta$.*

DÉMONSTRATION. (i) Supposons $\alpha \geqslant \tilde{1}$ et $\beta < \beta'$. L'application identité sur $\alpha \times \beta$ définit un isomorphisme de $((\alpha, <) \times (\beta, <))$ sur le segment initial de $(\alpha, <) \times (\beta', <)$ déterminé par $(\tilde{0}, \beta)$. Par le lemme 2.3.1(ii), on en déduit $\alpha{\cdot}\beta < \alpha{\cdot}\beta'$.

Supposons λ limite. Le résultat précédent entraîne $\alpha{\cdot}\lambda \geqslant \sup_{\beta<\lambda} \alpha{\cdot}\beta$. Inversement, supposons $\xi < \alpha{\cdot}\lambda$. Par le lemme 2.3.11, il existe un couple (ρ, σ) dans $\alpha \times \lambda$ vérifiant $\xi = \alpha{\cdot}\sigma + \rho$.

On a donc

$$\xi = \alpha{\cdot}\sigma + \rho < \alpha{\cdot}\sigma + \alpha = \alpha{\cdot}\sigma + \alpha{\cdot}\tilde{1} = \alpha{\cdot}(\sigma + \tilde{1}) = \alpha{\cdot}S(\sigma),$$

ce qui montre qu'il existe β plus petit que λ, à savoir $\beta = S(\sigma)$, vérifiant $\xi \leqslant \alpha{\cdot}\beta$. On a donc $\alpha{\cdot}\lambda \leqslant \sup_{\beta<\lambda} \alpha{\cdot}\beta$.

(ii) Supposons $\alpha \leqslant \alpha'$. L'application identité sur $\alpha \times \beta$ définit une injection strictement croissante de $((\alpha, <) \times (\beta, <))$ dans $(\alpha', <) \times (\beta, <)$. Par le lemme 2.3.1($iii$), on en déduit $\alpha{\cdot}\beta \leqslant \alpha'{\cdot}\beta$. Pour λ limite, on déduit $\alpha{\cdot}\lambda \geqslant \sup_{\beta<\lambda} \alpha{\cdot}\beta$. □

Une conséquence du point (i) est que la multiplication ordinale restreinte aux ordinaux non nuls admet la simplification à gauche : $\alpha{\cdot}\beta = \alpha{\cdot}\beta'$ entraîne $\beta = \beta'$ pour $\alpha \neq \tilde{0}$.

Comme dans le cas de l'addition, le point (ii) est optimal : on a $\tilde{0} < \tilde{1} < \tilde{2}$ et $\tilde{1}{\cdot}\omega = \tilde{2}{\cdot}\omega = \omega$, donc $\tilde{0} < \alpha < \alpha'$ n'entraîne pas $\alpha{\cdot}\beta < \alpha'{\cdot}\beta$ en général ; de même, pour λ limite, $\lambda{\cdot}\beta$ n'est pas nécessairement égal à $\sup_{\alpha<\lambda} \alpha{\cdot}\beta$.

Une autre application est une caractérisation récursive des translations à gauche associées à la multiplication ordinale.

Corollaire 2.3.13. *Pour tout ordinal α, la translation à gauche pour la multiplication par α, c'est-à-dire l'application $x \mapsto \alpha{\cdot}x$, est déterminée par les relations*

$$(2.3.2) \qquad \alpha{\cdot}\tilde{0} = \tilde{0}, \quad \alpha{\cdot}S(\beta) = \alpha{\cdot}\beta + \alpha, \quad \alpha{\cdot}\lambda = \sup_{\beta<\lambda}(\alpha{\cdot}\beta) \text{ pour } \lambda \text{ limite.}$$

On peut alors établir l'unicité des ordinaux mis en jeu dans le lemme 2.3.11, et déduire l'énoncé optimal pour la division euclidienne des ordinaux, analogue complet à la division euclidienne des entiers :

Proposition 2.3.14 (division). *Pour tout ordinal β, et tout ordinal non nul α, il existe un unique couple d'ordinaux (ρ, σ) vérifiant $\beta = \alpha{\cdot}\sigma + \rho$ avec $\rho < \alpha$; on a de plus $\sigma \leqslant \beta$.*

Démonstration. Par la proposition 2.3.12(ii), $\tilde{1} \leqslant \alpha$ implique $\beta = \tilde{1}{\cdot}\beta \leqslant \alpha{\cdot}\beta < \alpha{\cdot}S(\beta)$. Appliquant le lemme 2.3.11, on obtient l'existence de (ρ, σ) vérifiant $\beta = \alpha{\cdot}\sigma + \rho$ avec $\rho < \alpha$. On obtient de plus $\sigma \leqslant \alpha{\cdot}\sigma \leqslant \alpha{\cdot}\sigma + \rho = \beta$, donc nécessairement $\sigma \leqslant \beta$.

