

# Machines à signaux et modèles de calcul analogiques

Jérôme Durand-Lose



Laboratoire d'Informatique Fondamentale d'Orléans,  
Université d'Orléans, Orléans, FRANCE

Séminaire du LIFO, 19 octobre 2009

- 1 Introduction, machines à signaux
- 2  $i$   $i$  Nombre réel ??
- 3 Liens avec BSS
- 4 Liens avec l'Analyse récursive
- 5 Conclusion

- 1 Introduction, machines à signaux
- 2  $\mathbb{R}$  Nombre réel ??
- 3 Liens avec BSS
- 4 Liens avec l'Analyse récursive
- 5 Conclusion

## Contexte

### Automates cellulaires

- parallélisme massif, uniforme et synchrone
- prise en compte des contraintes spatiales
- états, cellules / espace, itérations / temps *discrets*

## Contexte

### Automates cellulaires

- parallélisme massif, uniforme et synchrone
- prise en compte des contraintes spatiales
- états, cellules / espace, itérations / temps *discrets*

### Machines à signaux

- abstraction des AC se concentrant sur les signaux
- espace et temps *continus*

## Contexte

### Automates cellulaires modèle de calcul discret

- parallélisme massif, uniforme et synchrone
- prise en compte des contraintes spatiales
- états, cellules / espace, itérations / temps *discrets*

### Machines à signaux modèle de calcul continue et analogique

- abstraction des AC se concentrant sur les signaux
- espace et temps *continus*

## Contexte

### Automates cellulaires modèle de calcul discret

- parallélisme massif, uniforme et synchrone
- prise en compte des contraintes spatiales
- états, cellules / espace, itérations / temps *discrets*

### Machines à signaux modèle de calcul continue et analogique

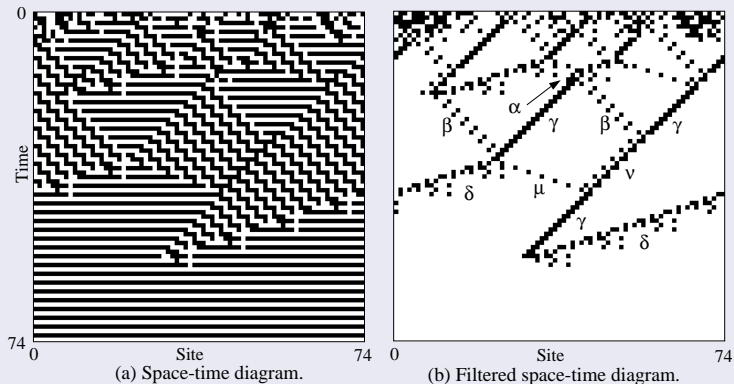
- abstraction des AC se concentrant sur les signaux
- espace et temps *continus*

### Liens avec d'autres modèles analogiques

- Modèle de Blum, Shub et Smale  
[Durand-Lose, 2007, Durand-Lose, 2008]
- Analyse récursive [Durand-Lose, 2009]

# Origine de l'approche par signaux

## Automates cellulaires — analyse

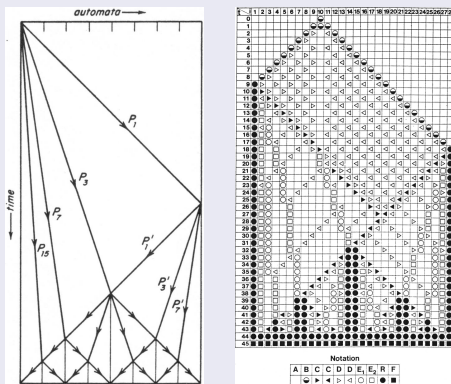


[Das et al., 1995, Fig. 1]



# Origine de l'approche par signaux

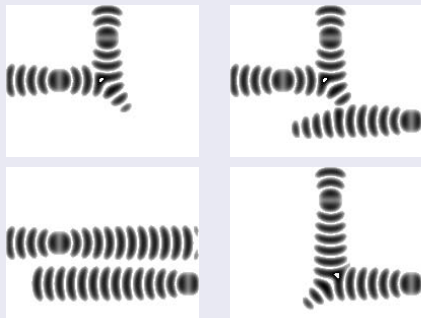
## Automates cellulaires — conception



[Varshavsky et al., 1970, Fig 1 and 3]

