Chapitre 3

Définitions de fonctions par induction bien-fondée

Dans ce chapitre, on s'intéressera aux définitions de fonctions par récursion (induction) bien-fondée.

Rappels. Une fonction f est un relation telle que $\forall x \in \mathrm{dom}(f)\ \exists! y \in \mathrm{codom}(f)\ (x, y) \in f$. On écrit alors $y = f(x)$.

On dit que f est une fonction de E dans F, et l'on écrit $f : E \to F$, si $\mathrm{dom}(f) = E$ et $\mathrm{codom}(f) \subseteq F$.

Si f est une relation, la restriction de f à X, notée $f|X$, est la relation :

$$\{(x, y) \in f \mid x \in X\}$$

c'est également $f \cap (X \times F)$

Si r est une relation, nous écrirons :

$$\begin{aligned} r\{e\} &= \{x \in E \mid e\ r\ x\} && r\text{-successeurs} \\ r^{-1}\{e\} &= \{x \in E \mid x\ r\ e\} && r\text{-prédecesseurs} \end{aligned}$$

3.1 Méthode de définition par induction bien-fondée (Noetherienne)

Soit r une relation bien-fondée dans E. Pour définir f, la méthode de définition par induction (on dit aussi récursion) bien-fondée ou Noetherienne consiste à définir $f(e)$ en fonction de e et des $f(x)$ pour les $x \in r^{-1}\{e\}$ (let r-prédecesseurs de e) :

$$f(e) = g(e, f|r^{-1}\{e\})$$

pour un $g : D \to F$ avec $D = \{(e,h) \mid e \in E,\ h \in F^{r^{-1}\{e\}}\}$ En particulier, si e est un élément r-minimal :

$$f(e) = g(e, f|r^{-1}\{e\}) = g(e, f|\emptyset) = g(e, \emptyset)$$

donc ne dépend que de e.

Théorème 5 (Correction de la méthode)**.** *Soit r une relation bien-fondée dans E, et F une ensemble. Pour tout $g : D \to F$ (ou D est défini comme ci-dessus) $\exists! f : E \to F$ telle que :*

$$f(e) = g(e, f|r^{-1}\{e\}) \qquad \forall e \in E$$

Unicité. si la méthode définit une fonction, alors celle-ci est unique.

Preuve par induction bien-fondée : supposons qu'on ait f et f' :

$$\begin{aligned} f(e) &= g(e, f|r^{-1}\{e\}) && \forall e \in E \\ f'(e) &= g(e, f'|r^{-1}\{e\}) \end{aligned}$$

(Cas de base) pour tout $m \in E$ tel que m est r-minimal :

$$\begin{aligned} f(e) &= g(e, f|r^{-1}\{m\}) = g(e, f|\emptyset) = g(e, \emptyset) \\ f'(e) &= g(e, f'|r^{-1}\{m\}) = g(e, f'|\emptyset) = g(e, \emptyset) \end{aligned}$$

donc $f(e) = f'(e)$

(Induction) hypothèse d'induction : $\forall x \in r^{-1}\{e\}\ f(e) = f'(e)$, c'est à dire $f|r^{-1}\{e\} = f'|r^{-1}\{e\}$:

$$f(e) = g(e, f|r^{-1}\{e\}) = g(e, f'|r^{-1}\{e\}) = f'(e)$$

$\square$

Existence. elle définit en effet une fonction

Considérons l'ensemble $\mathcal{R}$ des règles :

$$(e, g(e,h)) \leftarrow h \qquad\qquad \forall h \in F^{r^{-1}\{e\}}$$

Notons ici que ces règles sont de la forme $h' \leftarrow B$ où $h' = (e, g(e,h))$ et $B = h$. Nous allons montrer $\mathrm{ind}(\mathcal{R})$ est une fonction et qu'elle satisfait la définition.

Par induction bien-fondée sur r, on montre que $\mathrm{ind}(\mathcal{R})$ est une fonction ; Plus précisément, la propriété $P(e)$ qui nous intéresse c'est "$\mathrm{ind}(\mathcal{R})(e)$ *est définie uniquement.*"

(Cas de base) $\mathrm{ind}(\mathcal{R})|\emptyset = \emptyset$. D'où, pour e r-minimal, $\mathrm{ind}(\mathcal{R})(e) = g(e, \mathrm{ind}(\mathcal{R})|\emptyset) = g(e, \emptyset)$. Donc $\mathrm{ind}(\mathcal{R})(e)$ est défini de manière unique.