Reste à montrer l'unicité. Considérons deux ordinaux $\alpha{\cdot}\sigma + \rho$ et $\alpha{\cdot}\sigma' + \rho'$ avec $\rho, \rho' < \alpha$. Supposons $\sigma < \sigma'$, donc $\sigma + \tilde{1} \leqslant \sigma'$. On déduit des propositions 2.3.6 et 2.3.12

$$\alpha{\cdot}\sigma + \rho < \alpha{\cdot}\sigma + \alpha = \alpha{\cdot}(\sigma + \tilde{1}) \leqslant \alpha{\cdot}\sigma' \leqslant \alpha{\cdot}\sigma' + \rho',$$

donc $\alpha{\cdot}\sigma + \rho \neq \alpha{\cdot}\sigma' + \rho'$. L'argument est symétrique pour $\sigma > \sigma'$. Supposons maintenant $\sigma = \sigma'$ et $\rho < \rho'$. Il vient directement $\alpha{\cdot}\sigma + \rho < \alpha{\cdot}\sigma + \rho' = \alpha{\cdot}\sigma' + \rho'$, donc à nouveau $\alpha{\cdot}\sigma + \rho \neq \alpha{\cdot}\sigma' + \rho'$, et de même pour $\rho > \rho'$. □

Noter que, dans la division ordinale, le quotient σ n'est pas nécessairement plus petit que le dividende β : la division de ω par $\tilde{2}$ est $\omega = \tilde{2}{\cdot}\omega + \tilde{0}$, avec un quotient ω égal au dividende, et un reste nul.

2.3.5. Exponentiation ordinale.

▶ On termine avec l'exponentiation. ◀

Définition 2.3.15 (exponentiation ordinale). Pour α, β ordinaux, on définit α^β comme l'unique ordinal γ tel que $(\gamma, \in)$ soit isomorphe à $(\alpha, \in)^{(\beta,\in)}$.

Exemple 2.3.16 (exponentiation ordinale). Pour n, k entiers, $\tilde{k}$ est un ensemble fini, et $\tilde{n}^{(\tilde{k})}$ est l'ensemble de toutes les applications de $\tilde{k}$ dans $\tilde{n}$, est a donc n^k éléments. On a donc nécessairement $\tilde{n}^{\tilde{k}} = \widetilde{n^k}$: l'exponentiation ordinale prolonge l'exponentiation des entiers.

Calculons $\tilde{2}^\omega$. Il s'agit de déterminer l'unique ordinal isomorphe à $(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, <)^{(\omega,<)}$. Le domaine est ici l'ensemble des fonctions de ω dans $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ à support fini, c'est-à-dire valant $\tilde{1}$ pour un nombre fini de valeurs, et l'ordre est l'ordre lexicographique inverse. Par construction, la fonction constante $c_{\tilde{0}}$ de valeur $\tilde{0}$ est le plus élément. Si f, g sont distinctes de $c_{\tilde{0}}$, et si, avec les notations de la démonstration de la proposition 2.1.27, on a $s_1(f) < s_1(g)$, c'est-à-dire si le plus grand élément du support de f est plus petit que le plus petit élément du support de g, alors on a $f < g$ par définition. Pour chaque élément $\tilde{n}$ de ω, le nombre de fonctions f de ω dans $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ vérifiant $s_1(f) = \tilde{n}$ est égal à 2^n. Il en résulte, classées par ordre croissant, les fonctions de ω dans $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ à support fini sont d'abord $c_{\tilde{0}}$, puis l'unique fonction dont le s_1 vaut $\tilde{0}$, puis les 2 fonctions dont le s_1 vaut $\tilde{1}$, puis les 4 fonctions dont le s_1 vaut $\tilde{2}$, les 8 fonctions dont le s_1 vaut $\tilde{3}$ *etc.* L'ordre ainsi obtenu est celui de ω, et on a donc la valeur $\tilde{2}^\omega = \omega$.

Proposition 2.3.17 (1). (i) *On a toujours* $\alpha^{\tilde{0}} = \tilde{1}$, $\alpha^{\tilde{1}} = \alpha$, *et* $\tilde{1}^\beta = \tilde{1}$; *pour* $\beta \neq \tilde{0}$, *on a* $\tilde{0}^\beta = \tilde{0}$.
(ii) *On a toujours* $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$ *et* $\alpha^{\beta\cdot\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$.

Démonstration. (i) Il existe une seule application (à support fini) de $\varnothing$ dans α, à savoir l'application vide. L'ensemble $\alpha^{(\tilde{0})}$ est un singleton, et donc $(\alpha^{(\tilde{0})}, \in)$ est isomorphe à $(\tilde{1}, \in)$. L'application $f \mapsto f(\tilde{0})$ établit une bijection de $\alpha^{(\tilde{1})}$ sur α, et, par définition des ordres, elle est strictement croissante, d'où $\alpha^{\tilde{1}} = \alpha$. Ensuite, il existe une seule application (à support fini) de β dans $\tilde{1}$, à savoir l'application constante de valeur $\tilde{0}$. On a donc toujours $\tilde{1}^\beta = \tilde{1}$, puisque $\tilde{1}$ est le seul ordinal à un élément. Enfin, si β n'est pas vide, il n'existe aucune application de β vers l'ensemble vide, donc on doit avoir $\tilde{0}^\beta = \tilde{0}$.

Le point (ii) est conséquence directe de la proposition 2.1.28. □

Partant de (ii), une induction immédiate donne pour tout entier n l'égalité $\alpha^{\tilde{n}} = \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha$, avec n fois α. Comme dans le cas de l'addition et de la multiplication ordinales, on étudie le comportement de l'exponentiation vis-à-vis de l'ordre.