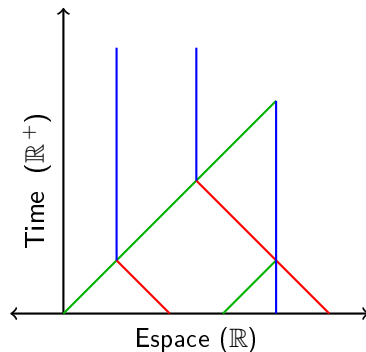
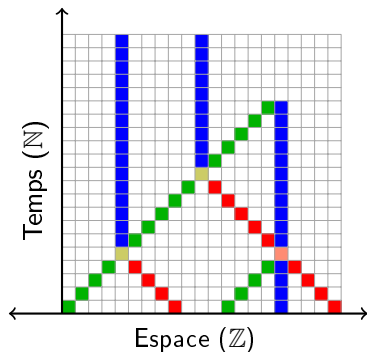
# Origine de l'approche par signaux

## Collision based computing



©2009 A. Adamatzky

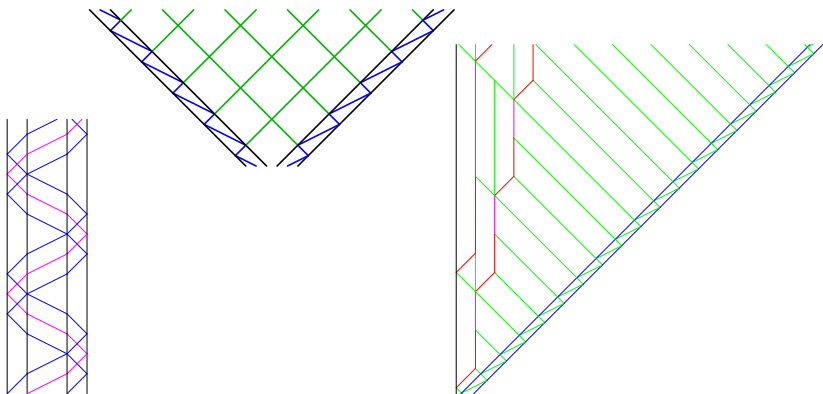
## Machines à signaux : idéalisation continue



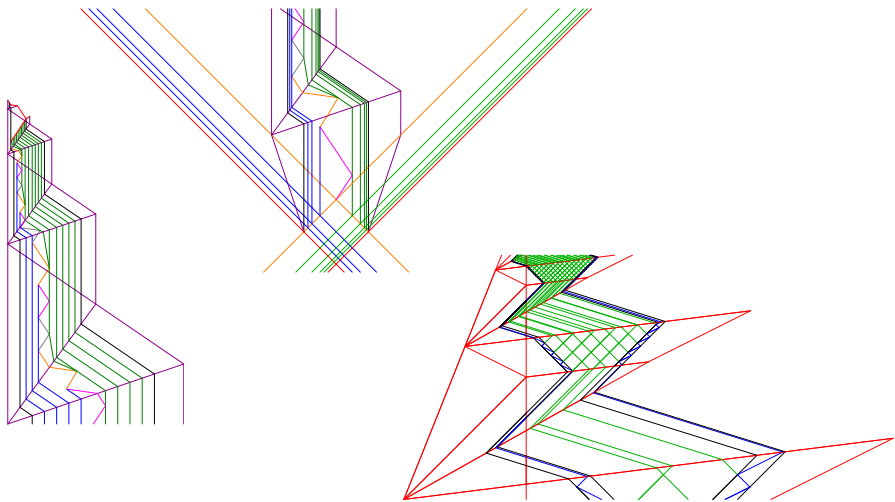
## Vocabulaire

- Signal (meta-signal)      même méta-signal  $\rightsquigarrow$  signaux parallèles
- Collision (règle de)

