# Chapitre 4

# Ordinaux et Cardinaux

**Ordres isomorphes.** Un *isomorphisme* $f$ de l'ordre $\preceq$ sur l'ordre $\preceq'$ est une bijection du domaine de $\preceq$ sur le domaine de $\preceq'$ qui préserve l'ordre, c'est à dire tel que :

$$x \preceq y \quad \equiv \quad f(x) \preceq' f(y)$$

on dit que $\preceq$ et $\preceq'$ sont isomorphes.

**Segment initial.** Un segment initial d'un bon ordre $\preceq$ est un $S \subseteq \mathrm{dom}(\preceq)$ tel que $\prec^{-1}(S) \subseteq S$, c'est à dire :

$$\forall s \in S,\ \forall e \in \mathrm{dom}(\preceq) \quad e \preceq s \Rightarrow e \in S$$

Un segment initial $\neq \mathrm{dom}(\preceq)$ est dit *strict*. Par example, pour l'ordre lexicographique dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\{0\} \times \mathbb{N}$ est un segment initial strict dont le suivant est $(1, 0)$.

**Théorème 6.** *Les seuls segments initiaux sont les* $\prec^{-1}\{e\}$ *ainsi que* $\mathrm{dom}(\preceq)$ *lui-même*

*Preuve.* $\mathrm{dom}(\preceq)$ est un segment initial (trivial).

Soit $A \subset \mathrm{dom}(\preceq)$ tel que $\prec^{-1}(A) \subseteq A$. Par hypothèse, $A \neq \mathrm{dom}(\preceq)$ donc $\mathrm{dom}(\preceq) \setminus A$ est non-vide et possède un plus petit élément $e$. Puisque les minorants de $A$ sont dans $A$ (par hypothèse) et que $e \notin A$, $e$ doit être un majorant stricte de $A$. C'est aussi le plus petit majorant, donc le suivant de $A$. On sait que :

$$A \subseteq \prec^{-1}\{e\}$$

Considérons $X = (\prec^{-1}\{e\}) \setminus A$. Tout élément de $X$ est un majorant strict de $A$ (puisque $\prec^{-1}(A) \subseteq A$). Donc si $X \neq \emptyset$, il existe un majorant strict de $A$ plus petit que $e$ : contradiction ! Donc $A = \prec^{-1}\{e\}$ $\square$

**Ordre initial.** La restriction d'un bon ordre $\preceq$ à un de ses segments initiaux est un *ordre initial* de $\preceq$. C'est évidemment un bon ordre. C'est un *ordre strictement initial* si le segment est initial strict.

## 4.1 Comparaison de bons ordres

Considérons deux bons ordres $\preceq$ et $\preceq'$ et supposons $\preceq$ isomorphe à un ordre initial de $\preceq'$. Cela signifie qu'il existe un segment initial $S'$ de $\preceq'$ et un isomorphisme $f$ de $\preceq$ sur $\preceq' |S'$. Par induction bien fondée, on voit que :

$$f(e) = \text{suivant}\ \{f(x) \mid x \prec e\} \qquad \forall e \in \text{dom}(\preceq)$$

Puisque $S' = \text{codom}(f)$, on déduit que $S'$ et $f$ sont uniques : l'équation ci-dessus peut aussi servir à définir une fonction par induction bien-fondée et tous les isomorphismes doivent la satisfaire ; donc il y en a un seul.

En particulier, $\preceq$ n'est isomorphe qu'à un seul ordre initial de $\preceq$ qui est $\preceq$ lui-même ($f(e) = e$). Un ordre strictement initial de $\preceq$ ne peut pas être isomorphe à $\preceq$.

**Bon ordre plus court.** On dira que le bon ordre $\preceq$ est *plus court* que le bon ordre $\preceq'$ si $\preceq$ est isomorphe à un ordre strictement initial de $\preceq'$.

**Théorème 7.** *Etant donnés deux bons ordres $\preceq$ et $\preceq'$, seulement 3 cas mutuellement exclusifs sont possibles :*

- *$\preceq$ et $\preceq'$ sont isomorphes*
- *$\preceq$ est plus court que $\preceq'$*
- *$\preceq'$ est plus court que $\preceq$*

*Preuve.* On fixe $a \notin \text{dom}(\preceq) \cup \text{dom}(\preceq')$, et on définit par induction transfinie :

$$f : \text{dom}(\preceq) \to \text{dom}(\preceq') \cup \{a\}$$

si $f(\prec^{-1} \{e\}) \subseteq \text{dom}(\preceq')$ et a un majorant strict alors $f(e) = \text{suivant}(f(\prec^{-1} \{e\}))$, sinon $f(e) = a$.

Si $a \notin \text{codom}(f)$, alors $\preceq$ est isomorphe à un ordre initial de $\preceq'$. Si $a \in \text{codom}(f)$, alors il n'y avait pas assez d'éléments dans $\text{dom}(\preceq')$ pour faire un isomorphisme : en 'inversant' $f$ pour ses images $\neq a$ on obtient un isomorphisme de $\preceq'$ sur un segment strictement initial de $\preceq$, ce qui montre que $\preceq'$ est plus court que $\preceq$. $\square$

## 4.2 Mesure d'un bon ordre

Fixons un bon ordre $\leq$ et notons son domaine $\mathcal{O}$ et $\leq_\alpha$ l'ordre strictement initial $\leq | <^{-1} \{\alpha\}$.

Les bons ordres plus courts que $\leq$ sont ceux qui sont isomorphes à $\leq_\alpha$ pour un $\alpha$. Cet $\alpha$ est unique, donc, à tout bon ordre $\preceq$ plus court que $\leq$, on peut associer l'unique $\alpha \in \mathcal{O}$ tel que $\preceq$ est isomorphe à $\leq_\alpha$.