Proposition 2.3.18 (1). (i) *Pour chaque ordinal* α *distinct de* $\tilde{0}$ *et* $\tilde{1}$, *l'exponentiation de base* α *est strictement croissante et continue :* $\beta < \beta'$ *entraîne* $\alpha^\beta < \alpha^{\beta'}$, *et, pour* λ *limite, on a* $\alpha^\lambda = \sup_{\beta<\lambda} \alpha^\beta$.
(ii) *Pour chaque ordinal* β, *l'exponentiation d'exposant* β *est non décroissante et*

semi-continue inférieurement : $\alpha \leqslant \alpha'$ entraîne $\alpha^\beta \leqslant {\alpha'}^\beta$, et, pour λ limite, on a $\lambda^\beta \geqslant \sup_{\alpha<\lambda} \alpha^\beta$.

Démonstration. (i) Supposons $\alpha \geqslant \tilde{2}$ et $\beta < \beta'$. L'application F définie par $F(f) = f{\restriction}_\beta$ définit un isomorphisme de $(\alpha,<)^{(\beta,<)}$ sur le segment initial de $(\alpha,<)^{(\beta',<)}$ déterminé par la fonction valant $\tilde{1}$ en β et $\tilde{0}$ partout ailleurs. Par le lemme 2.3.1(ii), on déduit $\alpha^\beta < \alpha^{\beta'}$.

Supposons λ limite. Par ce qui précède, $\beta < \lambda$ entraîne $\alpha^\beta < \alpha^\lambda$, donc on a $\alpha^\lambda \geqslant \sup_{\beta<\lambda} \alpha$ b. Inversement, supposons $\xi < \alpha^\lambda$. Il s'agit de montrer qu'il existe $\beta < \lambda$ tel qu'on ait $\xi < \alpha^\beta$, c'est-à-dire encore que, pour toute fonction à support fini f de λ dans α, le segment initial de $\alpha^{(\lambda)}$ déterminé par f peut être plongé dans un segment initial d'un ordinal α^β avec $\beta < \lambda$. Or, soit f une telle fonction. Le plus grand élément du support de f est un élément de λ, et, comme λ est limite, il existe β vérifiant $\beta < \lambda$ et tel que tout élément du support de f soit plus petit que β. L'application qui à toute fonction de λ dans α plus petite que f associe sa restriction à β est injective, car toute telle fonction a un support inclus dans β. On obtient ainsi une isomorphisme entre le segment initial déterminé par f et un segment initial d'un ordinal α^β avec $\beta < \lambda$, comme souhaité.

(ii) Supposons $\alpha \leqslant \alpha'$. L'application identité de $\alpha^{(\beta)}$ dans ${\alpha'}^{(\beta)}$ définit une injection croissante de $(\alpha,<)^{(\beta,<)}$ dans $(\alpha',<)^{(\beta,<)}$, et on déduit $\alpha^\beta \leqslant {\alpha'}^\beta$ par le lemme 2.3.1(iii). □

Le point (i) entraîne que l'exponentielle de base $\tilde{2}$ au moins est injective : pour $\alpha \geqslant \tilde{2}$, la relation $\alpha^\beta = \alpha^{\beta'}$ entraîne $\beta = \beta'$. Les résultats de (ii) sont optimaux : on a $\tilde{2} < \tilde{4}$ et $\tilde{4}^\omega = (\tilde{2}^{\tilde{2}})^\omega = \tilde{2}^{\tilde{2}\cdot\omega} = \tilde{2}^\omega$ (et la valeur commune est ω), donc $\alpha < \alpha'$ n'entraîne pas $\alpha^\beta < {\alpha'}^\beta$ en général. De même, on a $\omega^\omega > \omega^\beta$ pour tout ordinal fini β, donc en particulier $\omega^\omega > \omega$, alors qu'on a $\sup_{\alpha<\omega} \alpha^\omega = \omega$.

Corollaire 2.3.19. *Pour tout ordinal α, la translation à gauche $x \mapsto \alpha^x$ est déterminée par les relations*

$$\alpha^{\tilde{0}} = \tilde{1}, \quad \alpha^{S(\beta)} = \alpha^\beta{\cdot}\alpha, \quad \alpha^\lambda = \sup_{\beta<\lambda}(\alpha^\beta) \text{ pour } \lambda \text{ limite.} \tag{2.3.3}$$

Grâce à l'exponentiation, on peut allonger une nouvelle fois le schéma de la suite des ordinaux.

2.3.6. Ordinaux non dénombrables.

► Les opérations arithmétiques ordinales permettent de spécifier des ordinaux transfinis de plus en plus grands, par exemple ω, ω^ω, ω^{ω^ω}, *etc.* L'opération de passage à la borne supérieure permet d'aller plus loin, par exemple en introduisant l'ordinal

$$\varepsilon_0 = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots\},$$

qui apparaît gigantesque. Pour autant, tous les ordinaux précédents, y compris ε_0, restent relativement petits puisque, en tant qu'ensembles, ils sont dénombrables. En effet, les arguments rappelés au chapitre 1 montrent que, si A et B sont des ensembles dénombrables, il en est de même des ensembles $A \amalg B$, $A \times B$, et $A^{(B)}$. Par contre, de même qu'elle a permis d'introduire l'ordinal ω comme borne supérieure de tous les ordinaux finis, la proposition 2.2.16 permet d'introduire des ordinaux non dénombrables qui dominent tous les ordinaux dénombrables. ◄