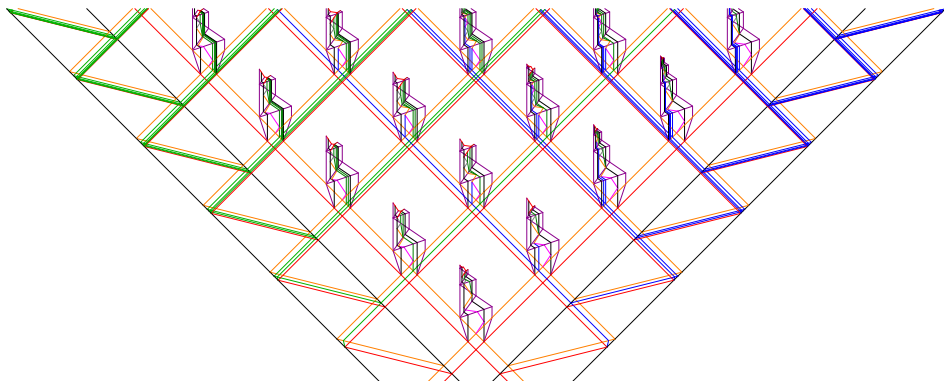
# Exemples



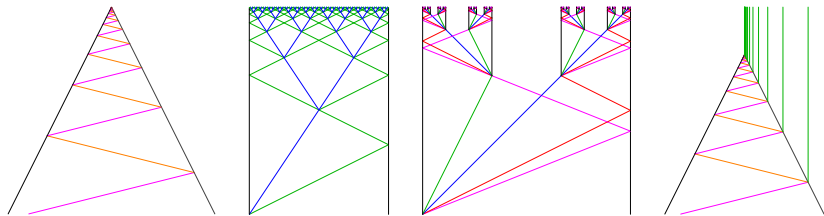
## Exemples plus complexes



## Exemple encore plus complexe



# Nouveaux types de *monstres*



- 1 Introduction, machines à signaux
- 2 ∫ ∫ Nombre réel ??
- 3 Liens avec BSS
- 4 Liens avec l'Analyse récursive
- 5 Conclusion



# Qu'est-ce qu'un nombre réel ?

## Qu'est-ce qu'un nombre réel ?

Un réel est un « réel », un point c'est tout !

- valeur exacte
- opérations permises selon la structure considérée comme anneau  $+$ ,  $-$ ,  $\times_{ct}$ ,  $\times$  et test sur signe (tout en temps 1)
- modèle de Blum, Shub and Smale [Blum et al., 1989, Blum et al., 1998]

## Qu'est-ce qu'un nombre réel ?

Un réel est un « réel », un point c'est tout !

- valeur exacte
- opérations permises selon la structure considérée comme anneau  $+$ ,  $-$ ,  $\times_{ct}$ ,  $\times$  et test sur signe (tout en temps 1)
- modèle de Blum, Shub and Smale [Blum et al., 1989, Blum et al., 1998]

Une classe d'équivalence des suites de Cauchy rationnelles

- suite infinie de rationnels  $\Rightarrow$  mot infini
- préfixe fini  $\Rightarrow$  approximation
- valeur exacte / représentation complète en temps infini
- analyse récursive, machines de Turing de type 2, *computable analysis* [Weihrauch, 2000]

## Modèles incomparables !

### BSS

- peut calculer le signe
- mais pas l'exponentielle

### Analyse récursive

- peut calculer l'exponentielle
- ne peut calculer que des fonctions continues

# Modèles incomparables !

## BSS

- peut calculer le signe
- mais pas l'exponentielle

## Analyse récursive

- peut calculer l'exponentielle
- ne peut calculer que des fonctions continues

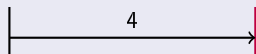
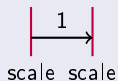
## Autres modèles ?

Oui, beaucoup, rarement comparables

**pas de thèse de Turing analogique**

# Représentation

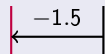
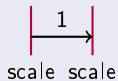
(approche BBS)



Valeur: 4

# Représentation

(approche BBS)



Valeur: -1.5

# Représentation

(approche BBS)



Valeur :  $\sqrt{2}$



# Représentation

(approche BBS)



Valeur :  $\sqrt{2}$

Signe...

... en fonction du premier signal rencontré

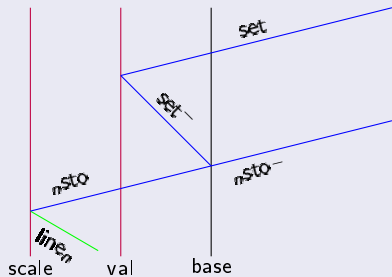
Autres fonctions ?