(Induction) hypothèse d'induction : $\mathrm{ind}(\mathcal{R})|r^{-1}\{e\}$ est une fonction $\in F^{r^{-1}\{e\}}$. Donc, par construction des regles $\mathcal{R}$, il y en a une de la forme :

$$(e, g(e, \mathrm{ind}(\mathcal{R})|r^{-1}\{e\})) \leftarrow \mathrm{ind}(\mathcal{R})|r^{-1}\{e\}$$

On montre maintenant qu'il n'y a qu'une seule rêgle de la forme $(e, g(e, h)) \leftarrow h$ activée par $\mathrm{ind}(\mathcal{R})$, c'est à dire telle que $h \subseteq \mathrm{ind}(\mathcal{R})$.

Pour tout $(e, y) \in \mathrm{ind}(\mathcal{R})$ il faut une rêgle :

$$(e, g(e, h)) \leftarrow h \qquad \text{avec } y = g(e, h)$$

or, par construction, $\mathrm{dom}(h) = r^{-1}\{e\}$ car $h \in F^{r^{-1}\{e\}}$. Pour que $(e, y) \in \mathrm{ind}(\mathcal{R})$, il faut $h \subseteq \mathrm{ind}(\mathcal{R})$, donc nous avons $h = h|r^{-1}\{e\} \subseteq \mathrm{ind}(\mathcal{R})|r^{-1}\{e\}$. Mais h et $\mathrm{ind}(\mathcal{R})|r^{-1}\{e\}$ sont des fonctions de même domaine : elles ont donc la même taille. Donc $h = \mathrm{ind}(R)|r^{-1}\{e\}$, donc c'est la même rêgle !

Finalement, nous démontrons que $\mathrm{ind}(\mathcal{R})$ satisfait :

$$\mathrm{ind}(\mathcal{R})(e) = g(e, \mathrm{ind}(\mathcal{R})|r^{-1}\{e\})$$

En effet, nous savons que $\mathrm{ind}(\mathcal{R})$ est une fonction $D \to F$, donc, par construction, $\forall e \in E$ il y a une rêgle :

$$(e, g(e, \mathrm{ind}(\mathcal{R})|r^{-1}\{e\})) \leftarrow \mathrm{ind}(\mathcal{R})|r^{-1}\{e\}$$

donc $(e, g(e, \mathrm{ind}(\mathcal{R})|r^{-1}\{e\})) \in \mathrm{ind}(\mathcal{R})$, donc, puisque c'est une fonction :

$$\mathrm{ind}(\mathcal{R})(e) = g(e, \mathrm{ind}(\mathcal{R})|r^{-1}\{e\})$$

$\square$

Démonstration vue comme définition. La méthode de démonstration par induction bien fondée peut être vue comme une application de la méthode de definition d'une fonction par induction bien fondée : c'est comme montrer que la partie positive de la fonction caratéristique de la propriété P est définie partout dans E.

Généralisation de la définition par récurrence.

- Récurrence simple : $E = \mathbb{N}$ et $x\; r\; y \;\equiv\; y = x + 1$

  $$\begin{aligned} f(0) &= a \\ f(n+1) &= g(n, f(n)) \end{aligned} \qquad g : \mathbb{N} \times F \to F$$

  Factorielle : $f(n) = n!$, $F = \mathbb{N}$, $a = 1$, $g(n, x) = (n+1) * x$

- Récurrence complète : $E = \mathbb{N}$ et $r = <$:

  $$f(n) = g(f| <^{-1} \{n\})$$

  car on peut omettre l'argument n puisque c'est aussi la longueur de la suite $f| <^{-1} \{n\}$