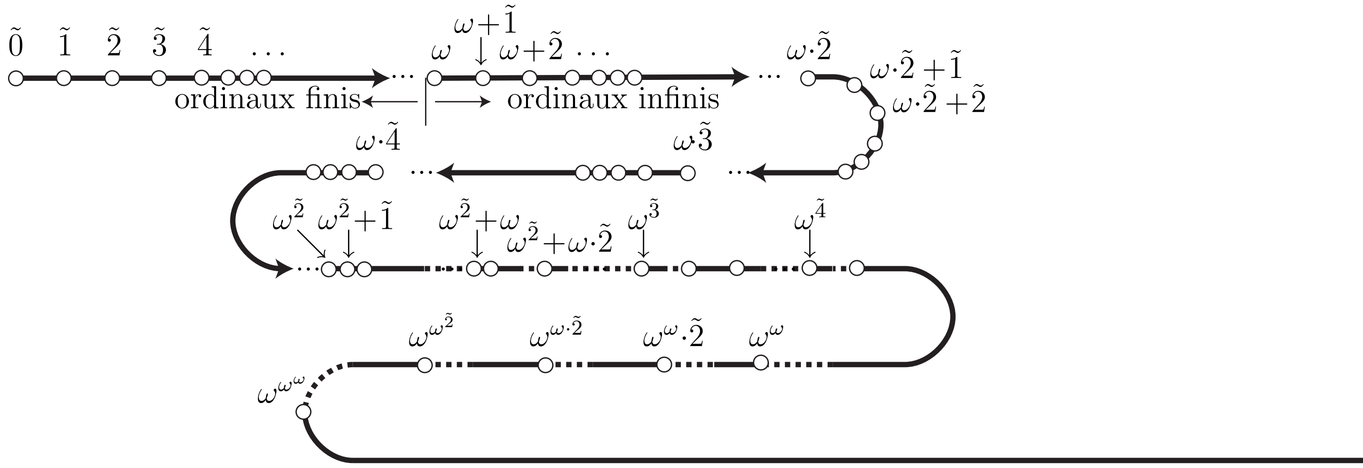

FIGURE 2.14. La suite des ordinaux (5) ; on a $\omega^{\tilde{2}} = \omega{\cdot}\omega$, $\omega^{\tilde{3}} = \omega{\cdot}\omega{\cdot}\omega$, *etc.* L'opération $\xi \mapsto \xi^{\omega}$ permet d'atteindre des ordinaux inaccessibles à l'addition et à la multiplication, comme ω^{ω} ou $\omega^{\omega^{\omega}}$

PROPOSITION 2.3.20 (non injection). *Pour chaque ordinal infini α, l'ensemble des ordinaux s'injectant dans α est un ordinal, et c'est le plus petit ordinal qui ne s'injecte pas dans α.*

DÉMONSTRATION. Soit A l'ensemble des ordinaux s'injectant dans α, c'est-à-dire en bijection avec α ou avec un ordinal inférieur à α. Posons $\beta = \bigcup A$. Alors β est un ordinal. Par hypothèse, A contient au moins un ordinal infini, à savoir α. Si θ est un ordinal infini, l'application définie par $f(\tilde{0}) = \alpha$, $f(\tilde{n}) = (n-1)\tilde{}$ pour $n \geqslant 1$ et $f(\xi) = \xi$ pour $\xi \geqslant \omega$ est une bijection de θ sur $S(\theta)$. Donc $\theta \in A$ entraîne $S(\theta) \in A$. Par conséquent, A n'a pas de plus grand élément, et $\theta \in A$ entraîne $\theta < \beta$. S'il existait une injection de β dans α, alors β serait dans A, et on aurait donc $\beta < \bigcup A = \beta$, ce qui est impossible. □

NOTATION 2.3.21. On pose $\omega_0 = \omega$, puis, de proche en proche, on définit ω_{n+1} comme le plus petit ordinal qui ne s'injecte pas dans ω_n.

Par exemple, ω_1 est le plus petit ordinal qui ne s'injecte pas dans ω, c'est-à-dire n'est ni fini, ni dénombrable. Par la proposition ci-dessus, ω_1 est la borne supérieure de l'ensemble des ordinaux finis ou dénombrables. Comme tout ordinal fini est inférieur à tout ordinal dénombrable, ω_1 est également la borne supérieure de l'ensemble des ordinaux dénombrables. De même, ω_2 est la borne supérieure de l'ensemble des ordinaux s'injectant dans ω_1, lesquels se composent des ordinaux finis, suivis des ordinaux dénombrables, suivis des ordinaux en bijection avec ω_1. Par conséquent, ω_2 est aussi la borne supérieure des ordinaux en bijection avec ω_1.

Reprenant une dernière fois le schéma de la suite des ordinaux, on peut donc encore le prolonger.

2.4. Deux applications

► Les ordinaux et leur arithmétique constituent une extension de l'arithmétique, un prolongement au-delà du fini de la suite des entiers naturels.