- 1 Introduction, machines à signaux
- 2  $i$   $i$  Nombre réel ??
- 3 Liens avec BSS**
- 4 Liens avec l'Analyse récursive
- 5 Conclusion

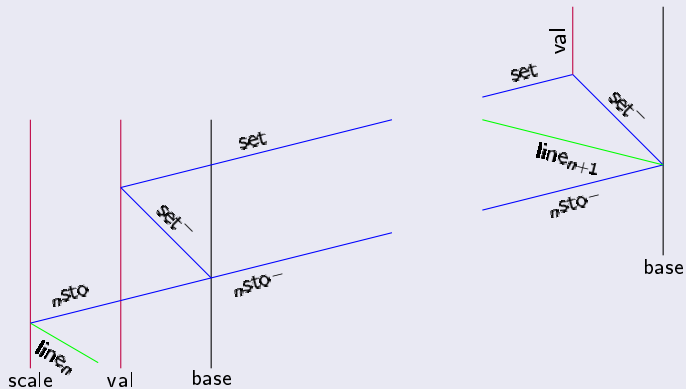
## Concentration sur le calcul sur les réels

↪ on passe sur la gestion des variables et autres « détails »

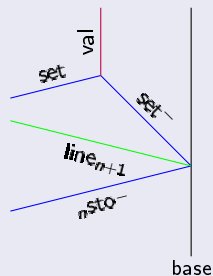
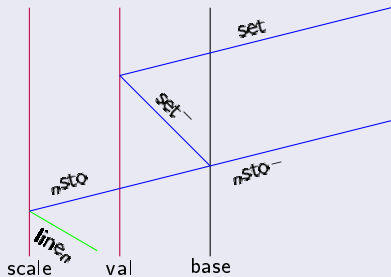
# Copier une valeur



# Copier une valeur



## Copier une valeur

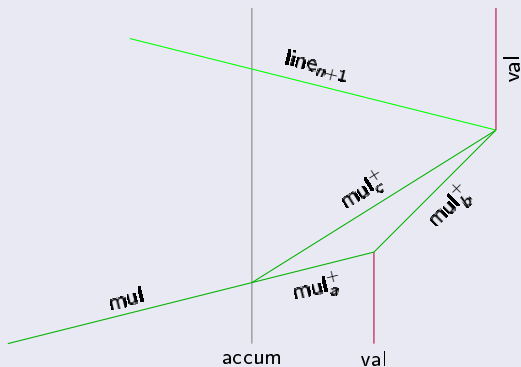


L'addition se fait...

...en ajoutant à val et non à base

# Multiplication par une constante (externe)

Par exemple, par 2



## Lien avec BSS linéaire

### Théorème [Durand-Lose, 2007]

SM et lin-BSS ont la même puissance de calcul

- en l'absence de toute accumulation

(autre sens non présenté)



## Lien avec BSS linéaire

### Théorème [Durand-Lose, 2007]

SM et lin-BSS ont la même puissance de calcul

- en l'absence de toute accumulation

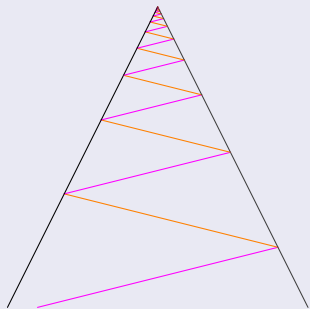
(autre sens non présenté)

### Et la multiplication interne ?

- impossible sans accumulation
- $\lambda$  accumulation ?
- $\lambda$  et ensuite ?

## Accumulation simple ?

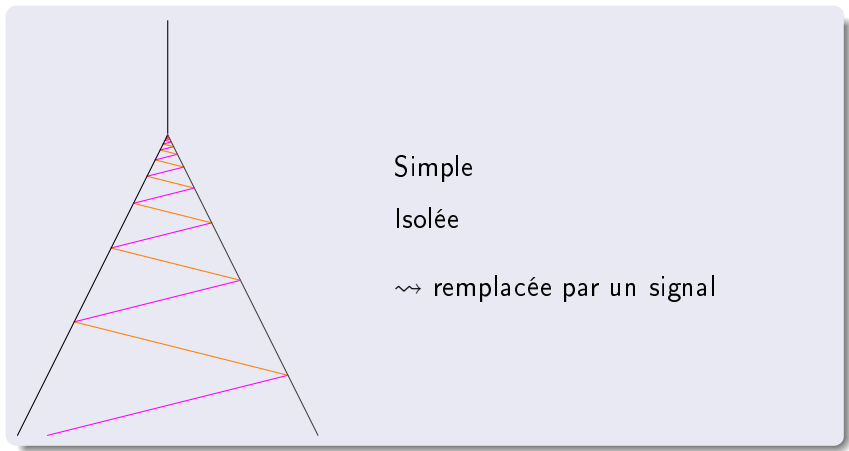
?