3.2 Exercice d'induction structurelle bien-fondée

On considère des fonctions sur des listes d'entiers. La fonction f pour sommer les éléments d'une liste :

$$\begin{aligned} f(\mathsf{nil}, n) &= n \\ f(h{::}t, n) &= f(t, h+n) \end{aligned}$$

et la fonction (infixe) @ pour concatener deux listes :

$$\begin{aligned} \mathsf{nil}@\ell_2 &= \ell_2 \\ (h{::}\ell_1)@\ell_2 &= h{::}(\ell_1@\ell_2) \end{aligned}$$

Exercice 4 (Définitions)**.** *Montrez qu'elles sont bien définies par récursion bien-fondée. On se souviendra qu'on a juste besoin d'une relation bien-fondée, et non pas d'un ordre total.*

Exercice 5 (Propriété)**.** *Montrez par induction structurelle bien-fondée que :*

$$f(\ell_2, f(\ell_1, 0)) = f(\ell_1@\ell_2, 0)$$

3.3 Bons ordres, induction transfinie

Un ordre $\preceq$ est dit total si $\forall x, y$ de son domaine $x \preceq y$ ou $y \preceq x$; c'est à dire si deux éléments quelconques sont toujours comparables. On dit que le domaine de $\preceq$ est ordonné par $\preceq$.

Définition 8 (bon ordre)**.** Un bon ordre $\preceq$ est un ordre total dont l'ordre strict associé $\prec$ est bien-fondé.

Une propriété caractéristique du bon ordre est qu'il est total et qu'il n'existe pas de suites infinies strictement décroissantes.

Une ensemble est bien ordonné par $\preceq$ si il est ordonné par $\preceq$ et $\preceq$ est un bon-ordre.

Pour tout ensemble X non-vide, puisque $\prec$ est bien-fondée, il y a (au moins) un élément $\prec$-minimal, et, puisque $\preceq$ est totale, il n'y en a qu'un seul : c'est *l'élément minimum* de X selon $\preceq$.

Remarque : pour qu'un ensemble ordonné par $\preceq$ soit bien ordonné par $\preceq$ il sufit que toute partie non vide ait un élément minimum. Pourquoi ? preuve : on montre que $\preceq$ est totale en considérant toutes les parties à deux éléments.

Un ordre total dans un ensemble fini est toujours un bon ordre.

Examples.

- $\leq$ dans $\mathbb{N}$ (mais pas dans $\mathbb{Z}$)
- l'ordre lexicographic sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

  $$(x, y) \preceq (x', y') \qquad \equiv \qquad x \prec x' \;\vee\; (x = x' \;\wedge\; y \preceq y')$$

  Preuve de bon ordre :

  – $\preceq$ est un ordre
  – tout ensemble $X \subseteq \mathbb{N}^2$ non vide a un élément minimum (x_0, y_0) que l'on construit de la manière suivante. Posons :

    $$A = \{x \mid (x, y) \in X\}$$

    Puisque X est non vide, A est non vide, et puisque $\leq$ est un bon-ordre sur $\mathbb{N}$, A a un élément minimum x_0. Posons :

    $$B = \{y \mid (x_0, y) \in X\}$$

    Par contruction de x_0, B doit être non vide et donc possède un élément minimum y_0.
    On montre que (x_0, y_0) est minimum dans X. Soit $(x, y) \in X$. Par construction de x_0, $x_0 \leq x$. On a donc deux cas :

    ∗ soit $x_0 < x$ auquel cas $(x_0, y_0) \preceq (x, y)$
    ∗ soit $x_0 = x$, c'est à dire $(x, y) \in B$ et, par construction de y_0, $y_0 \leq y$. On a donc $x_0 = x \;\wedge\; y_0 \leq y$ c'est à dire $(x_0, y_0) \preceq (x, y)$.

Majorant, successeur, limite. Soit E ordonné par $\preceq$. Un *majorant strict* de $X \subseteq E$ est un $m \in E$ tel que $\forall x \in X \; x \prec m$.

$s \in E$ est *suivant* de X si c'est le plus petit majorant strict de X. Suivant de $\emptyset$ signifie "plus petit élément de E."

Le suivant de $\{x\}$ est appelé *successeur* de x et souvent noté $\mathrm{succ}(x)$ ou x^+.

Si E est bien-ordonné par $\preceq$, $\forall X \subseteq E$, si X a un majorant stricte alors X a un suivant. En particulier, tout élément (sauf l'éventuel plus grand) a un successeur.