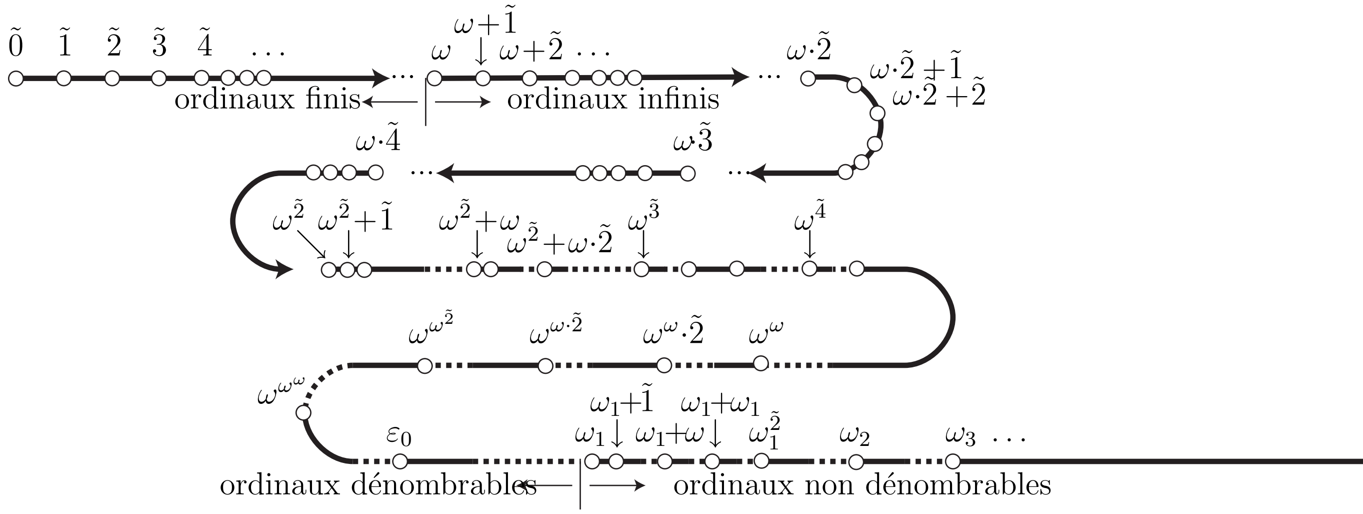

FIGURE 2.15. La suite des ordinaux (6) : au-delà de tous les ordinaux dénombrables commencent les ordinaux non dénombrables, inaccessibles par les opérations arithmétiques : ω_1, ω_2, ...

La possibilité de compter avec des nombres transfinis — et surtout de le faire en préservant la propriété de bon ordre qui fonde les récurrences — mène à des arguments et des résultats nouveaux. Ceci apparaîtra souvent dans la suite de ce texte où les ordinaux jouent un rôle fondamental. Pour le moment, on mentionne ici deux applications directes des ordinaux, le théorème de Cantor-Bendixson en topologie et le théorème de Goodstein en arithmétique. ◀

2.4.1. Le théorème de Cantor-Bendixson.

▶ Démontré en 1883 par Cantor et par Bendixson, le théorème concerne les sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}$ — et plus généralement de tout espace métrique séparable et complet — et leurs points d'accumulation. La démonstration utilisant les ordinaux est spécialement naturelle. ◀

DÉFINITION 2.4.1 (parfait). Un espace topologique est dit *parfait* si tout point est point d'accumulation.

PROPOSITION 2.4.2 (théorème de Cantor–Bendixson). *Tout fermé de $\mathbb{R}$ est réunion d'un ensemble parfait et d'un ensemble fini ou dénombrable.*

DÉMONSTRATION. Pour X inclus dans $\mathbb{R}$, notons ∂X l'ensemble des points d'accumulation de X. Si X est fermé, on a $\partial X \subseteq X$, et dire que X est parfait signifie qu'on a $\partial X = X$. Fixons une numérotation $U_1, U_2, ...$ des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ à extrémités rationnelles, et, pour x dans $X \setminus \partial X$, posons $p(x, X) := \inf\{p\ ;\ U_p \cap X = \{x\}\}$. Alors $x \mapsto p(x, X)$ est injective puisque, pour $y \neq x$, on a $x \in U_{p(x,X)}$ et $y \notin U_{p(x,X)}$. Il en résulte que $X \setminus \partial X$ est au plus dénombrable.

Soit F un fermé. On construit par récurrence une suite de fermés de $\mathbb{R}$ indexée par les ordinaux en posant[7]

$$F_{\tilde{0}} := F, \quad F_{\alpha+\tilde{1}} := \partial F_\alpha, \quad F_\lambda := \bigcap_{\alpha<\lambda} F_\alpha \quad \text{pour } \lambda \text{ limite.}$$

Comme F est fermé, la suite est décroissante pour l'inclusion (au sens large). Pour chaque ordinal α tel que $F_\alpha \setminus F_{\alpha+\tilde{1}}$ soit non vide, soit $p(\alpha) := \inf\{p(x, F_\alpha) \ ; \ x \in F_\alpha \setminus F_{\alpha+\tilde{1}}\}$. Supposons $\alpha < \beta$, et $p(\alpha), p(\beta)$ définis. Comme F_β est inclus dans $F_{\alpha+\tilde{1}}$, aucun des points de F_β n'est dans $F_\alpha \setminus F_{\alpha+\tilde{1}}$, donc on a certainement $p(\beta) \neq p(\alpha)$, et donc la famille des ordinaux α vérifiant $F_\alpha \setminus F_{\alpha+\tilde{1}} \neq \varnothing$ est au plus dénombrable. Par conséquent, il existe un ordinal dénombrable θ vérifiant $F_\theta = F_{\theta+\tilde{1}}$, c'est-à-dire $F_\theta = \partial F_\theta$. On a alors $F = F_\theta \cup \bigcup_{\alpha<\theta}(F_\alpha \setminus F_{\alpha+\tilde{1}})$. Par construction, F_θ est parfait, tandis que le second terme, union dénombrable d'ensembles dénombrables, est dénombrable. □