Simple

Isolée

## Accumulation simple ?



## Schéma de multiplication

$$0 < y < 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 0.y_1y_2y_3 \dots \\ xy = \sum_{0 < i} y_i \left(\frac{x}{2^i}\right) \end{array} \right.$$

$$1 \leq y \quad yx = (x2^k) \left(\frac{y}{2^k}\right) \text{ avec } 0 < \frac{y}{2^k} < 1$$

Zéros et signes se traitent facilement

# Récurrance

$$p_n = \sum_{0 < i < n} y_i \left( \frac{x}{2^i} \right)$$

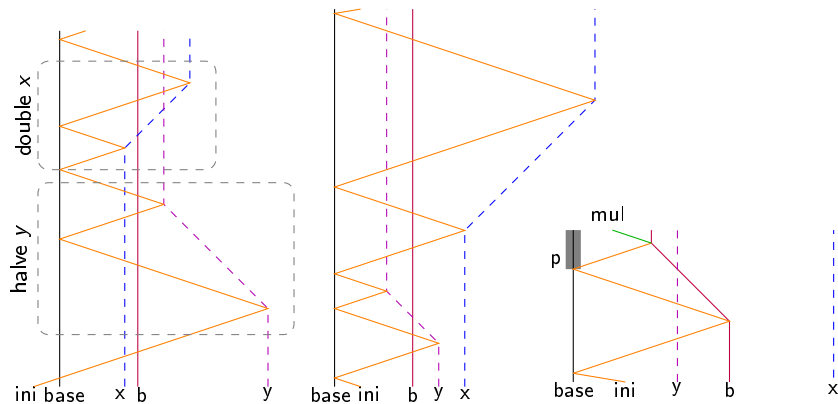
$$x_n = \frac{x}{2^n}$$

$$\hat{y}_n = 0.00 \dots 0 y_n y_{n+1} y_{n+2} \dots$$

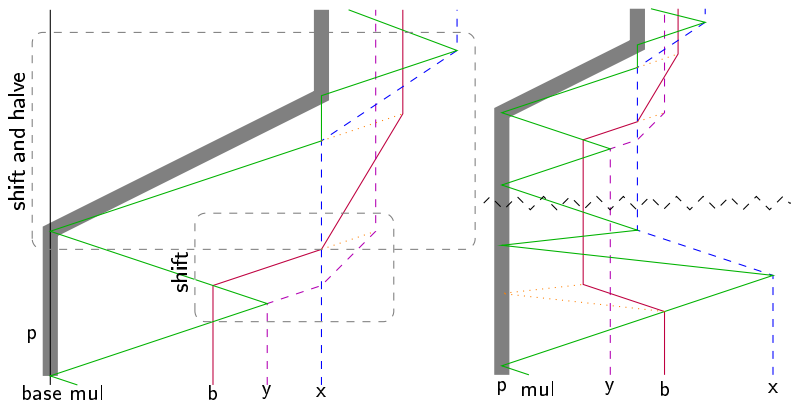
$$b_n = \frac{1}{2^n}$$

Valeurs suivantes se calculent avec test, somme et division par 2  
(multiplication par la constante  $\frac{1}{2}$ )

- $p_n \rightarrow xy$  donc accumulation sur cette limite
- Toutes les autres  $\rightarrow 0$  et tant mieux !

Normalisation (pour assurer  $0 < y < 1$ )

## Boucle infinie



- 1 Introduction, machines à signaux
- 2  $i$   $i$  Nombre réel ??
- 3 Liens avec BSS
- 4 Liens avec l'Analyse récursive**
- 5 Conclusion



## Analyse récursive

Codage utilisé : *binaire signé*

$$\{\bar{1}, 0, 1\}^* \bullet \{\bar{1}, 0, 1\}^\omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n_k n_{k-1} \dots n_0 \bullet d_1 d_2 d_3 \dots d_n \dots \longmapsto \sum_{0 \leq i \leq k} n_i \cdot 2^i + \sum_{1 \leq i} \frac{d_i}{2^i}$$

Problème : infinité de signaux

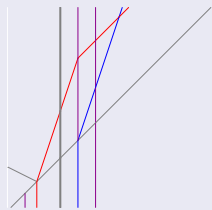
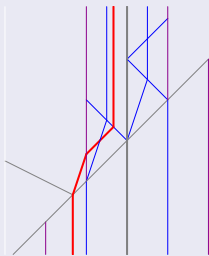
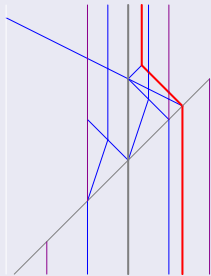
- garder la même représentation
- convertir en un « convoi »
- manipuler et faire un nombre infini d'itérations à une machine de Turing
- reconvertir

## Extraction d'un bit

Extraction de bit signé à la demande

... il va y avoir beaucoup de demandes...

