Chapitre 2

Induction bien fondée

Dans ce chapitre, on s'intéressera aux relations dites bien-fondées et aux mécanismes de preuves et de définitions par induction qui s'appuient sur cette notion.

Cloture. Soit une relation binaire r sur A, c'est à dire $r \subseteq A \times A$. On a défini dans le cours précédent la notion de cloture (ou fermeture) d'un ensemble X par un système de règles $\mathcal{R}$ notée $\mathrm{Clo}_{\mathcal{R}}(X)$:

$$\mathrm{Clo}_{\mathcal{R}}(X) = \mathrm{ind}(\mathcal{R} \cup \{x \leftarrow \emptyset \mid x \in X\})$$

c'est le plus petit fermé pour $\mathcal{R}$ qui contient X. Étant donnée une relation binaire $r \subseteq A \times A$, c'est un ensemble et on peut considérer sa fermeture par divers systèmes de règles. En particulier :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mathrm{ref}} &= \{(x,x) \leftarrow \emptyset \mid \forall x \in A\}\\ \mathcal{R}_{\mathrm{tra}} &= \{(x,z) \leftarrow \{(x,y),(y,z)\} \mid \forall x,y,z \in A\}\end{aligned}$$

$\mathcal{R}_{\mathrm{ref}}$ caractérise la réflexivité et $\mathcal{R}_{\mathrm{tra}}$ la transitivité. On définit la fermeture transitive de r, habituellement notée r^+, ainsi :

$$r^+ = \mathrm{Clo}_{\mathcal{R}_{\mathrm{tra}}}(r)$$

la fermeture réflexive transitive, notée usuellement r^*, est définie ainsi :

$$r^* = \mathrm{Clo}_{\mathcal{R}_{\mathrm{ref}} \cup \mathcal{R}_{\mathrm{tra}}}(r)$$

Element r-minimal. un élément m de $X \subseteq A$ est un élement minimal de X selon r, ou simplement r-minimal dans X, si il n'existe pas de $y \in X$ tel que $y \; r \; m$.

Relation bien fondée (1). Une relation binaire r est dite bien-fondée dans A si toute partie non-vide de A a (au moins) un élément r-minimal.

Notez que si $X \subseteq A$ contient $x \notin \text{codom}(r)$ alors x est trivialement r-minimal. L'ensemble des éléments r-minimaux est $A \setminus \text{codom}(r)$. Une façon équivalente équivalente de caratériser une relation bien-fondée est la suivante :

Relation bien fondée (2). il n'existe pas de chaines descendantes infinies. Une chaine descendante est une suite (u_i) dans A telle que $u_{i+1}\ r\ u_i$ pour tout i.

Preuve de l'équivalence :

- (1) $\Rightarrow$ (2) : par contradiction $(1) \wedge \neg(2) \Rightarrow$ contradiction. d'après $\neg(2)$, il existe une chaine descendante infinie. L'ensemble des éléments de cette suite n'a pas d'élément r-minimal. Ceci contredit la définition (1) d'une relation bien-fondée.
- (1) $\Leftarrow$ (2) : par contraposition $\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$. supposons qu'il existe un ensemble X sans élément r-minimal. $X \subseteq \text{codom}(r)$ sinon on aurait un trivial élément minimal. Ansi pour chaque $x \in X$ $\exists y \in X$ tel que $y\ r\ x$ sinon on aurait un élément minimal. Donc, grace à l'axiome du choix, on peut construire une suite descendante infinie.

Si r est bien fondée : il n'y a pas de cycles, r^+ est un ordre stricte, r^+ est aussi bien fondée. Examples de relations bien fondées :

- $x\ r\ y \quad \equiv \quad y = x + 1$ dans $\mathbb{N}$
- $x\ r\ y \quad \equiv \quad x$ divise y et $x \neq y$
  les nombres premiers sont les éléments minimaux de $\{2, 3, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$

Démonstration par induction bien-fondée. On définit :

$$r\{e\} = \{x \in A \mid (e, x) \in r\}$$
$$r^{-1}\{e\} = \{x \in A \mid (x, e) \in r\}$$

Soit r une relation bien-fonée dans A. La méthode de démonstration par induction bien-fondée (nœtherienne) est :

$$[\forall e \in E : \quad r^{-1}\{e\} \subseteq P \Rightarrow e \in P] \Rightarrow E \subseteq P$$

Notez : quand $r^{-1}\{e\} = \emptyset$ on démontre le cas de base. Ceci arrive quand e est r-minimal. Un tel e existe toujours quand $E \neq \emptyset$ puisque r est bien-fondée.

Preuve que la méthode de démonstation par induction bien-fondée est correcte : par contradiction. Supposons qu'on ait démontré $[\forall e \in E : \quad r^{-1}\{e\} \subseteq P \Rightarrow e \in P]$ mais que néanmoins $\exists e \in E : e \notin P$. Alors on considère l'ensemble $X = E \setminus P$ qui est non-vide puisqu'il contient e. Donc, puisque r est bien-fondée, X contient un élément minimal m. $r^{-1}\{m\} \cap X = \emptyset$ puisque m est minimal dans X. Donc $r^{-1}\{m\} \subseteq P$ et par l'implication qu'on a supposé avoir démontré il s'en suit que $m \in P$; or $m \in E \setminus P$, donc $m \notin P$. contradiction.