☓ *Le théorème de Cantor–Bendixson montre que l'hypothèse du continu est vraie pour les fermés. En effet, il est facile de vérifier qu'un sous-ensemble parfait de* $\mathbb{R}$ *est en bijection avec* $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$*, donc avec* $\mathbb{R}$*. Par conséquent, si* F *est un fermé de* $\mathbb{R}$*, il s'écrit* $F = P \cup D$ *avec* P *parfait et* D *fini ou dénombrable : ou bien* P *est vide, et* F *est au plus dénombrable, ou bien* P *est non vide, et* F *est en bijection avec* $\mathbb{R}$*.* ☓

2.4.2. Suites de Goodstein.

► On passe à l'arithmétique des nombres entiers. Les suites de Goodstein sont des suites d'entiers définies par une récurrence simple et dont le comportement sur les premières valeurs suggère une croissance très rapide. Pourtant, un résultat très paradoxal affirme que toute suite de Goodstein finit par s'annuler, une conséquence directe du fait que la suite des ordinaux est bien ordonnée. ◄

Ecrire un entier n en base p consiste à décomposer n sous forme d'une somme décroissante

$$n = p^{n_1} \cdot c_1 + \cdots + p^{n_k} \cdot c_k$$

où les chiffres c_i sont compris entre 1 et $p-1$, et où les exposants e_i sont des entiers, nécessairement strictement inférieurs à n. On peut alors exprimer les exposants n_i eux-mêmes en base p, et itérer le processus. On appellera représentation de n *en base* p *itérée* la décomposition ainsi obtenue: par définition, il s'agit d'exprimer n au moyen des entiers 1 à $p-1$, de la somme, des $p-1$ multiplications par 1, ... , $p-1$, et de l'exponentiation de base p.

Exemple 2.4.3 (base p itérée). Soit $n = 26$. La décomposition de n en base 2 est $26 = 2^4 + 2^3 + 2^1$: la décomposition de 4 est $4 = 2^2$, celle de 3 est $3 = 2^1 + 1$,

[7] On a montré que les ordinaux forment une suite bien ordonnée, ce qui légitime le principe des démonstrations par induction ordinale ; on utilise ci-après une construction par récursion ordinale, dont la légitimité découle, mais au prix d'une vérification qui ne sera donnée qu'au chapitre 3 ; la démonstration en cours est donc anachronique.

et, finalement, la décomposition de 26 en base 2 itérée est $2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1$. De même, sa décomposition en base 3 itérée est $3^2{\cdot}2 + 3{\cdot}2 + 2$ [8].

Définition 2.4.4 (suites de Goodstein). (*i*) Pour $q \geqslant p \geqslant 2$, on définit $f_{p,q}$ fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ comme suit : $f_{p,q}(n)$ est l'entier obtenu en formant la décomposition de n en base p itérée, en y remplaçant partout p par q, et en évaluant le résultat.

(*ii*) Pour chaque entier a, on définit une suite d'entiers $g_2(a), g_3(a), \ldots$ en partant de $g_2(a) := a$ puis en posant inductivement

$$g_{p+1}(a) = f_{p,p+1}(g_p(a)) - 1$$

si $g_p(a)$ est non nul, et $g_{p+1}(a) = 0$ si $g_p(a)$ est nul.

Exemple 2.4.5 (suites de Goodstein). Pour les fonctions $f_{p,q}$, on trouve par exemple :

$f_{3,4}(26) = f_{3,4}(2{\cdot}3^2 + 2{\cdot}3 + 2) = 2{\cdot}4^2 + 2{\cdot}4 + 2 = 42,$

$f_{2,3}(26) = f_{2,3}(2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1) = 3^{3^{3^1}} + 3^{3^1+1} + 3^1 = 3^9 + 3^4 + 3 = 19767.$

Considérons alors la suite de Goodstein pour $a = 5$. On part de $g_2(5) = 5 = 2^{2^1}+1$. On a ensuite $g_3(5) = f_{2,3}(5) - 1 = (3^{3^1} + 1) - 1 = 27 = 3^{3^1}$, puis, successivement,

$g_4(5) = f_{3,4}(27) - 1 = (4^{4^1}) - 1 = 255 = 4^3{\cdot}3 + 4^2{\cdot}3 + 4^1{\cdot}3 + 3,$

$g_5(5) = f_{4,5}(255) - 1 = (5^3{\cdot}3 + 5^2{\cdot}3 + 5^1{\cdot}3 + 3) - 1 = 447 = 5^3{\cdot}3 + 5^2{\cdot}3 + 5^1{\cdot}3 + 2,$

$g_6(5) = f_{5,6}(447) - 1 = (6^3{\cdot}3 + 6^2{\cdot}3 + 6^1{\cdot}3 + 2) - 1 = 775 = 6^3{\cdot}3 + 6^2{\cdot}3 + 6^1{\cdot}3 + 1,$

et la suite des $g_p(5)$ continue ainsi à croître résolument.