Notons $m(\preceq) = \alpha$. En particulier, $m(\leq_\alpha) = \alpha$. De manière générale, $\preceq$ est plus court que $\preceq'$ ssi $m(\preceq) < m(\preceq')$. $m(\preceq)$ est une sorte de *mesure* du bon ordre $\preceq$ par rapport au bon ordre $\leq$.

Par example, si on prend $\mathcal{O} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\leq =$ ordre lexicograpique, alors la mesure de $\leq$ sur $\mathbb{N}$ est $(1, 0)$ (car $i \mapsto (0, i)$).

Plus le bon ordre $\leq$ (et donc $\mathcal{O}$) est grand, plus nombreux sont les bons ordres qu'on pourra mesurer. Cependant, il ne peut exister de bon ordre universel car aucun ne peut se mesurer lui-même. On peut toujours prolonger $\leq$ en ajoutant un élément, mais le nouveau bon ordre, bien que plus grand, n'est pas plus universel.

## 4.3 Ordinaux

On admet qu'il existe un bon ordre universel, mais il faut renoncer à se qu'il soit un ensemble : c'est la collection (classe, méta-ensemble) $\mathcal{O}$ des nombres ordinaux bien ordonnée par la méta-relation $\leq$.

- tout ensemble est une collection, mais pas inversement
- on étendra aux collections les notions ensemblistes
- on admettra que $\mathcal{O}$ est plus grand que n'importe quel ensemble

**Ordinal d'un bon ordre.** L'ordinal du bon ordre $\preceq$, c'est $m(\preceq)$ quand on mesure $\preceq$ par $\leq$ sur $\mathcal{O}$.

Les *ordinaux finis* sont les ordinaux des bons ordres finis. Les autres sont appelés *ordinaux transfinis*. Le plus petit ordinal transfini est noté $\omega$. C'est aussi le plus petit ordinal limite.

Les ordinaux $< \omega$ peuvent être identifiés aux entiers naturels et $\omega$ est l'ordinal du bon ordre usuel $\leq$ sur $\mathbb{N}$. Les ordinaux sont le prologement transfini des entiers naturels. Ils servent à identifier les classes d'équivalence des bons ordres.

## 4.4 Cardinaux

Alors qu'un ordinal est une mesure de bon ordre, un cardinal est une mesure de quantité d'éléments (en vrac, sans ordre). La notion de cardinal étend aux ensembles infinis la notion de nombre d'éléments. Les entiers naturels sont aussi les cardinaux finis.

**Définition 9** (même cardinal)**.** Deux ensembles $A$ et $B$ on même cardinal ssi il existe une bijection entre eux

**Enumération des ensembles finis.** En pratique, pour compter les éléments d'un ensemble fini, on les énumère, c'est à dire qu'on les met en correspondance avec l'ensemble ordonné $1 < 2 < \cdots < n$. Mais on sait que le $n$ ainsi trouvé est invariant : on peut énumérer différemment et on trouve toujours le même $n$. $n$ est donc traité d'abord de façon ordinale avant de jouer son rôle de cardinal. Nous allons étendre cette manière de procéder aux ensembles infinis.

**Enumération des ensembles finis ou infinis.** Soit $E$ un ensemble quelconque : fixons $a \notin E$. On définit par induction transfinie une méta-fonction :

$$f : \mathcal{O} \to E \cup \{a\}$$

si $E \not\subseteq f(<^{-1}\{\alpha\})$ alors on choisit $f(\alpha)$ dans $E \setminus f(<^{-1}\{\alpha\})$, sinon on pose $f(\alpha) = a$.

$\exists \alpha \in \mathcal{O}\ f(\alpha) = a$ sinon on aurait un injection de $\mathcal{O}$ dans $E$ ; or c'est impossible car $\mathcal{O}$ est plus grand que n'importe quel ensemble. On peut donc considérer le plus petit $\alpha$ tel que $f(\alpha) = a$. $f| <^{-1}\{\alpha\}$ est une bijection de $<^{-1}\{\alpha\}$ sur $E$ ce qui revient à ordonner $E$.

Ceci généralise l'énumération, mais attention ! cet $\alpha$ n'est pas invariant. Considérons en effet l'ensemble $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$. Nous pouvons choisir le $f$ suivant :

$$\begin{aligned} f(2i) &= (i, 0) \\ f(2i+1) &= (i, 1) \end{aligned}$$

auquel cas nous trouvons $\alpha = \omega$. Mais nous pourrions tout aussi bien choisir le $f$ suivant :

$$\begin{aligned} f(i) &= (i, 0) \\ f(\omega + i) &= (i, 1) \end{aligned}$$

auquel cas nous trouvons $\alpha = \omega 2$

**Cardinal d'un ensemble.** Heureusement, parmis tous les $\alpha$ tels qu'il existe une bijection de $<^{-1}\{\alpha\}$ sur $E$, il y en a toujours un plus petit : c'est le *cardinal* de $E$.

Deux ensembles ont le même cardinal ssi il existe une bijection de l'un sur l'autre. Le cardinal de $\mathbb{N}$ est $\omega$ : en tant que cardinal on l'appelle $\aleph_0$.

**Construction de Von Neumann.** On se rappelle la construction des entiers naturels selon Von Neumann :

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ x^+ &= x \cup \{x\} \end{aligned}$$

ce qui nous donne $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Le premier ordinal limite est alors tout simplement $\omega = \mathbb{N}$ et on peut tout aussi bien construire son successeur selon le même schéma :

$$\omega^+ = \omega \cup \{\omega\}$$