Relation avec la récurrence. La démonstration par induction bien-fondée généralise la démonstration par récurrence :

- récurrence simple, en prenant : $x\ r\ y \quad \equiv \quad y = x + 1$
- récurrence complète, en prenant : $x\ r\ y \quad \equiv \quad x < y$

Relation avec l'induction par rêgles. Soit r une relation bien-fondée dans E. On pose le système $\mathcal{R}$ de rêgles $e \leftarrow r^{-1}\{e\}$ pour tout $e \in E$. Alors la démonstration par induction selon $\mathcal{R}$ coincide avec la démonstration par induction bien-fondée selon r. Cette coincidence s'explique par le fait que $\mathrm{ind}(\mathcal{R}) = E$.

Preuve : $\mathrm{ind}(\mathcal{R}) \subseteq E$ car $\mathcal{H}(\mathcal{R}) \subseteq E$. $E \subseteq \mathrm{ind}(\mathcal{R})$ se vérifie par induction bien-fondée.

La fonction 91 de John McCarthy. On considère la définition suivante :

$$f(x) = \textbf{si}\ \ x > 100\ \ \textbf{alors}\ \ x - 10\ \ \textbf{sinon}\ \ f(f(x+11))$$

On pourrait la modéliser par un système de rêgles :

$$\begin{aligned} (x, x-10) &\leftarrow \emptyset && \forall x > 100 \\ (x, z) &\leftarrow \{(x+11, y), (y, z)\} && \forall x \leq 100,\ \forall y, z \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Pour avoir l'intuition de son comportement, on l'observe sur des examples :

$$\begin{aligned} f(103) &= 103 - 10 = 93 \\ f(102) &= 102 - 10 = 92 \\ f(101) &= 101 - 10 = 91 \\ f(100) &= f(f(100+11)) = f(f(111)) = f(111-10) = f(101) = 91 \\ f(99) &= f(f(99+11)) = f(f(110)) = f(110-10) = f(100) = 91 \\ f(98) &= f(f(98+11)) = f(f(109)) = f(109-10) = f(99) = 91 \end{aligned}$$

On formule alors l'hypothèse que :

$$f(x) = \textbf{si} \ \ x > 101 \ \ \textbf{alors} \ \ x - 10 \ \ \textbf{sinon} \ \ 91$$

comme $f \subseteq \mathbb{N}^2$, on voudra prouver la propriété suivante de ses éléments :

$$P(x, y) \quad \equiv \quad (x > 101 \wedge y = x - 10) \vee (x \leq 101 \wedge y = 91)$$

On notera que les examples montre que le calcul de $f(x)$ pour $x < 101$ se fait en utilisant $f(x+11)$. Donc, pour faire une démonstration par induction bien-fondée, il nous faudrait une relation bien-fondée qui progresse vers zéro. D'autre part, pour $x > 101$ le calcul de $f(x)$ ne dépend que de x, donc on peut laisser ces valeurs de x comme des points isolés, incomparable. Ceci suggère de choisir la relation suivante :

$$(x, y) \prec (x', y') \quad \equiv \quad x' < x \leq 101$$

A toute suite décroissante par $\prec$ correspond (par projection sur le premier élément du couple) une suite ordonnée strictement sur un domaine fini (puisque ne concernant que les entiers naturels ≤ 101). La suite décroissante est donc finie. C'est donc nécéssairement une relation bien-fondée car on ne peut pas construire de chaine décroissante infinie avec un nombre fini d'éléments.

- si $x > 101$ alors $P(x, y) \equiv y = x - 10$, ce qui est satisfait par définition de f. Nous n'avons même pas besoin de l'hypothèse d'induction dans ce cas.
- si $x = 101$, $f(101) = 91$ comme on l'a vu dans les examples calculés. A nouveau, pas besoin de l'hypothèse d'induction.
- si $x < 101$ alors $f(x) = f(f(x + 11))$. L'hypothèse d'induction c'est qu'on a prouvé $P(x', y')$ pour tous les $(x', y') \prec (x, y)$.
  - si $x + 11 > 100$, i.e. $89 < x \leq 100$, alors $f(x) = f(f(x + 11)) = f(x + 11 - 10) = f(x + 1)$. Or $x < x + 1 \leq 101$, c'est à dire $(x + 1, f(x + 1)) \prec (x, f(x))$, donc, par hypothèse d'induction $P(x + 1, f(x + 1))$, c'est à dire $f(x + 1) = 91$. Donc $f(x) = 91$.
  - si $x + 11 \leq 100$, i.e. $89 \geq x$, alors $x < x + 11 \leq 101$, c'est à dire $(x + 11, f(x + 11)) \prec (x, f(x))$. Donc, par hypothèse d'induction $P(x + 11, f(x + 11))$, c'est à dire $f(x + 11) = 91$. Par conséquent, $f(x) = f(f(x + 11)) = f(91)$, or $(91, f(91)) \prec (x, f(x))$, donc par hypothèse d'induction $f(91) = 91$, et donc $f(x) = 91$.

Exercice 3. *On considère les équations suivantes :*

$$f(x,y) = \textbf{\textit{si}}\ \ x = y\ \ \textbf{\textit{alors}}\ \ 0\ \ \textbf{\textit{sinon}}\ \ 1 + f(x+1, y+2) \tag{F}$$

$$g(x,y) = \textbf{\textit{si}}\ \ x < y\ \ \textbf{\textit{alors}}\ \ x\ \ \textbf{\textit{sinon}}\ \ g(f(x,y), y) \tag{G}$$

$$h(x,y) = \textbf{\textit{si}}\ \ y = 0\ \ \textbf{\textit{alors}}\ \ x\ \ \textbf{\textit{sinon}}\ \ h(y, g(x,y)) \tag{H}$$

On déterminera les fonctions bien connues qui se cachent dans ces définitions. En se limitant à des arguments dans $\mathbb{N}$*, on précisera les domaines de définitions. On prouvera pour chacune, par induction bien fondée, qu'elle calcule bien la fonction bien connue qu'on aura reconnue.*