Et, pourtant, on a le résultat suivant :

Proposition 2.4.6 (théorème de Goodstein). *Pour tout entier a, la suite des entiers $g_p(a)$ converge vers 0 : il existe un entier p vérifiant $g_p(a) = 0$.*

Démonstration. L'argument est extrêmement simple à partir du moment où on peut utiliser l'arithmétique ordinale. Pour cela, nous introduisons, pour chaque entier p, une fonction $f_{p,\omega}$ de $\mathbb{N}$ dans les ordinaux sur le modèle de $f_{p,q}$: $f_{p,\omega}$ est l'ordinal obtenu en écrivant n en base p itérée, puis en remplaçant chaque entier k plus petit que p par $\tilde{k}$ et chaque entier p par ω. Ainsi, par exemple, on a

$$f_{2,\omega}(26) = f_{2,\omega}(2^{2^2} + 2^{2+1} + 2) = \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega+1} + \omega.$$

Supposons démontré que chaque application $f_{p,\omega}$ est croissante. Pour $p \geqslant 2$, on pose $\widetilde{g}_p(a) = f_{p,\omega}(g_p(a))$. Pour chaque entier a, on a ainsi une suite d'ordinaux $\widetilde{g}_2(a), \widetilde{g}_3(a), \ldots$. Or, par contruction, on a, pour tout p tel que $g_p(a)$ soit non nul,

$$\begin{aligned}\widetilde{g}_{p+1}(a) = f_{p+1,\omega}(g_{p+1}(a)) &= f_{p+1,\omega}(f_{p,p+1}(g_p(a)) - 1)\\ &< f_{p+1,\omega}(f_{p,p+1}(g_p(a))) = f_{p,\omega}(g_p(a)) = \widetilde{g}_p(a).\end{aligned}$$

En effet, pour tout n, on a $f_{p+1,\omega}(f_{p,p+1}(n)) = f_{p,\omega}(n)$, de même que, plus généralement et par construction, on a $f_{q,r}(f_{p,q}(n)) = f_{p,r}(n)$ quels que soient p, q, r. Comme il n'existe pas

[8] Pour 2, on a écrit 2^1 dans le cas de la base 2 itérée, car 2 n'est pas un chiffre en base 2, alors qu'on a écrit simplement 2 dans le cas de la base 3, car 2 est alors un chiffre, c'est-à-dire un entier plus petit que la base choisie

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{g}_2(a) \arrow[r, equal] & \widetilde{g}_2(a) \arrow[r, ">"] & \widetilde{g}_3(a) \arrow[r, equal] & \widetilde{g}_3(a) \arrow[r, ">"] & \widetilde{g}_4(a) \arrow[r, equal] & \cdots \\
g_2(a) \arrow[u, "f_{2,\omega}"] \arrow[r, "f_{2,3}"'] & \bullet \arrow[u, "f_{3,\omega}"] \arrow[r, "-1"'] & g_3(a) \arrow[u, "f_{3,\omega}"] \arrow[r, "f_{3,4}"'] & \bullet \arrow[u, "f_{4,\omega}"] \arrow[r, "-1"'] & g_4(a) \arrow[u, "f_{4,\omega}"] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

FIGURE 2.16. Démonstration du théorème de Goodstein : en bas, les entiers, en haut, leurs images chez les ordinaux infinis, qui gomment les changements de base ; ne restent alors que les -1 qui forcent la décroissante aussi longtemps que 0 n'est pas atteint.

de suite infinie décroissante d'ordinaux, il doit exister un entier p tel que $g_p(a)$ soit nul (*cf.* figure 2.16. □

Il ne reste donc qu'à montrer le résultat auxiliaire suivant :

LEMME 2.4.7. *Pour tout p et tout n, on a $f_{p,\omega}(n) < f_{p,\omega}(n+1)$.*

DÉMONSTRATION. On fixe p au moins égal à 2, et on montre le résultat par induction sur n. Pour $n = 0$, on a $f_{p,\omega}(n) = \tilde{0}$, et $f_{p,\omega}(n+1) = \tilde{1}$, donc le résultat est vrai. Supposons $n > 0$. Décomposons n sous la forme

$$n = p^{n-1}\cdot c_{n-1} + \cdots + p^1\cdot c_1 + p^0\cdot c_0,$$

où les coefficients c_k sont compris entre 0 et $p-1$. Par définition, on a

$$f_{p,\omega}(n) = \omega^{f_{p,\omega}(n-1)}\cdot\tilde{c}_{n-1} + \cdots + \omega^{f_{p,\omega}(1)}\cdot\tilde{c}_1 + \omega^{f_{p,\omega}(0)}\cdot\tilde{c}_0 \tag{2.4.1}$$

Soit m le plus petit entier tel que le coefficient c_m ne soit pas égal à $p-1$. Alors, par construction, on a

$$n+1 = p^{n-1}\cdot c_{n-1} + \cdots + p^m\cdot(c_m+1),$$

d'où

$$f_{p,\omega}(n+1) = \omega^{f_{p,\omega}(n-1)}\cdot\tilde{c}_{n-1} + \cdots + \omega^{f_{p,\omega}(m)}\cdot(\tilde{c}_m + \tilde{1}). \tag{2.4.2}$$