Structure vide

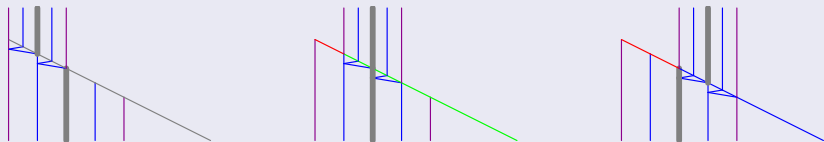
 $-1 < \varepsilon < -\frac{1}{2}$  $-\frac{1}{2} < \varepsilon < \frac{1}{2}$  $\frac{1}{2} < \varepsilon < 1$ *Voulez-vous une animation ?*



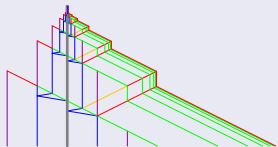
## Connexion en mode approximation

- Un signal sort pour demander un bit supplémentaire de l'entrée
- Un signal est envoyé pour préciser la sortie

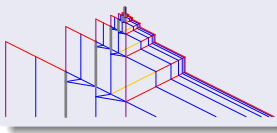
Ajouter un bit au résultat, améliorer la précision



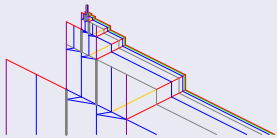
000000



111111

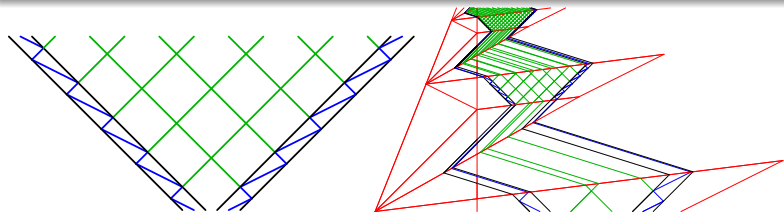


111110



## Tout faire en temps fini

Opérateurs permettant de contracter l'espace et le temps tout en gardant des rapports exacts (lien modèle du trou noir)

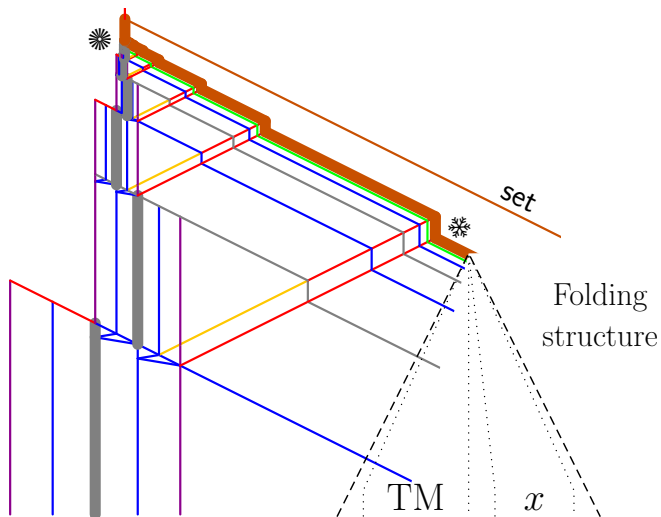


- Entrées : à l'intérieur de la contraction, aucun problème
- Sortie : de plus en plus de signaux  $\rightsquigarrow$  création d'un *convoi*

Limite du convoi : accumulation non isolée

toujours présente ne se transformant pas en signal  
 $\rightsquigarrow$  barrière infranchissable

# Schéma global



- 1 Introduction, machines à signaux
- 2  $i$   $i$  Nombre réel ??
- 3 Liens avec BSS
- 4 Liens avec l'Analyse récursive
- 5 Conclusion**

## Liens avec d'autres modèles

- Modèles totalement simulés / implanté / émulé
  - modèle de Blum, Shub and Smale
  - analyse récursive
- (à faire) *Caractériser la puissance analytique* avec des accumulations simples

## À faire par ailleurs

- Discrétisation automatique vers un AC
- Explorer les fractales engendrables
- Étudier les complexités (et liens avec les classes habituelles)



# Merci de votre attention