Un élément de E qui n'est ni le plus petit élément de E, ni un élément successeur est appelé *élément limite*

Example. Dans $\mathbb{N}^2$ bien ordonné par l'ordre lexicograpique :

- le plus petit élément est $(0, 0)$
- les éléments successeurs sont $\text{succ}(x, y) = (x, \text{succ}(y)) = (x, y + 1)$
- les éléments limites sont $(x, 0)$ pour $x \geq 1$

3.4 Démonstration par induction transfinie

La méthode de démonstration par induction bien-fondée peut s'appliquer à un bon ordre $\preceq$ en prenant $\prec$ comme relation bien-fondée. On parle alors d'induction transfinie ca c'est essentiellement un extension de la récurrence au delà des nombres entiers aux nombres ordinaux finis ou transfinis.

On utilise souvent la version suivante de l'induction transfinie (mais ce n'en est qu'une application particulière) :

Soit E bien ordonné par $\preceq$. Pour prouver $E \subseteq P$, on montre :

- le plus petit élément $\in P$
- pour tout e ayant un successeur : $e \in P \Rightarrow \text{succ}(e) \in P$
- pout tout élément e limite : $\prec^{-1} \{e\} \subseteq P \Rightarrow e \in P$

3.5 Définition par induction transfinie

De même la méthode de définition par induction/récursion bien fondée peut s'appliquer à un bon ordre. On peut alors simplifier le schéma comme suit :

$$f(e) = g(f| \prec^{-1} \{e\})$$

car $e = \text{suivant}(\prec^{-1} \{e\})$. On utilise souvent la version suivante (juste un application particulière) :

- définir f pour le plus petit élément
- pour tout successeur : $f(\text{succ}(e)) = h(e, f(e))$
- pour tout élément e limite : $f(e) = g(f| \prec^{-1} \{e\})$

3.6 Exercices

Exercice 6. *La fonction d'Ackermann est une exponentielle généralisée ; c'est une fonction de 3 arguments entiers : un* niveau i *et deux arguments* x *et* y.

$$
\begin{aligned}
x\ op_0\ y &= x + y \\
x\ op_{n+1}\ y &= x\ op_n \cdots op_n\ x && (y \text{ fois})
\end{aligned}
$$

Pour les premiers niveaux on obtient donc :

$$
\begin{aligned}
x\ op_0\ y &= x + y \\
x\ op_1\ y &= x + \cdots + x = x * y \\
x\ op_2\ y &= x * \cdots * x = x \uparrow y = x^y \\
x\ op_3\ y &= x \uparrow \ldots \uparrow x = x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}
\end{aligned}
$$

Pour obtenir une forme recursive utilisable, on s'appuie sur le fait (démontrable) que op_i *est associatif :*

$$
\begin{aligned}
x\ op_{n+1}\ (y+1) &= x\ op_n\ x\ op_n \ldots op_n\ x && (y+1 \text{ fois}) \\
&= x\ op_n\ (x\ op_n \ldots op_n\ x) && (y \text{ fois à droite}) \\
&= x\ op_n\ (x\ op_{n+1}\ y)
\end{aligned}
$$

On définira alors la fonction d'Ackermann $f(i, x, y)$ *grace aux équations exhaustives et mutuellement exclusives suivantes :*

$$
\begin{aligned}
f(0, x, 0) &= x && \text{(A1)} \\
f(0, x, y+1) &= 1 + f(0, x, y) && \text{(A2)} \\
f(1, x, 0) &= 0 && \text{(A3)} \\
f(i+2, x, 0) &= 1 && \text{(A4)} \\
f(i+1, x, y+1) &= f(i, x, f(i+1, x, y)) && \text{(A5)}
\end{aligned}
$$

(A1,A2) definissent l'addition, (A3,A4) sont les cas particuliers ou l'on répète x *zéro fois, et (A5) est la définition inductive principale.*

On montrera la terminaison, c'est à dire que f *est bien définie partout dans* $\mathbb{N}^3$.

Exercice 7. *On reprend l'exercice 3 de la page 21, mais cette fois on montrera que les fonctions* f, g *et* h *sont bien définies par induction bien fondée dans les domaines de définitions déterminés précédemment.*