Posons $\alpha = \omega^{f_{p,\omega}(n-1)}\cdot\tilde{c}_{n-1} + \cdots + \omega^{f_{p,\omega}(m)}\cdot\tilde{c}_m$, $\gamma = f_{p,\omega}(m)$, $\gamma_{m-1} = f_{p,\omega}(m-1)$, … , $\gamma_0 = f_{p,\omega}(0)$ (donc $\gamma_0 = \tilde{0}$). D'après 2.4.1 et 2.4.2, on a

$$f_{p,\omega}(n) = \alpha + \omega^{\gamma_{m-1}}\cdot\tilde{c}_{m-1} + \cdots + \omega^{\gamma_0}\cdot\tilde{c}_0, \quad f_{p,\omega}(n+1) = \alpha + \omega^{\gamma}.$$

Par hypothèse d'induction, on a $\gamma > \gamma_1 > \ldots > \gamma_m$. Alors des applications répétées de la proposition 2.3.18 donnent

$$\omega^{\gamma_{m-1}}\cdot\tilde{c}_{m-1} + \cdots + \omega^{\gamma_0}\cdot\tilde{c}_0 < \omega^{\gamma},$$

d'où $f_{p,\omega}(n) < f_{p,\omega}(n+1)$ en ajoutant α à gauche. □

※ *Le point essentiel dans la démonstration précédente est l'existence de l'ordinal ω, c'est-à-dire l'existence d'un nombre transfini qui domine tous les entiers à la façon dont ω le fait, donc en gros qui soit tel que la distance de 3 à ω soit la même que celle de 2 à ω, conjuguée à l'existence d'une arithmétique cohérente et d'un bon ordre sur ces nombres transfinis. Pour ce qui est des derniers éléments, arithmétique et bon ordre, ils apparaissent d'une certaine façon automatiquement lorsqu'on développe l'étude des ordinaux comme on l'a fait ici. Reste l'existence* *de l'ordinal ω lui-même, qui n'est peut-être pas si bénigne que l'intuition semble le dire d'abord.* ☒

Exercices

Exercice 2.1 (anti bon ordre). On suppose que $(A, <)$ est un ensemble bien ordonné, et que $(A, >)$ est aussi un ensemble bien ordonné, c'est-à-dire que toute partie non vide de A possède un plus petit et un plus grand élément. Montrer que A est fini. [Utiliser la proposition 2.1.16.]

Exercice 2.2 (ordres denses). Supposons que $<$ est un ordre total sur A. On dit que $<$ est *dense* si, toutes les fois qu'on a $a < b$, il existe c vérifiant $a < c < b$.

(i) Montrer qu'un bon ordre n'est jamais dense.

(ii) Montrer que tout ordre dénombrable dense sans minimum ni maximum est isomorphe à l'ordre des rationnels. [Supposant $(A, <)$ dénombrable, dense, sans minimum ni maximum, on fixe une numérotation des éléments de A, soit a_0, a_1, ... , et une numérotation des rationnels, soit q_0, q_1, ... Construire inductivement un isomorphisme f de $(A, <$ sur $(\mathbb{Q}, <)$ comme suit : à la $2i$-ième étape, on regarde l'élément a_i de plus petit indice pour lequel $f(a_i)$ n'a pas encore été défini, et on pose $f(a_i) = q_j$, où j est minimal tel que q_j n'est pas encore dans l'image de f et a_i et q_j vérifient les mêmes contraintes d'ordre par rapport aux valeurs déjà définies de f; à la $2i + 1$-ième étape, on fait de même en considérant le premier rationnel q_j non encore dans l'image de f, et en posant $f^{-1}(q_j) = a_i$, où i est minimal tel que a_i n'est pas encore dans le domaine de f et a_i et q_j vérifient les mêmes contraintes d'ordre par rapport aux valeurs déjà définies de f.]

Exercice 2.3 (transitif). Montrer que, si A et B sont des ensembles transitifs, il en est de même de $A \cup B$ et de $A \cup B \cup \{A, B\}$.

Exercice 2.4 (rang). On pose $V_0 = \varnothing$, et, inductivement, $V_n = \mathfrak{P}(V_{n-1})$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que chaque ensemble V_n est transitif et qu'on a $\bigcup V_n = V_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

Exercice 2.5 (somme d'ordres). Soit $(A, <)$ un ensemble ordonné, et a un élément de A. Montrer que $(A, <)$ est isomorphe à la somme de $(I_<(a), <)$ et de $(A \setminus I_<(a), <)$.

Exercice 2.6. Soit α un ordinal au moins égal à $\tilde{2}$. Montrer qu'il y a équivalence entre (i) Pour tous $\beta, \gamma < \alpha$, on a $\beta + \gamma < \alpha$; (ii) Pour tout $\beta < \alpha$, on a $\beta + \alpha = \alpha$. (On pourra considérer séparément le cas où α est successeur et celui où il est limite). Montrer que ces propriétés sont vraies pour $\alpha = \omega$ et $\alpha = \omega^2$.

Exercice 2.7 (ordinaux limites). Montrer qu'un ordinal α est limite si et seulement si il existe β tel qu'on ait $\alpha = \omega \cdot \beta$.

Exercice 2.8 (suites de Goodstein). Calculer le plus petit entier p vérifiant $g_p(2) = 0$; même question pour $g_p(3)$, et pour $g_p(4)$.